Mines 2022 – Maths 1 – PC : un corrigé

Partie A

1 – Pour $|z|<1$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on a $\left|\dfrac{z^n}{n}\right|\leq 1$. Donc la suite numérique $\left(\dfrac{z^n}{n}\right)_{n\geq 1}$ est bornée et donc la série entière $\sum_{n\geq 1}\dfrac{z^n}{n}$ est de rayon $R\geq 1$. Par suite, elle converge simplement sur *D*.

On peut alors légitimement poser pour $x\in\left]-1,1\right[$: $L(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n}$; on peut dériver terme à terme pour obtenir : $\forall x\in\left]-1,1\right[, L'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}x^{n-1}=\dfrac{1}{1-x}$ et sachant $L(0)=0$ on obtient :

$$\boxed{\forall x\in\left]-1,1\right[, L(x)=-\ln(1-x)}.$$

2 – Pour $z\in D$ et $t\in[-1,1]$ on a $|tz|<1$ et *L* est dérivable sur $\left]-1,1\right[$; par composition :

$$\boxed{\Phi \text{ est dérivable sur } [-1,1], \text{ qui contient } [-1,1], \text{ et } \Phi'(t)=zL'(tz)=\frac{z}{1-tz}}$$

3 – Toujours pour $z\in D$ on a en dérivant sur $[0,1]$:

$$\Psi'(t)=-z\mathrm{e}^{\Phi(t)}+(1-tz)\Phi'(t)\mathrm{e}^{\Phi(t)}=0$$

Donc Ψ est constante sur l'intervalle $[0,1]$ et en outre $\Psi(0)=\exp(L(0))=1$. Donc pour $t\in[0,1]$: $(1-tz)\exp(L(tz))=1$ et donc $\exp(L(tz))=\dfrac{1}{1-tz}$. En particulier pour $t=1$ on obtient : $\boxed{\exp(L(z))=\dfrac{1}{1-z}}$.

4 – Comme la série entière $\sum_{n\geq 1}\dfrac{z^n}{n}$ est de rayon ≥ 1, elle est absolument convergente pour $z\in D$ ce qui permet d'écrire : $\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{z^n}{n}\right|\leq\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{|z|^n}{n}=L(|z|)$. Or $\exp(L(|z|))=\dfrac{1}{1-|z|}$ d'après la question 3, et les deux membres étant strictement positifs on en déduit : $L(|z|)=-\ln(1-|z|)$, et finalement :

$$\boxed{|L(z)|\leq-\ln(1-|z|)}.$$

Par suite on a pour $n\in\mathbb{N}^*$: $\left|L(z^n)\right|\leq-\ln\left(1-|z|^n\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}|z|^n$ car $|z|<1$; la série géométrique $\sum_n z^n$ converge et par comparaison : $\boxed{\text{La série } \sum_{n\geq 1}L(z^n) \text{ converge absolument}}$.

5 – Comme l'exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$, on a $P(z)\neq 0$.

En outre par continuité de l'exponentielle on a :

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{+\infty} L(z^n)\right) = \exp\left(\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N} L(z^n)\right) = \lim_{N\to+\infty}\exp\left(\sum_{n=1}^{N} L(z^n)\right) = \lim_{N\to+\infty}\prod_{n=1}^{N}\exp\left(L(z^n)\right)$$

et finalement : $\boxed{P(z) = \lim_{N\to+\infty}\prod_{n=1}^{N}\frac{1}{1-z^n}}$.

Pour $t>0$ on a $e^{-t}\in D$ et donc $P(e^{-t}) = \lim_{N\to+\infty}\prod_{n=1}^{N}\frac{1}{1-e^{-nt}}$; par croissance de la suite à termes strictement positifs $\left(\prod_{n=1}^{N}\frac{1}{1-e^{-nt}}\right)_{N\geq 1}$ on a $P(e^{-t})>0$ et on peut affirmer par continuité de ln :

$$\ln\left(P(e^{-t})\right) = \lim_{N\to+\infty}\ln\left(\prod_{n=1}^{N}\frac{1}{1-e^{-nt}}\right) = -\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\ln\left(1-e^{-nt}\right)$$

En d'autres termes : $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geq 1}\ln\left(1-e^{-nt}\right) \text{ converge et } \ln\left(P(e^{-t})\right) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1-e^{-nt}\right)}$.

Partie B

6 – La fonction partie entière est notoirement continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Il s'en suit que la fonction q est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Sachant que $\lfloor x+1\rfloor = 1+\lfloor x\rfloor$, on a immédiatement $q(x+1)=q(x)$ et q est 1-périodique.

Enfin pour $x\in\mathbb{R}$, de partie entière n :

- Si $x\in\mathbb{Z}$, alors $\lfloor -x\rfloor = -n$. Donc $q(x)=q(-x)=\frac{1}{2}$ et $|q(x)|=|q(-x)|$.
- Sinon $n<x<n+1$ et $-n-1<-x<-n$, donc $\lfloor -x\rfloor = -n-1$. Il s'en suit que $q(x)=x-n-\frac{1}{2}$ et $q(-x)=-x+n+\frac{1}{2}=-q(x)$: on a à nouveau $|q(x)|=|q(-x)|$.

Donc dans tous les cas $|q(x)|=|q(-x)|$ et $|q|$ est paire.

7 – La fonction à intégrer est continue par morceaux sur $[1,+\infty[$. Par ailleurs, comme $q(x)=x-\frac{1}{2}$ sur $[0,1[$ on a $|q(x)|\leq\frac{1}{2}$ sur $[0,1[$ et cette inégalité s'étend à $\mathbb{R}$ par périodicité.

Ainsi pour $u\geq 1$ et $t>0$:

$$\left|\frac{q(u)}{e^{tu}-1}\right| \leq \frac{1/2}{e^{tu}-1} \underset{u\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{u^2}\right)$$

Comme en outre l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{du}{u^2}$ converge, on en déduit que $\int_1^{+\infty}\frac{q(u)}{e^{tu}-1}du$ converge pour tout réel $t>0$.

8 – Pour $n>1$ on a $\int_1^n \frac{q(u)}{u}du = \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{q(u)}{u}du$.

Or pour k entier et $u \in [k, k+1[$ on a $q(u) = u - k - \frac{1}{2}$, donc $\int_k^{k+1} \frac{q(u)}{u} \mathrm{d}u = \int_k^{k+1} \left(1 - \frac{k+\frac{1}{2}}{u}\right) \mathrm{d}u$ et donc $\int_1^n \frac{q(u)}{u} \mathrm{d}u = n - 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \left(k + \frac{1}{2}\right) \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$.

Par télescopage, $\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(n)$, et par ailleurs en forçant le télescopage :

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \big((k+1)\ln(k+1) - k\ln(k)\big) - \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) = n\ln(n) - \ln(n!)$$

On regroupe tout : $\boxed{\int_1^n \frac{q(u)}{u} \mathrm{d}u = n - 1 - \frac{\ln(n)}{2} - n\ln(n) + \ln(n!) = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^n n!}{n^n \sqrt{n}}\right) - 1}$.

9 – On rappelle qu'on a vu que $|q| \leq 1/2$. De là on a pour $x > 1$: $\left|\int_{\lfloor x \rfloor}^x \frac{q(u)}{u} \mathrm{d}u\right| \leq \int_{\lfloor x \rfloor}^x \frac{1}{2u} \mathrm{d}u \leq \frac{1}{2\lfloor x \rfloor}(x - \lfloor x \rfloor) \leq \frac{1}{2\lfloor x \rfloor}$. L'inégalité $\lfloor x \rfloor > x - 1$ montre $\lim_{x \to +\infty} \lfloor x \rfloor = +\infty$ et donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2\lfloor x \rfloor} = 0$, d'où : $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \int_{\lfloor x \rfloor}^x \frac{q(u)}{u} \mathrm{d}u = 0}$.

Par suite on a pour $x \geq 2$ et $n_x = \lfloor x \rfloor > 1$:

$$\int_0^x \frac{q(u)}{u} \mathrm{d}u = \int_0^{n_x} \frac{q(u)}{u} \mathrm{d}u + \int_{n_x}^x \frac{q(u)}{u} \mathrm{d}u.$$

On vient de voir que $\lim_{x \to +\infty} \int_{n_x}^x \frac{q(u)}{u} \mathrm{d}u = 0$ tandis que $\int_1^{n_x} \frac{q(u)}{u} \mathrm{d}u = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^{n_x} n_x!}{n_x^{n_x} \sqrt{n_x}}\right) - 1$. Avec la formule de Stirling, on a $\frac{\mathrm{e}^n n!}{n^n \sqrt{n}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}$, donc sachant $n_x \in \mathbb{N}^*$ et $\lim_{x \to +\infty} n_x = +\infty$ on a :

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{n_x} n_x!}{n_x^{n_x} \sqrt{n_x}} = \sqrt{2\pi}$ puis $\lim_{x \to +\infty} \int_1^{n_x} \frac{q(u)}{u} \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\ln(2\pi) - 1$, et finalement :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{q(u)}{u} \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\ln(2\pi) - 1$$

On en déduit : $\boxed{\text{l'intégrale } \int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u} \mathrm{d}u \text{ converge et } \int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u} \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\ln(2\pi) - 1}$.

10 – On sait que pour $u > 0$ on a $\mathrm{e}^{-u} \in]0,1[$ donc $\ln(1 - e^{-u}) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \mathrm{e}^{-nu}$. Posons $f_n(u) = -\frac{1}{n} \mathrm{e}^{-nu}$. Alors :

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue et intégrable sur $[0, +\infty[$ et $\int_0^{+\infty} f_n = -\frac{1}{n^2}$ (immédiat).

● La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction continue $u \mapsto \ln\left(1-\mathrm{e}^{-u}\right)$.

● Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{+\infty} |f_n| = -\int_0^{+\infty} f_n = \frac{1}{n^2}$ et la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

On déduit de ces trois points :

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \ln\left(1-\mathrm{e}^{-u}\right)\mathrm{d}u \text{ converge et } \int_0^{+\infty} \ln\left(1-\mathrm{e}^{-u}\right)\mathrm{d}u = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}}$$

11 – Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}$; f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a pour $x > 0$: $f'(x) = \frac{x\mathrm{e}^{-x} - 1 + \mathrm{e}^{-x}}{x^2}$; on pose $g(x) = x\mathrm{e}^{-x} - 1 + \mathrm{e}^{-x}$, de dérivée donnée par :

$$\forall x > 0, g'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} = -x\mathrm{e}^{-x} < 0$$

Donc g est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ puis sur $[0,+\infty[$ par continuité en 0 et en outre $g(0) = 0$. Donc $\forall x > 0, g(x) < 0$, puis $\forall x > 0, f'(x) < 0$. Ainsi :

$$\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur }]0,+\infty[.}$$

Par suite, pour $u \in]0,1]$ et $t > 0$ on a en posant $x = tu$: $0 < x \leq t$. Puis sachant $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ on a $f(t) \leq f(x) < 1$. Donc $\frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t} \leq \frac{1-\mathrm{e}^{-tu}}{tu} < 1$ puis $\ln\left(u\frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\right) \leq \ln\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-tu}}{u}\right) < \ln(u)$.

La fonction $u \mapsto \frac{1-\mathrm{e}^{tu}}{u}$ est prolongeable par continuité en 0, donc elle est intégrable sur $]0,1]$; en outre la fonction ln est notoirement intégrable sur $]0,1]$ tout comme la fonction $u \mapsto \ln\left(u\frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\right) = \ln(u) + \ln\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\right)$. Ainsi :

$$\ln\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\right) + \int_0^1 \ln(u)\mathrm{d}u \leq \int_0^1 \ln\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-tu}}{u}\right)\mathrm{d}u \leq \int_0^1 \ln(u)\mathrm{d}u$$

Or $\int_0^1 \ln(u)\mathrm{d}u = \left[u\ln(u) - u\right]_0^1 = -1$. Ainsi : $-1 + \ln\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\right) \leq \int_0^1 \ln\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-tu}}{u}\right)\mathrm{d}u \leq -1$.

Or $\lim_{t\to 0^+} \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t} = 1$ puis $\lim_{t\to 0^+} \ln\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\right) = 0$, donc les deux termes extérieurs tendent vers -1 en 0^+ et la Gendarmerie Nationale nous indique alors : $\boxed{\lim_{t\to 0^+} \int_0^1 \ln\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-tu}}{u}\right)\mathrm{d}u = -1}$.

12 – On fixe $k \in \mathbb{N}^*$ et on pose pour $t \geq 0$ et $u \in \left[k/2, (k+1)/2\right]$: $\varphi(t,u) = \frac{tq(u)}{\mathrm{e}^{tu} - 1}$ si $t > 0$ et $\varphi(0,u) = \frac{q(u)}{u}$

● Pour tout $t \geq 0$, la fonction $u \mapsto \varphi(t,u)$ est continue par morceaux (cf Q6) et à ce titre intégrable sur le segment $\left[k/2,(k+1)/2\right]$ lorsque $k \in \mathbb{N}^*$.

● Pour tout $u \in \left[k/2,(k+1)/2\right]$, la fonction $t \mapsto \varphi(t,u)$ est continue sur $\left]0,+\infty\right[$. En outre $\varphi(t,u) \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{tq(u)}{tu}$, donc $\lim\limits_{t\to 0^+} \varphi(t,u) \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{q(u)}{u} = \varphi(0,u)$ et la fonction $t \mapsto \varphi(t,u)$ est en outre continue en 0 ; elle est finalement bien continue sur $\mathbb{R}^+$.

● Reste la domination. Pour $t > 0$ et $u \in \left[k/2,(k+1)/2\right]$ on a sachant $\mathrm{e}^x - 1 \geq x$:

$$\left|\varphi(t,u)\right| \leq \frac{t\left|q(u)\right|}{tu} = \frac{\left|q(u)\right|}{u}$$

et l'inégalité $\left|\varphi(t,u)\right| \leq \dfrac{\left|q(u)\right|}{u}$ reste valide pour $t = 0$. De plus la fonction $u \to \dfrac{q(u)}{u}$ est intégrable (car continue par morceaux) sur le segment $\left[k/2,(k+1)/2\right]$.

Il ressort de tous ces points que $\boxed{u_k \text{ est continue sur } \mathbb{R}^+}$.

13 – Soit $t > 0$, $k \in \mathbb{N}^*$. On raisonne selon la parité de k :

● Si k est pair, alors pour $u \in \left[k/2,(k+1)/2\right]$ on a $\lfloor u \rfloor = \dfrac{k}{2}$ et $q(u) = u - \dfrac{k+1}{2} \leq 0$; donc $\dfrac{tq(u)}{\mathrm{e}^{tu}-1} \leq 0$ et $\left|u_k(t)\right| = -u_k(t) = \displaystyle\int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{-tq(u)}{\mathrm{e}^{tu}-1}\mathrm{d}u = \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t\left|q(u)\right|}{\mathrm{e}^{tu}-1}\mathrm{d}u$.

● Si k est impair, alors pour $u \in \left[k/2,(k+1)/2\right[$ on a $\lfloor u \rfloor = \dfrac{k-1}{2}$ et $q(u) = u - \dfrac{k}{2} \geq 0$; on a alors de même : $\left|u_k(t)\right| = u_k(t) = \displaystyle\int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t\left|q(u)\right|}{\mathrm{e}^{tu}-1}\mathrm{d}u$.

Donc dans tous les cas : $\boxed{\left|u_k(t)\right| = \displaystyle\int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t\left|q(u)\right|}{\mathrm{e}^{tu}-1}\mathrm{d}u}$.

Il ressort en outre des études de signes précédentes que $\boxed{u_k(t) = (-1)^{k+1}\left|u_k(t)\right|}$. *Il y a ici une coquille dans l'énoncé.*

Il s'en suit que la suite $\left(u_k(t)\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est alternée.

En outre la majoration $\left|u_k(t)\right| \leq \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t}{\mathrm{e}^{tu}-1}\mathrm{d}u \leq \frac{t}{4\left(\mathrm{e}^{kt/2}-1\right)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ montre que $\lim\limits_{k\to+\infty} \left|u_k(t)\right| = 0$.

Regardons maintenant la décroissance en utilisant que q est 1-périodique et que $|q|$ est paire :

● Si k est pair on fait les changements de variable $u = v + k/2$ dans $\left|u_k(t)\right|$ et $u = 1 + v + k/2$ dans $\left|u_{k+1}(t)\right|$:

$$\left|u_k(t)\right| = \int_0^{1/2} \frac{t\left|q(v)\right|}{\mathrm{e}^{kt/2}\mathrm{e}^{tv}-1}\mathrm{d}v \text{ et } \left|u_{k+1}(t)\right| = \int_{-1/2}^{0} \frac{t\left|q(v)\right|}{\mathrm{e}^{t(1+k/2)}\mathrm{e}^{tv}-1}\mathrm{d}v \underset{w=-v}{=} \int_0^{1/2} \frac{t\left|q(w)\right|}{\mathrm{e}^{t(1+k/2)}\mathrm{e}^{-tw}-1}\mathrm{d}w$$

Or pour $w \in [0,1/2]$, $t(1-w) \geq tw$, donc $e^{tk/2}\left(e^{tw} - e^{t(1-w)}\right) \leq 0$ puis $e^{tk/2+tw} \leq e^{t(1+k/2)-tw}$ finalement $|u_{k+1}(t)| \leq |u_k(t)|$.

● Si k est impair, on fait le changement de variable $u = v + (k+1)/2$ dans $|u_k(t)|$ et $|u_{k+1}(t)|$:

$$|u_k(t)| = \int_{-1/2}^{0} \frac{t|q(v)|}{e^{t(k+1)/2}e^{tv} - 1}\mathrm{d}v = \int_{0}^{1/2} \frac{t|q(w)|}{e^{t(k+1)/2}e^{-tw} - 1}\mathrm{d}v \text{ et } |u_{k+1}(t)| = \int_{0}^{1/2} \frac{t|q(v)|}{e^{t(k+1)/2}e^{tv} - 1}\mathrm{d}v$$

Or pour $v \in [0,1/2]$, $e^{t(k+1)/2}e^{-tv} - 1 \leq e^{t(k+1)/2}e^{tv} - 1$ donc $|u_k(t)| \geq |u_{k+1}(t)|$.

Finalement dans tous les cas $|u_k(t)| \geq |u_{k+1}(t)|$ et la suite $\left(|u_k(t)|\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Toutes les hypothèses du critère sur les séries alternées ont été vérifiées on peut conclure :

La série $\sum_{k\geq 1} u_k(t)$ converge et on a la majoration du reste $\left|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k(t)\right| \leq |u_n(t)| \leq \int_{n/2}^{(n+1)/2} \frac{t|q(u)|}{e^{tu} - 1}\mathrm{d}u$

Or : $\int_{n/2}^{(n+1)/2} \frac{t|q(u)|}{e^{tu} - 1}\mathrm{d}u \leq \frac{1}{2}\int_{n/2}^{(n+1)/2} \frac{t}{e^{nt/2} - 1}\mathrm{d}u = \frac{t}{4\left(e^{nt/2} - 1\right)}$; on utilise à nouveau $e^x - 1 \geq x$ pour obtenir : $\int_{n/2}^{(n+1)/2} \frac{t|q(u)|}{e^{tu} - 1}\mathrm{d}u \leq \frac{t}{4nt/2} = \frac{1}{2n}$ et finalement : $\boxed{\left|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k(t)\right| \leq \frac{1}{2n}}$.

14 – On commence par remarquer l'existence de $\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu} - 1}\mathrm{d}u$ a été établie à la question 7 pour $t > 0$ et on peut alors écrire : $\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu} - 1}\mathrm{d}u = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t)$. En outre on a également vu à la question 9 la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u$ et on peut écrire $\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(0)$.

Or il a été vu que les fonctions u_k sont continues sur $\mathbb{R}^+$ et on vient de montrer la convergence simple de $\sum_{k\geq 1} u_k$ sur $\mathbb{R}^+$; en outre la majoration du reste $\left|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k(t)\right| \leq \frac{1}{2n}$ (prouvée sur $]0,+\infty[$ et admise en 0) montre que la convergence est uniforme sur $[0,+\infty[$. Il s'en suit que $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ est continue sur $[0,+\infty[$ et donc que $\lim_{t\to 0^+} \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(0)$ ce qui signifie :

$$\boxed{\lim_{t\to 0^+} \int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu} - 1}\mathrm{d}u = \int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u = \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1}.$$

15 – On sait que sur $[k, k+1[$ on a $q(t) = t - k - \frac{1}{2}$ ce qui nous amène à découper l'intégrale :

$$\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu} - 1}\mathrm{d}u = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{te^{-tu}\left(u - k - \frac{1}{2}\right)}{1 - e^{-tu}}\mathrm{d}u$$

On intègre par parties :

$$\int_k^{k+1}\frac{t\mathrm{e}^{-tu}\left(u-k-\frac12\right)}{1-\mathrm{e}^{-tu}}\mathrm{d}u=\left[\left(u-k-\tfrac12\right)\ln\left(1-\mathrm{e}^{-tu}\right)\right]_{u=k}^{u=k+1}-\int_k^{k+1}\ln\left(1-\mathrm{e}^{-tu}\right)\mathrm{d}u$$
$$=\frac12\ln\left(1-\mathrm{e}^{-t(k+1)}\right)+\frac12\ln\left(1-\mathrm{e}^{-tk}\right)-\int_k^{k+1}\ln\left(1-\mathrm{e}^{-tu}\right)\mathrm{d}u$$

Avec la question 5 on a pour $t>0$:

$$\frac12\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\ln\left(1-\mathrm{e}^{-t(k+1)}\right)+\ln\left(1-\mathrm{e}^{-tk}\right)\right)=-\ln\left(P\left(\mathrm{e}^{-t}\right)\right)-\frac12\ln\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)$$

donc : $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{tq(u)}{\mathrm{e}^{tu}-1}\mathrm{d}u=-\ln\left(P\left(\mathrm{e}^{-t}\right)\right)-\frac12\ln\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)-\sum_{k=1}^{+\infty}\int_k^{k+1}\ln\left(1-\mathrm{e}^{-tu}\right)\mathrm{d}u$. Or l'équivalent (valide pour $t>0$) $\ln\left(1-\mathrm{e}^{-tu}\right)\underset{u\to+\infty}{\sim}-\mathrm{e}^{-tu}$ montre l'existence de $\int_1^{+\infty}\ln\left(1-\mathrm{e}^{-tu}\right)\mathrm{d}u$, donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\int_k^{k+1}\ln\left(1-\mathrm{e}^{-tu}\right)\mathrm{d}u=\int_1^{+\infty}\ln\left(1-\mathrm{e}^{-tu}\right)\mathrm{d}u$ et finalement :

$$\boxed{\forall t>0,\int_1^{+\infty}\frac{tq(u)}{\mathrm{e}^{tu}-1}\mathrm{d}u=-\ln\left(P\left(\mathrm{e}^{-t}\right)\right)-\frac12\ln\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)-\int_1^{+\infty}\ln\left(1-\mathrm{e}^{-tu}\right)\mathrm{d}u}$$

16 – Ainsi pour $t>0$: $\displaystyle\ln\left(P\left(\mathrm{e}^{-t}\right)\right)=-\int_1^{+\infty}\frac{tq(u)}{\mathrm{e}^{tu}-1}\mathrm{d}u-\frac12\ln\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)-\int_1^{+\infty}\ln\left(1-\mathrm{e}^{-tu}\right)\mathrm{d}u$.

On regarde chaque terme :

- $\ln\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)\underset{t\to0^+}{=}\ln\left(t+O\left(t^2\right)\right)=\ln(t)+\ln\left(1+O(t)\right)=\ln(t)+O(t)=\ln(t)+o(1)$.
- Avec la question 14 : $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{tq(u)}{\mathrm{e}^{tu}-1}\mathrm{d}u\underset{t\to0^+}{=}\frac{\ln(2\pi)}{2}-1+o(1)$.
- Avec la question 10 : $\displaystyle\int_1^{+\infty}\ln\left(1-\mathrm{e}^{-tu}\right)\mathrm{d}u\underset{v=tu}{=}\frac1t\int_t^{+\infty}\ln\left(1-\mathrm{e}^{-v}\right)\mathrm{d}u=-\frac{\pi^2}{6t}-\frac1t\int_0^t\ln\left(1-\mathrm{e}^{-v}\right)\mathrm{d}v$

  On a établi : $\ln\left(1-\mathrm{e}^{-v}\right)\underset{v\to0^+}{=}\ln(v)+O(v)$, donc il existe une fonction *r*, bornée par une constante *K* telle que $\ln\left(1-\mathrm{e}^{-v}\right)=\ln(v)+vr(v)$. De là :

  $$\frac1t\int_0^t\ln\left(1-\mathrm{e}^{-v}\right)\mathrm{d}u=\frac1t\int_0^t\ln(v)\mathrm{d}v+\frac1t\int_0^t vr(v)\mathrm{d}v.$$

  Or $\displaystyle\frac1t\int_0^t\ln(v)\mathrm{d}v=\frac{t\ln(t)-t}{t}\underset{t\to0^+}{=}\ln(t)-1+o(1)$, tandis que $\displaystyle\left|\frac1t\int_0^t vr(v)\mathrm{d}v\right|\le K\frac1t\int_0^t v\mathrm{d}v=\frac{tK}{2}$ et donc $\displaystyle\frac1t\int_0^t vr(v)\mathrm{d}v\underset{t\to0^+}{=}o(1)$.

On regroupe tout : $\displaystyle\ln\left(P\left(\mathrm{e}^{-t}\right)\right)=1-\frac{\ln(2\pi)}{2}-\frac{\ln(t)}{2}+\frac{\pi^2}{6t}+\ln(t)-1+o(1)$ et finalement :

$$\boxed{\ln\left(P\left(\mathrm{e}^{-t}\right)\right)=-\frac{\ln(2\pi)}{2}+\frac{\ln(t)}{2}+\frac{\pi^2}{6t}+o(1)}.$$

Partie C

17 – Soit $(a_1,...,a_N) \in P_{n,N}$. Pour $k \in [\![1,N]\!]$ on a par positivité des a_i : $a_k \le ka_k \le \sum_{i=1}^{N} ia_i = n$; donc pour chaque k on a $0 \le a_k \le n$ et donc $(a_1,...,a_N) \in [\![0,n]\!]^N$. On a montré : $\underline{P_{n,N} \subset [\![0,n]\!]^N}$.
De plus pour $N \ge 1$ on a $(n,0,...,0) \in P_{n,N}$, donc $\underline{P_{n,N} \ne \varnothing}$.
Considérons l'application φ définie sur $P_{n,N}$ par $\varphi(a_1,...,a_N) = (a_1,...,a_N,0)$. φ est clairement injective et à valeurs dans $P_{n,N+1}$. Donc $\operatorname{card}(P_{n,N}) \le \operatorname{card}(P_{n,N+1})$ et $p_{n,N} \le p_{n,N+1}$. On vient de montrer que : $\boxed{\text{la suite } (p_{n,N})_{N\ge1} \text{ est croissante}}$.
Pour $N \ge \max(n,1)$ et $(a_1,...,a_{N+1}) \in P_{n,N+1}$ on a $n = \sum_{i=1}^{N+1} ia_i \ge (N+1)a_{N+1}$, donc si on avait $a_{N+1} \ne 0$ alors $a_{N+1} \ge 1$ et $n = N+1 \ge n+1$: absurde. Donc $a_{N+1} = 0$ et l'application injective φ précédemment définie est également surjective de $P_{n,N}$ dans $P_{n,N+1}$. Donc $\operatorname{card}(P_{n,N}) = \operatorname{card}(P_{n,N+1})$ et finalement $p_{n,N} = p_{n,N+1}$:

$$\boxed{\text{La suite } (p_{n,N})_{N\ge1} \text{ est stationnaire à partir du rang } n}.$$

On notera pour la suite qu'on a donc $p_n = p_{n,n}$.

18 – Pour $z \in D$ on a $|z^N| < 1$ donc : $\frac{1}{1-z^N} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{Nk}$. On a donc le résultat voulu avec :

$$\boxed{a_{n,N} = 0 \text{ si } n \text{ n'est pas un multiple de } N \text{ et } a_{n,N} = 1 \text{ sinon}}.$$

Soit $z \in D$. Appelons HR_N la propriété :

'la série $\sum_n p_{n,N} z^n$ est absolument convergente et $\prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-z^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n$ '.

Pour $N = 1$: on a $P_{n,1} = \{(n)\}$ donc $p_{n,1} = 1$ et la série $\sum_{n\ge1} p_{n,1} z^n$ est absolument convergente de somme $\sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,1} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, donc HR_1 est vraie.
Supposons désormais HR_N vraie. On a alors :

$$\prod_{k=1}^{N+1} \frac{1}{1-z^k} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,N+1} z^n\right).$$

Les deux séries sont absolument convergente : celle de gauche par hypothèse de récurrence et celle de droite car c'est la série géométrique de raison $|z^N| < 1$. Donc par produit de Cauchy :

$$\prod_{k=1}^{N+1} \frac{1}{1-z^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} p_{k,N} a_{n-k,N+1}\right) z^n$$

Or on a la réunion disjointe :

$$P_{n,N+1}=\left\{(a_1,\dots,a_{N+1})\in\mathbb{N}^{n+1},\sum_{k=1}^{N+1}ka_k=n\right\}$$
$$=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\left\{(a_1,\dots,a_N,i),(a_1,\dots,a_N)\in\mathbb{N}^N \text{ et } \sum_{k=1}^{N}ka_k=n-(N+1)i\right\}$$

Or pour $i\in\mathbb{N}$:

$$\operatorname{card}\left\{(a_1,\dots,a_N,i),(a_1,\dots,a_N)\in\mathbb{N}^N \text{ et } \sum_{k=1}^{N}ka_k=n-(N+1)i\right\}=\begin{cases}0 \text{ si } n-(N+1)i<0\\ p_{n-(N+1)i} \text{ sinon}\end{cases}$$

Ainsi : $p_{n,N+1}=\sum\limits_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ n-(N+1)i\geq 0}}p_{n-(N+1)i,N}=\sum\limits_{k=0}^{n}p_{k,N}a_{n-k,N+1}$ (on a posé $k=n-(N+1)i$: $k\in[\![0,n]\!]$ et le terme $p_{k,N}$ est neutralisé par $a_{n-k,N+1}$ lorsque $n-k$ n'est pas un multiple de $N+1$). Finalement on a bien $\prod\limits_{k=1}^{N+1}\frac{1}{1-z^k}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}p_{k,N+1}z^n$ et HR_{N+1} est vraie. CQFD.

19 – On a pour $x\in[0,1[$: $\sum\limits_{n=0}^{\ell}p_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\ell}p_{n,n}x^n$. Or on a vu que la suite $(p_{n,N})_{N\geq n}$ est constante, donc pour $n\leq\ell$ on a $p_{n,n}=p_{n,\ell}$ et $\sum\limits_{n=0}^{\ell}p_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\ell}p_{n,\ell}x^n$ et par positivité :

$$\sum_{n=0}^{\ell}p_nx^n\leq\sum_{n=0}^{+\infty}p_{n,\ell}x^n=\prod_{k=0}^{\ell}\frac{1}{1-x^k}$$

Or la suite $\left(\prod\limits_{k=0}^{\ell}\frac{1}{1-x^k}\right)_{\ell\in\mathbb{N}}$ est croissante, donc inférieure à sa limite $P(x)$ (question 5). On a donc : $\boxed{\sum\limits_{n=0}^{\ell}p_nx^n\leq P(x)}$. Par suite la série $\sum\limits_n p_nx^n$ converge pour $x\in[0,1[$ en tant que série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorée, et diverge grossièrement pour $x=1$ car $p_n\geq 1$. Donc : $\boxed{\text{le rayon de convergence de la série entière } \sum\limits_n p_nx^n \text{ est } 1}$.

20 – Soit $z\in D$ et $N\in\mathbb{N}^*$; il résulte du résultat ci-dessus que la série $\sum\limits_n p_nz^n$ converge, et la convergence de $\sum\limits_n p_{n,N}z^n$ a déjà été établie. On peut donc regarder $f_N(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}p_nz^n-\sum\limits_{n=0}^{+\infty}p_{n,N}z^n$. Or pour $n\leq N$ on a $p_{n,N}=p_n$, donc $f_N(z)=\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty}(p_n-p_{n,N})z^n$. Or par croissance, pour $n\geq N+1$: $0\leq p_{n,n}-p_{n,N}\leq p_{n,n}$, donc $|f_N(z)|\leq\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty}p_n|z|^n\xrightarrow[N\to+\infty]{}0$. Or $\lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}p_{n,N}z^n=P(z)$. On a donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}p_nz^n=f_N(z)+\sum_{n=0}^{+\infty}p_{n,N}z^n\xrightarrow[N\to+\infty]{}P(z)$$

Le membre de gauche ne dépend pas de N et ainsi : $\boxed{\sum\limits_{n=0}^{+\infty}p_nz^n=P(z)}$.

21 – Pour $t>0$ on a : $\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} P\left(\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\mathrm{d}\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} p_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-n)\theta-kt}\,\mathrm{d}\theta$.

Or $\left|p_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-n)\theta-kt}\right| = p_k \mathrm{e}^{-kt}$. Or $\mathrm{e}^{-t} \in [0,1[$ et on a vu que la série entière $\sum_k p_k x^k$ est de rayon 1. Donc la série numérique $\sum_k p_k \mathrm{e}^{-kt}$ converge et la série de fonctions (de la variable θ) $\sum_k p_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-n)\theta-kt}$ converge normalement sur le segment $[-\pi,\pi]$.

Donc $\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} P\left(\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\mathrm{d}\theta = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k \mathrm{e}^{-kt} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-n)\theta}\mathrm{d}\theta$. Or $\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-n)\theta}\mathrm{d}\theta = 0$ pour $k \neq n$ et $\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-n)\theta}\mathrm{d}\theta = 2\pi$ sinon. Il reste donc : $\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} P\left(\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\mathrm{d}\theta = 2\pi p_n \mathrm{e}^{-nt}$ et finalement :

$$\boxed{p_n = \frac{\mathrm{e}^{nt}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} P\left(\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{e}^{nt} P\left(\mathrm{e}^{-t}\right)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} P\left(\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}{P\left(\mathrm{e}^{-t}\right)}\mathrm{d}\theta}$$

Partie D

22 – On rappelle que pour $z \in D$ on a $\frac{1}{1-z} = \exp(L(z))$. Comme $x \in [0,1[$ on a $x \in D$ et $x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in D$, donc $1-x = \exp(-L(x))$ et $\frac{1}{1-x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \exp\left(L\left(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right)$.

Ainsi : $\frac{1-x}{1-x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \exp\left(L\left(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) - L(x)\right)$ et $\left|\frac{1-x}{1-x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\right| = \exp\left(\mathrm{Re}\left(L\left(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) - L(x)\right)\right)$.

Or $\mathrm{Re}\left(L\left(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \cos(n\theta)}{n}$ tandis que $\mathrm{Re}(L(x)) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$,

d'où : $\left|\frac{1-x}{1-x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\right| = \exp\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)-1}{n} x^n\right)$.

Or $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)-1}{n} x^n = x(\cos(\theta)-1) + \underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)-1}{n} x^n}_{\leq 0}$, d'où $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)-1}{n} x^n \leq \cos(\theta) - 1$ et

finalement : $\boxed{\left|\frac{1-x}{1-x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\right| \leq \exp((\cos(\theta)-1)x)}$.

Or pour $z \in D$ on a $P(x) = \lim_{N\to+\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-z^n}$, donc $\frac{P\left(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}{P(x)} = \lim_{N\to+\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{1-x^n}{1-x^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}$ puis par continuité du module : $\left|\frac{P\left(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}{P(x)}\right| = \lim_{N\to+\infty} \prod_{n=1}^{N} \left|\frac{1-x^n}{1-x^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}\right|$. Or avec le résultat ci-dessus :

$$\prod_{n=1}^{N} \left|\frac{1-x^n}{1-x^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}\right| \leq \exp\left(\sum_{n=1}^{N} (\cos(n\theta)-1) x^n\right)$$

Or $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x} - 1$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{in\theta} x^n = \dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}x} - 1$ d'où $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n\theta) x^n = \mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}x}\right) - 1$ et donc en passant à la limite, avec la continuité de l'exponentielle :

$$\boxed{\left|\frac{P\left(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}{P(x)}\right| \leq \exp\left(\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\right) - \frac{1}{1-x}\right)}.$$

23 – Toujours sous les hypothèses de l'énoncé on a :

$$\frac{1}{1-x} - \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\right) = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x\cos(\theta)}{1+x^2-2x\cos(\theta)} = \frac{x^2\left(1-\cos(\theta)\right) + x\left(1-\cos(\theta)\right)}{(1-x)\left(1+x^2-2x\cos(\theta)\right)}$$

Le dénominateur est positif car $1+x^2-2x\cos(\theta) = \left|1-x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right|^2$ et $x^2\left(1-\cos(\theta)\right) \geq 0$. On a donc bien en réarrangeant le dénominateur : $\boxed{\dfrac{1}{1-x} - \mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{1-x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\right) \geq \dfrac{x\left(1-\cos(\theta)\right)}{(1-x)\left((1-x)^2 + 2x\left(1-\cos(\theta)\right)\right)}}$

Il s'en suit que $\left|\dfrac{P\left(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}{P(x)}\right| \leq \exp\left(\dfrac{-x\left(1-\cos(\theta)\right)}{(1-x)\left((1-x)^2 + 2x\left(1-\cos(\theta)\right)\right)}\right)$.

On suppose désormais que $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$.

- 1[er] cas : si $(1-x)^2 \leq x\left(1-\cos(\theta)\right)$

  Alors $(1-x)^2 + 2x\left(1-\cos(\theta)\right) \leq 3x\left(1-\cos(\theta)\right)$ et sachant $\dfrac{-x\left(1-\cos(\theta)\right)}{1-x} \leq 0$ on en déduit $\left|\dfrac{P\left(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}{P(x)}\right| \leq \exp\left(\dfrac{-1}{3(1-x)}\right)$.

  Or

- 2[ième] cas : si $(1-x)^2 \geq x\left(1-\cos(\theta)\right)$

  Alors $(1-x)^2 + 2x\left(1-\cos(\theta)\right) \leq 3(1-x)^2$ et de même $\left|\dfrac{P\left(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}{P(x)}\right| \leq \exp\left(\dfrac{-x\left(1-\cos(\theta)\right)}{3(1-x)^3}\right)$

  Or $-x \leq -\dfrac{1}{2}$ ce qui permet de conclure : $\left|\dfrac{P\left(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}{P(x)}\right| \leq \exp\left(\dfrac{-\left(1-\cos(\theta)\right)}{6(1-x)^3}\right)$.

L'alternative de l'énoncé est donc bien établie.

24 – Regardons la fonction $f : \theta \mapsto \dfrac{1-\cos(\theta)}{\theta^2}$ prolongée par continuité en 0 en posant $f(0) = \dfrac{1}{2}$; alors f est continue sur le segment $[-\pi, \pi]$ et admet un minimum $\alpha = f(\theta_0)$ sur ce segment. Donc $\forall \theta \in [-\pi, \pi], f(\theta) \geq \alpha$. En outre pour $\theta \in [-\pi, \pi]$ et $\theta \neq 0$ on a $1-\cos(\theta) > 0$ et $f(\theta) > 0$ et par ailleurs $f(0) > 0$, donc $\alpha = f(\theta_0) > 0$ et finalement :

$$\boxed{\text{On a bien trouvé } \alpha > 0 \text{ tel que } \forall \theta \in [-\pi, \pi], 1-\cos(\theta) \geq \alpha\theta^2.}$$

Donc pour $\theta \in [-\pi, \pi]$ et $x \geq \dfrac{1}{2}$ on a en reprenant l'alternative précédente :

$$\left|\frac{P\left(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}{P(x)}\right| \leq \exp\left(\frac{-1}{3(1-x)}\right) \text{ ou } \left|\frac{P\left(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}{P(x)}\right| \leq \exp\left(\frac{-(1-\cos(\theta))}{6(1-x)^3}\right) \leq \exp\left(\frac{-\alpha\theta^2}{6(1-x)^3}\right)$$

Donc en particulier pour $t_0 = \ln(2)$ et $t \in \left]0, t_0\right]$ on a $\mathrm{e}^{-t} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$, donc l'alternative devient :

$$\left|\frac{P\left(\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}{P\left(\mathrm{e}^{-t}\right)}\right| \leq \exp\left(\frac{-1}{3\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)}\right) \text{ ou } \left|\frac{P\left(\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}{P\left(\mathrm{e}^{-t}\right)}\right| \leq \exp\left(\frac{-\alpha\theta^2}{6\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)^3}\right)$$

On rappelle que $\mathrm{e}^{-t} \geq 1-t$ et donc que $t \geq 1-\mathrm{e}^{-t} > 0$ donc :

$$\left|\frac{P\left(\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}{P\left(\mathrm{e}^{-t}\right)}\right| \leq \exp\left(\frac{-1}{3t}\right) \text{ ou } \left|\frac{P\left(\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}{P\left(\mathrm{e}^{-t}\right)}\right| \leq \exp\left(\frac{-\alpha\theta^2}{6t^3}\right)$$

- Dans le premier cas, on utilise que $\dfrac{|\theta|}{\pi} \leq 1$ pour écrire :

$$\left|\frac{P\left(\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}{P\left(\mathrm{e}^{-t}\right)}\right| \leq \exp\left(\frac{-|\theta|^{2/3}}{3\pi^{2/3}t}\right) = \mathrm{e}^{-\gamma\left(t^{-3/2}|\theta|\right)^{2/3}} \quad \text{avec } \gamma = \frac{1}{3\pi^{2/3}}$$

- Dans le second cas : $\left|\dfrac{P\left(\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}{P\left(\mathrm{e}^{-t}\right)}\right| \leq \exp\left(\dfrac{-\alpha\theta^2}{6t^3}\right) = \mathrm{e}^{-\beta\left(t^{-3/2}\theta\right)^2}$ avec $\beta = \dfrac{\alpha}{6}$

On a donc bien les inégalités voulues.

25 – On a ainsi l'inégalité toujours valide pour $0 < t < t_0$: $\left|\dfrac{P\left(\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}{P\left(\mathrm{e}^{-t}\right)}\right| \leq \mathrm{e}^{-\beta\left(t^{-3/2}\theta\right)^2} + \mathrm{e}^{-\gamma\left(t^{-3/2}|\theta|\right)^{2/3}}$.

De là : $\left|\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi^2\theta}{6t^2}} \frac{P\left(\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}{P\left(\mathrm{e}^{-t}\right)} \mathrm{d}\theta\right| \leq \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{P\left(\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}{P\left(\mathrm{e}^{-t}\right)}\right| \mathrm{d}\theta \leq \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left(\mathrm{e}^{-\beta\left(t^{-3/2}\theta\right)^2} + \mathrm{e}^{-\gamma\left(t^{-3/2}|\theta|\right)^{2/3}}\right) \mathrm{d}\theta$

On utilise la parité (pour se débarrasser de la valeur absolue) et on fait le changement de variable affine $x = t^{-3/2}\theta$:

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi^2\theta}{6t^2}} \frac{P\left(\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}{P\left(\mathrm{e}^{-t}\right)} \mathrm{d}\theta\right| \leq 2\int_{0}^{\pi} \left(\mathrm{e}^{-\beta\left(t^{-3/2}\theta\right)^2} + \mathrm{e}^{-\gamma\left(t^{-3/2}|\theta|\right)^{2/3}}\right) \mathrm{d}\theta = 2t^{3/2} \int_0^{\pi t^{3/2}} \left(\mathrm{e}^{-\beta x^2} + \mathrm{e}^{-\gamma x^{2/3}}\right) \mathrm{d}x$$

Par positivité de la fonction intégrée on a donc pour $0 < t < t_0$:

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi^2\theta}{6t^2}} \frac{P\left(\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}{P\left(\mathrm{e}^{-t}\right)} \mathrm{d}\theta\right| \leq 2t^{3/2} \int_0^{\pi t_0^{3/2}} \left(\mathrm{e}^{-\beta x^2} + \mathrm{e}^{-\gamma x^{2/3}}\right) \mathrm{d}x$$

L'intégrale résiduelle ne dépend plus de t et cette majoration montre donc :

$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi^2\theta}{6t^2}} \frac{P\left(\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}{P\left(\mathrm{e}^{-t}\right)} \mathrm{d}\theta \underset{t\to 0^+}{=} O\left(t^{3/2}\right)}.$$

26 – Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\pi}{\sqrt{6n}} = 0^+$ on a donc $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta n} \frac{P\left(\mathrm{e}^{-\pi/\sqrt{6n}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}{P\left(\mathrm{e}^{-\pi/\sqrt{6n}}\right)} \mathrm{d}\theta \underset{t\to 0^+}{=} O\left(\frac{1}{n^{3/4}}\right)$. Par ailleurs comme $\dfrac{\pi}{\sqrt{6n}} > 0$ on peut écrire (1) avec $t = \dfrac{\pi}{\sqrt{6n}}$ et on obtient :

$$p_n = \frac{\mathrm{e}^{\pi\sqrt{n}/\sqrt{6}} P\left(\mathrm{e}^{-\pi/\sqrt{6n}}\right)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} \frac{P\left(\mathrm{e}^{-\pi/\sqrt{6n}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}{P\left(\mathrm{e}^{-\pi/\sqrt{6n}}\right)} \mathrm{d}\theta \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{\pi\sqrt{n}/\sqrt{6}} P\left(\mathrm{e}^{-\pi/\sqrt{6n}}\right) O\left(\frac{1}{n^{3/4}}\right)$$

On utilise alors la question 16 : $P\left(\mathrm{e}^{-t}\right) \underset{t\to 0^+}{\sim} \mathrm{e}^{\pi^2/6t}\sqrt{t}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \underset{t\to 0^+}{=} O\left(\mathrm{e}^{\pi^2/6t}\sqrt{t}\right)$. Donc

$$P\left(\mathrm{e}^{-\pi/\sqrt{6n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\mathrm{e}^{\pi\sqrt{n}/\sqrt{6}} n^{-1/4}\right).$$

On regroupe tout : $p_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{\mathrm{e}^{2\pi\sqrt{n}/\sqrt{6}} n^{-1/4}}{n^{3/4}}\right) = O\left(\dfrac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)}{n}\right)$. CQFD.