

Autour du noyau de Poisson

Définitions et notations

- On note F l'ensemble des nombres réels positifs non entiers ;
- On note D l'ensemble des nombres complexes de module inférieur strictement à 1.
- Si Z est un nombre complexe, on note $\operatorname{Re}(Z)$ sa partie réelle et $\operatorname{Im}(Z)$ sa partie imaginaire.
- Dans tout le problème, on désigne par g la fonction réelle de variable réelle définie par :

$$g : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}$$
$$u \longmapsto \frac{1}{1+u}.$$

I Question préliminaire

- 1) Soit x un réel. Montrer que l'intégrale :

$$I(x) = \int_0^1 \frac{u^{x-1} + u^{-x}}{1+u} \, du$$

existe si et seulement si $x \in]0, 1[$.

L'objet du problème est de calculer la valeur de cette intégrale.

II Une identité intégrale

Soit f une fonction à valeurs réelles, définie et développable en série entière sur $[0, 1[$. On note $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ les coefficients de son développement.

- 2) Montrer que l'expression

$$\int_0^1 v^{x-1} f(yv) \, dv$$

a un sens pour tout $x > 0$ et tout $y \in]0, 1[$.

Pour $x > 0$, on pose

$$S[f](x, y) = \begin{cases} \int_0^1 v^{x-1} f(yv) \, dv & \text{pour } y \in]0, 1[, \\ \frac{f(0)}{x} & \text{pour } y = 0. \end{cases}$$

- 3) Montrer que pour tout $x > 0$, la fonction $y \mapsto S[f](x, y)$ est continue sur $[0, 1[$.
- 4) Montrer que pour tout $x \in F$, la fonction $y \mapsto S[f](x, y)$ est développable en série entière sur $[0, 1[$, et donner les coefficients de son développement en série entière.

On considère la fonction $\tilde{f}$ définie sur D par la relation :

$$\forall z \in D : \tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Pour tout $x \in F$ et tout $y \in [0, 1[$, on considère l'expression :

$$J[f](x, y) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \operatorname{Re} \left[\int_0^1 e^{i\pi x t} \tilde{f}(-ye^{i\pi t}) \, dt \right].$$

- 5) Calculer, pour tout $x \in F$ et tout $n \in \mathbf{N}$:

$$I_n(x) = \frac{(-1)^n \pi}{\sin(\pi x)} \int_0^1 \cos(\pi(n+x)t) \, dt.$$

- 6) Montrer que pour tout $x \in F$, la fonction $y \mapsto J[f](x, y)$ est développable en série entière sur $[0, 1[$, et donner les coefficients de son développement en série entière. En déduire que $S[f](x, y) = J[f](x, y)$ pour tout $x \in F$ et tout $y \in [0, 1[$.

Pour tout $x \in]0, 1[$ et tout $y \in [0, 1[$, on pose :

$$C[f](x, y) = S[f](x, y) + S[f](1-x, y).$$

7) Établir l'identité suivante pour tout $x \in]0, 1[$ et tout $y \in [0, 1[$:

$$C[g](x, y) = \frac{\pi(1-y)}{\sin(\pi x)} \int_0^1 \frac{\cos(\pi(1-x)t) + \cos(\pi xt)}{1 - 2y \cos(\pi t) + y^2} dt.$$

III Noyau de Poisson

Pour tout $y \in [0, 1[$ et tout $t \in [0, 1]$, on définit le *noyau de Poisson* P par :

$$P(t, y) = \frac{1 - y^2}{1 - 2y \cos(\pi t) + y^2}.$$

8) Établir l'identité suivante pour tout $y \in [0, 1[$ et tout $t \in [0, 1]$:

$$P(t, y) = \operatorname{Re} \left[\frac{1 + ye^{i\pi t}}{1 - ye^{i\pi t}} \right].$$

9) Montrer que pour $t \in [0, 1]$ fixé, la fonction $y \mapsto P(t, y)$ est développable en série entière sur $[0, 1[$, et calculer les coefficients de son développement en série entière.

10) Établir que pour tout $y \in [0, 1[$ on a :

$$\int_0^1 P(t, y) dt = 1.$$

Dans les questions 11) et 12) ci-dessous, on désigne par φ une fonction définie et continue sur $[0, 1]$, à valeurs réelles.

11) Montrer que pour tout $\alpha \in]0, 1[$, on a :

$$\lim_{y \rightarrow 1} \int_\alpha^1 P(t, y) \varphi(t) dt = 0$$

et

$$\left| \int_0^\alpha P(t, y) \varphi(t) dt \right| \leq \sup_{t \in [0, \alpha]} |\varphi(t)|.$$

12) En déduire que l'on a :

$$\lim_{y \rightarrow 1} \int_0^1 P(t, y) \varphi(t) \, dt = \varphi(0).$$

On pourra commencer par traiter le cas où $\varphi(0) = 0$.

IV Application à un calcul d'intégrale

Pour tout $x \in]0, 1[$ et tout $y \in [0, 1[$, on pose :

$$A(x, y) = \int_0^1 P(t, y) \cos(\pi x t) \, dt.$$

13) Pour tout $x \in]0, 1[$ et tout $y \in [0, 1[$, exprimer $C[g](x, y)$ en fonction de $A(x, y)$ et de $A(1 - x, y)$.

14) Pour $x \in]0, 1[$ fixé, déterminer la limite de $C[g](x, y)$ quand y tend vers 1 par valeurs inférieures.

15) En déduire la valeur de $I(x)$ pour tout $x \in]0, 1[$.

FIN DU PROBLÈME