Concours Commun Mines-Ponts 2022

Épreuve de mathématiques I

(corrigé)

A. Fonctions L et P

1. Multiplier par n le terme général d'une série entière ne change pas le rayon de convergence. On en déduit que la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$ est de même rayon de convergence que la série entière $\sum_{n\geqslant 1} z^n$, dont on sait qu'elle converge si et seulement si $|z| < 1$ (en tant que série géométrique de raison z). Par conséquent, la série $\sum_{n\geqslant 1} z^n$ est de rayon de convergence 1, et donc $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$ également ; en particulier, elle converge pour tout $z \in D$. On sait que si $z \in]-1,1[$, on a de plus :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} = -\ln(1-z). \tag{$*$}$$

2. On note que Φ est la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(tz)^n}{n}$ (selon la variable t, à $z \in D$ fixé). Or d'après la question précédente, elle converge pour tout $t \in \mathbf{R}$ tel que $|tz| < 1$, c'est-à-dire pour tout $t \in \mathbf{R}$ tel que : $|t| < \frac{1}{|z|}$, où l'on pose $\frac{1}{|z|} = +\infty$ si $z = 0$. On en déduit que cette série entière est de rayon de convergence au moins $\frac{1}{|z|}$, et sa somme Φ est de classe C^∞ et dérivable terme à terme sur $\left]-\frac{1}{|z|}, \frac{1}{|z|}\right[$. Comme $[-1,1] \subseteq \left]-\frac{1}{|z|}, \frac{1}{|z|}\right[$ (en effet, $|z| < 1$ implique : $1 < \frac{1}{|z|}$), on en déduit en particulier que Φ est dérivable sur $[-1,1]$. On a de plus :

$$\forall t \in [-1,1], \quad \Phi'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nt^{n-1}z^n}{n} = z\sum_{n=1}^{+\infty} (tz)^{n-1} = \frac{z}{1-tz}. \tag{$\dagger$}$$

3. L'application Ψ est dérivable en tant que produit de deux fonctions dérivables. Il y a tout de même une petite subtilité, du fait que dans le programme de PSI, la dérivabilité au sens complexe ne soit pas définie ; ainsi on ne peut pas directement dire que $t \mapsto e^{\Phi(t)}$ est dérivable sur $[0,1]$ en tant que composée de $t \mapsto L(tz)$ qui est à valeurs dans $\mathbf{C}$ et de l'exponentielle qui serait dérivable sur $\mathbf{C}$. J'explique à la fin de la résolution de cette question comment contourner cette difficulté (bêtement technique). Admettons provisoirement que $t \mapsto e^{\Phi(t)}$ soit dérivable, et de dérivée $t \mapsto \Phi'(t)e^{\Phi(t)}$. On a alors :

$$\forall t \in [0,1], \quad \Psi'(t) = -ze^{\Phi(t)} + (1-tz)\Phi'(t)e^{\Phi(t)} \overset{(\dagger)}{=} \left(-z + (1-tz) \times \frac{z}{1-tz}\right) e^{\Phi(t)} = 0.$$

Ainsi Ψ est de dérivée nulle sur l'intervalle $[0,1]$, donc Ψ est une application constante. On détermine la valeur de cette constante grâce à une évaluation en $t = 0$:

$$\Psi(0) = (1 - 0 \times z)e^{L(0\times z)} = e^{L(0)} \overset{(*)}{=} e^0 = 1.$$

Ainsi :

$$\forall t \in [0,1], \quad \Psi(t) = 1.$$

En particulier, pour $t = 1$, on a $\Psi(1) = 1$, c'est-à-dire, en remplaçant $\Psi(1)$ par son expression explicite :

$$(1-z)\exp(L(z)) = 1,$$

et donc :

$$\exp(L(z)) = \frac{1}{1-z},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Détaillons à présent comment justifier, en restant dans les clous du programme, que l'application $f : t \mapsto e^{\Phi(t)}$ est bien dérivable sur $[0,1]$, de dérivée $t \mapsto \Phi'(t)e^{\Phi(t)}$. Nous y parviendrons en étudiant la limite quand $h \to 0$ du taux d'accroissement de la fonction f entre t et $t+h$ (ou, cela reviendrait au même, en montrant que f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 ; la différence n'est que rédactionnelle). Soit $t \in [0,1]$. On a, pour tout $h \in \mathbf{R}$ non nul :

$$f(t+h) = \exp(\Phi(t+h)) = \exp\left(\Phi(t) + h\Phi'(t) + \underset{h\to 0}{o}(h)\right) = \exp(\Phi(t)) \times \exp\left(h\Phi'(t) + \underset{h\to 0}{o}(h)\right).$$

Pour abréger, posons $z(h) = h\Phi'(t) + \underset{h\to 0}{o}(h)$, de sorte qu'avec ces notations, pour tout h au voisinage de 0 on a : $f(t+h) = f(t)\exp(z(h))$. On remarque qu'on a $z(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $\frac{z(h)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \Phi'(t)$: c'est tout ce qu'il nous suffit de retenir pour la suite. On a, pour tout h au voisinage de 0 :

$$\exp(z(h)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z(h))^n}{n!} = 1 + z(h) + z(h)\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(z(h))^{n-1}}{n!}.$$

Notons $S(z) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{n!}$ pour tout $z \in \mathbf{C}$. C'est la somme d'une série entière de rayon de convergence infini (ce n'est que la série exponentielle, à peu de choses près), donc elle est continue sur $\mathbf{C}$ et en particulier en 0 (c'est là la clé de ce raisonnement : même si l'on n'a pas défini la dérivabilité au sens complexe en PSI, nous savons qu'une somme de série entière est continue sur son disque ouvert de convergence). Or pour tout h non nul au voisinage de 0 :

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = f(t)\frac{\exp(z(h)) - 1}{h} = f(t)\frac{z(h) + z(h)S(z(h))}{h} = f(t)\frac{z(h)}{h}\left(1 + S(z(h))\right).$$

Comme $z(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$, on a : $S(z(h)) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} S(0) = 0$, par continuité de S en 0. On sait aussi que $\frac{z(h)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \Phi'(t)$. Par conséquent, l'égalité ci-dessus implique :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = f(t)\Phi'(t)(1+0) = \Phi'(t)f(t),$$

ce qui démontre que $f : t \mapsto e^{\Phi(t)}$ est dérivable, et qu'on a :

$$f'(t) = \Phi'(t)f(t) = \Phi'(t)e^{\Phi(t)},$$

d'où le résultat admis ci-dessus.

4. Soit $z \in D$. on a $|z| \in [0,1[$, et donc d'après la question 1 :

$$|L(z)| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|z|^n}{n} \overset{(*)}{=} -\ln(1 - |z|),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Or, si $z \in D$, alors $z^n \in D$ pour tout $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, donc :

$$\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, \quad 0 \leqslant |L(z^n)| \leqslant -\ln(1 - |z^n|) = -\ln(1 - |z|^n). \tag{‡}$$

Montrons que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} -\ln(1 - |z|^n)$ converge. On a : $|z|^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, car $|z| < 1$, et donc :

$$-\ln(1 - |z|^n) \underset{n\to+\infty}{\sim} |z|^n > 0.$$

Or la série géométrique $\sum_{n\geqslant 1} |z|^n$ est de raison $|z| < 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} -\ln\left(1-|z|^n\right)$ converge également.
Toujours par comparaison, grâce à la majoration (‡), on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 1} L\left(z^n\right)$ converge absolument, donc converge, et ce pour tout $z \in D$: d'où le résultat.

5. L'exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbf{C}$, donc : $P(z) := \exp\left[\sum_{n=1}^{+\infty} L\left(z^n\right)\right] \neq 0$. De plus, pour tout entier $N \geqslant 1$ on a, d'après la question 3 :

$$\exp\left[\sum_{n=1}^{N} L\left(z^n\right)\right] = \prod_{n=1}^{N} \exp\left(L\left(z^n\right)\right) = \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-z^n}.$$

Quand $N \to +\infty$, le membre de gauche tend vers $P(z)$, par définition de P et continuité de l'exponentielle sur $\mathbf{C}$. Par conséquent :

$$P(z) = \lim_{N\to+\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-z^n}.$$

Toujours d'après l'égalité ci-dessus, pour tout $t > 0$ on a $e^{-t} \in]0,1[$, et donc :

$$\forall t > 0,\ \forall N \in \mathbf{N}\setminus\{0\}, \quad \exp\left[\sum_{n=1}^{N} L\left(e^{-nt}\right)\right] = \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-e^{-nt}}.$$

Chaque terme du produit ci-dessus est strictement positif, du fait que $e^{-nt} < 1$. On peut donc en considérer le logarithme :

$$\ln\left(\exp\left[\sum_{n=1}^{N} L\left(e^{-nt}\right)\right]\right) = \ln\left(\prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-e^{-nt}}\right) = -\sum_{n=1}^{N} \ln\left(1-e^{-nt}\right).$$

On a : $\lim_{N\to+\infty} \exp\left[\sum_{n=1}^{N} L\left(e^{-nt}\right)\right] = P\left(e^{-t}\right) > 0$. Par continuité du logarithme, le membre de gauche tend donc vers $\ln\left(P\left(e^{-t}\right)\right)$ quand $N \to +\infty$. On en déduit que le membre de droite de l'égalité ci-dessus a une limite finie quand $N \to +\infty$, et :

$$\ln\left(P\left(e^{-t}\right)\right) = \lim_{N\to+\infty} -\sum_{n=1}^{N} \ln\left(1-e^{-nt}\right) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1-e^{-nt}\right),$$

d'où le résultat.

B. Développement asymptotique en variable réelle

6. La fonction q est somme de fonctions continues par morceaux, donc elle est continue par morceaux sur $\mathbf{R}$. De plus la fonction partie entière vérifie : $\forall x \in \mathbf{R}$, $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$, donc :

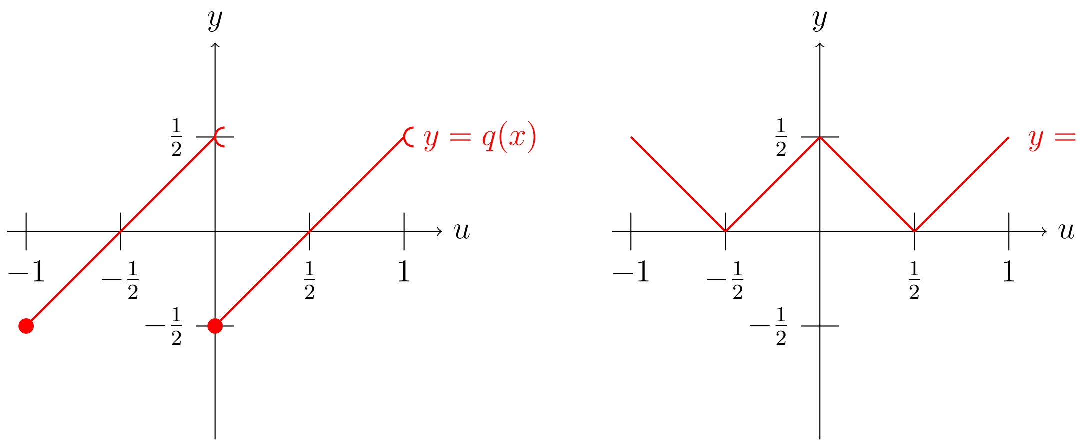
$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad q(x+1) = (x+1) - \lfloor x+1 \rfloor - \frac{1}{2} = x + 1 - \lfloor x \rfloor - 1 - \frac{1}{2} = x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2} = q(x),$$

donc q est 1-périodique. Il reste à montrer que la fonction $|q|$ est paire. Comme q est 1-périodique, il suffit de démontrer que $|q(x)| = |q(-x)|$ pour tout $x \in [0,1[$. Pour $x = 0$, il est évident que l'égalité est vraie, et on ne considère donc que $x \in]0,1[$.
Or, pour un tel x, on a plus simplement : $q(x) = x - \frac{1}{2}$, et : $q(-x) = -x - (-1) - \frac{1}{2} = -x + \frac{1}{2}$ (car : $-1 < -x < 0$). Afin de simplifier $|q(x)|$ et $|q(-x)|$, on traite deux cas :

— si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, alors $q(x) = x - \frac{1}{2} \leqslant 0$ et $q(-x) = -x + \frac{1}{2} \geqslant 0$, donc dans ce cas : $|q(x)| = -q(x) = -x + \frac{1}{2} = q(-x) = |q(-x)|$;

— si $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$, alors $q(x) = x - \frac{1}{2} \geqslant 0$ et $q(-x) = -x + \frac{1}{2} \leqslant 0$, donc dans ce cas : $|q(x)| = q(x) = x - \frac{1}{2} = -q(-x) = |q(-x)|$.

Dans tous les cas, on a $|q(x)| = |q(-x)|$, pour tout $x \in]0,1[$, et donc pour tout $x \in \mathbf{R}$ d'après la réduction expliquée ci-dessus. Ainsi $|q|$ est bien une fonction paire, ce qu'il fallait démontrer.



7. Soit $t > 0$. L'application $u \mapsto \left|\dfrac{q(u)}{e^{tu} - 1}\right|$ est continue (par morceaux) sur $[1, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas (la continuité de $|q|$ serait en principe à justifier, bien qu'on la voie sur le graphe ci-dessus, en étudiant la limite en 0 par valeurs supérieures et inférieures ; la périodicité assure alors la continuité en tous les autres points éventuellement problématiques). Étudions l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$.
On montre facilement qu'on a $|q(x)| \leqslant \frac{1}{2}$ pour tout $x \in [0,1]$, et donc pour tout $x \in \mathbf{R}$ par 1-périodicité. Par conséquent, pour tout $u \geqslant 1$ on a :

$$0 \leqslant \left|u^2 \frac{q(u)}{e^{tu} - 1}\right| \leqslant \frac{1}{2} \frac{u^2}{e^{tu} - 1} \underset{u \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

puisque : $\frac{u^2}{e^{tu}-1} \underset{u \to +\infty}{\sim} u^2 e^{-tu} \underset{u \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ (théorème des croissances comparées). On en déduit :

$$\left|\frac{q(u)}{e^{tu} - 1}\right| = \underset{u \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{u^2}\right).$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{e^{tu} - 1} \mathrm{d}u$ converge absolument, donc converge : d'où le résultat, pour tout $t > 0$.

8. Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$. On a, par la relation de Chasles, et après le changement de variable affine $t = u - k$:

$$\int_1^n \frac{q(u)}{u} \mathrm{d}u = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{q(u)}{u} \mathrm{d}u = \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^1 \frac{q(t+k)}{t+k} \mathrm{d}t.$$

Comme q est 1-périodique, on a $q(t+k) = q(t)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ et tout $k \in \mathbf{Z}$, donc :

$$\int_1^n \frac{q(u)}{u} \mathrm{d}u = \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^1 \frac{q(t)}{t+k} \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^1 \frac{t - \frac{1}{2}}{t+k} \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^1 \left(1 - \frac{k + \frac{1}{2}}{t+k}\right) \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \left(k + \frac{1}{2}\right) \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+k}\right).$$

Or : $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+k} = [\ln(t+k)]_0^1 = \ln(k+1) - \ln(k)$. Il apparaît presque un télescopage : attention à ne pas oublier le terme $k + \frac{1}{2}$ en facteur. Utilisons cette observation à profit, et faisons apparaître un « vrai » télescopage :

$$\begin{aligned}
\int_1^n \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u &= (n-1) - \sum_{k=1}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)(\ln(k+1)-\ln(k)) \\
&= (n-1) - \sum_{k=1}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)\ln(k+1) + \sum_{k=1}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)\ln(k) \\
&= (n-1) - \sum_{k=1}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)\ln(k+1) + \sum_{k=1}^{n-1}\left((k-1)+\frac{1}{2}\right)\ln(k) + \sum_{k=1}^{n-1}\ln(k) \\
&= (n-1) + \ln((n-1)!) - \sum_{k=1}^{n-1}\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\ln(k+1) - \left((k-1)+\frac{1}{2}\right)\ln(k)\right].
\end{aligned}$$

Cette dernière somme étant télescopique, on en déduit :

$$\begin{aligned}
\int_1^n \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u &= (n-1) + \ln((n-1)!) - \left(n-\frac{1}{2}\right)\ln(n) \\
&= (n-1) + \ln((n-1)! \times n) - \ln(n) - \left(n-\frac{1}{2}\right)\ln(n) \\
&= (n-1) + \ln(n!) - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n),
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. La seconde égalité de l'énoncé s'obtient en écrivant : $n = \ln(e^n)$, et : $\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n) = \ln\left(n^{n+\frac{1}{2}}\right) = \ln\left(n^n\sqrt{n}\right)$.

9. Soit x au voisinage de $+\infty$. On a :

$$0 \leqslant \left|\int_{\lfloor x\rfloor}^x \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u\right| \leqslant \int_{\lfloor x\rfloor}^x \frac{|q(u)|}{u}\mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{2}\int_{\lfloor x\rfloor}^x \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{\lfloor x\rfloor}\right).$$

Or on a : $x - 1 < \lfloor x\rfloor \leqslant x$, donc : $1 - \frac{1}{x} < \frac{\lfloor x\rfloor}{x} \leqslant 1$. Par le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\lfloor x\rfloor}{x} = 1$. Et donc, par continuité du logarithme : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{\lfloor x\rfloor}{x}\right) = \ln(1) = 0$. L'encadrement ci-dessus donne donc, par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{\lfloor x\rfloor}^x \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u = 0.$$

Voyons comment en déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u$ converge. D'abord, notons que la question précédente permet de démontrer que la suite $\left(\displaystyle\int_1^n \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u\right)_{n\geqslant 2}$ converge, puisque par la formule de Stirling :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi},$$

et donc, par continuité du logarithme :

$$\int_1^n \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u = \ln\left(\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}\right) - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1.$$

Alors, pour tout réel x au voisinage de $+\infty$, on se ramène au cas d'un paramètre entier avec la relation de Chasles :

$$\int_1^x \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u = \int_1^{\lfloor x\rfloor}\frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u + \int_{\lfloor x\rfloor}^x \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u.$$

Comme $\lfloor x \rfloor \in \mathbf{N}$ tend vers l'infini quand $x \to +\infty$, ce qui précède montre que, par composition de limites : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_1^{\lfloor x \rfloor} \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u = \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1$. La seconde intégrale a une limite nulle quand $x \to +\infty$ d'après la résolution en début de question. Alors, en tant que somme de quantités ayant une limite finie, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^{x} \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u = \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1 + 0.$$

Ceci démontre que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u$ converge, et on a :

$$\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u = \lim_{x\to+\infty} \int_1^{x} \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u = \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1.$$

10. Pour tout $u > 0$ on a $e^{-u} \in]0, 1[$, et donc, comme on l'a rappelé à la question 1 :

$$-\ln\left(1 - e^{-u}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nu}}{n}.$$

Nous allons en déduire l'égalité de l'énoncé *via* une intégration terme à terme, que nous allons justifier en vérifiant les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0\},\ \forall u \in]0, +\infty[, \quad f_n(u) = \frac{e^{-nu}}{n}.$$

Alors :

— pour tout $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, l'application f_n est continue par morceaux et intégrable sur $]0, +\infty[$ (c'est une fonction intégrable de référence) ;

— la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction continue par morceaux $u \mapsto -\ln\left(1 - e^{-u}\right)$ d'après l'égalité rappelée ci-dessus ;

— justifions que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge ; on a :

$$\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, \quad \int_0^{+\infty} |f_n| = \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} e^{-nu}\mathrm{d}u = \frac{1}{n}\left[\frac{e^{-nu}}{-n}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n^2},$$

et donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \int_0^{+\infty} |f_n| = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$: on en déduit qu'elle est convergente.

Toutes les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme étant vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $u \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(u) = -\ln(1 - e^{-u})$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ (et donc son opposée aussi), et d'autre part que cette somme peut s'intégrer terme à terme :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(u)\mathrm{d}u = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(u)\mathrm{d}u.$$

En reprenant les calculs ci-dessus, le membre de droite est égal à $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ (et donc à $\dfrac{\pi^2}{6}$ d'après le résultat rappelé en début d'énoncé), tandis que le membre de gauche donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} -\ln(1 - e^{-u})\mathrm{d}u$. Ainsi :

$$\int_0^{+\infty} -\ln\left(1 - e^{-u}\right)\mathrm{d}u = \frac{\pi^2}{6},$$

d'où le résultat demandé après multiplication par -1.

11. Suivant l'indication de l'énoncé, nous allons d'abord démontrer que l'application $g : x \mapsto \frac{1-e^{-x}}{x}$ est décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$. Elle est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, et on a :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \quad g'(x) = \frac{e^{-x}x - (1-e^{-x})}{x^2} = \frac{(1+x)e^{-x} - 1}{x^2}.$$

Or, d'après la formule de Taylor avec reste intégral, à l'ordre 1 en 0, on a :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad e^x = 1 + x + x^2 \int_0^1 \underbrace{(1-t)e^{tx}}_{\geqslant 0} \mathrm{d}t \geqslant 1 + x, \tag{**}$$

et donc : $\forall x \in \mathbf{R}_+^*$, $1 \geqslant (1+x)e^{-x}$, ce dont on déduit : $\forall x \in \mathbf{R}_+^*$, $g'(x) \leqslant 0$. Ainsi g est décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$, donc $\ln \circ g$ également (on a bien $g > 0$ sur $\mathbf{R}_+^*$, étant donné que $e^{-x} < 1$ pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, donc la composition avec le logarithme est bien définie). On en déduit :

$$\forall t \in]0,1], \ \forall u \in]0,1], \quad \ln(g(t)) \leqslant \ln\left(g(tu)\right) \leqslant \lim_0 \ln \circ g.$$

La limite du membre de droite existe bien (et est finie), puisque pour tout x au voisinage de 0 :

$$g(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1,$$

donc : $\lim\limits_0 \ln \circ g = \ln(1) = 0$. Ceci démontre en passant que la fonction $\ln \circ g$ se prolonge par continuité sur le segment $[0,1]$, et donc qu'elle est intégrable sur $]0,1]$. Intégrons l'inégalité ci-dessus sur $]0,1]$, pour obtenir :

$$\forall t \in]0,1], \quad \int_0^1 \ln(g(t))\mathrm{d}u \leqslant \int_0^1 \ln\left(g(tu)\right)\mathrm{d}u \leqslant \int_0^1 0\mathrm{d}u,$$

c'est-à-dire :

$$\forall t \in]0,1], \quad \ln(g(t)) \leqslant \int_0^1 \ln\left(g(tu)\right)\mathrm{d}u \leqslant 0.$$

Comme on l'a vu ci-dessus, on a : $\lim\limits_{t \to 0} \ln(g(t)) = 0$. Par conséquent, par le théorème des gendarmes, cet encadrement démontre qu'on a : $\lim\limits_{t \to 0^+} \int_0^1 \ln\left(g(tu)\right)\mathrm{d}u = 0$. On a donc démontré :

$$\lim_{t \to 0^+} \int_0^1 \ln\left(\frac{1-e^{-tu}}{tu}\right)\mathrm{d}u = 0.$$

Or :

$$\forall t > 0, \quad \int_0^1 \ln\left(\frac{1-e^{-tu}}{t}\right)\mathrm{d}u = \int_0^1 \ln\left(\frac{1-e^{-tu}}{tu}\right)\mathrm{d}u + \int_0^1 \ln(u)\mathrm{d}u,$$

donc : $\lim\limits_{t \to 0^+} \int_0^1 \ln\left(\frac{1-e^{-tu}}{t}\right)\mathrm{d}u = \int_0^1 \ln(u)\mathrm{d}u$, et il est très classique de démontrer, grâce à une intégration par parties, que : $\int_0^1 \ln(u)\mathrm{d}u = [u\ln(u) - u]_0^1 = -1$. En conclusion :

$$\lim_{t \to 0^+} \int_0^1 \ln\left(\frac{1-e^{-tu}}{t}\right)\mathrm{d}u = -1.$$

12. Soit $k \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. On note que u_k est une intégrale à paramètre. Montrons donc sa continuité sur $\mathbf{R}_+$ en utilisant le théorème de continuité sous le signe intégrale. Posons :

$$\forall (u,t) \in \left[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right] \times \mathbf{R}_+, \quad v_k(u,t) = \begin{cases} \dfrac{tq(u)}{e^{tu}-1} & \text{si } t > 0, \\ \dfrac{q(u)}{u} & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Alors :

— pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, l'application $u \mapsto v_k(u,t)$ est continue par morceaux sur $\left[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right]$ (en fait, comme on le voit d'après l'étude de la question 6, la fonction q est continue sur $\left[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right]$ quitte à éventuellement enlever une extrémité de l'intervalle ; l'extrémité à enlever dépendant de la parité de k ; il suffit alors de reconnaître en $u \mapsto v_k(u,t)$ un quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas) ;

— pour tout $u \in \left[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right]$, la continuité de l'application $t \mapsto v_k(u,t)$ est évidente sur $\mathbf{R}_+^*$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, et on vérifie qu'elle est continue en 0 également par un calcul de limite :

$$\frac{tq(u)}{e^{tu}-1} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{tq(u)}{tu} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{q(u)}{u} = v_k(u,0)\,;$$

donc $t \mapsto v_k(u,t)$ est continue sur $\mathbf{R}_+$;

— pour tout $(u,t) \in \left[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right] \times \mathbf{R}_+$, on a :

$$|v_k(u,t)| \leqslant \frac{|q(u)|}{u}\,; \qquad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION})$$

en effet, pour $t = 0$ c'est évident, et pour $t > 0$ on utilise $(**)$ (question précédente) pour obtenir :

$$\forall (u,t) \in \left[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right] \times \mathbf{R}_+^*, \quad \frac{e^{tu}-1}{tu} \geqslant 1,$$

et donc :

$$\forall (u,t) \in \left[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right] \times \mathbf{R}_+^*, \quad |v_k(u,t)| = \frac{|q(u)|}{u} \times \frac{tu}{e^{tu}-1} \leqslant \frac{|q(u)|}{u}.$$

L'application $\varphi : u \mapsto \dfrac{|q(u)|}{u}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $\left[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right]$ si $k > 0$, donc elle y est intégrable. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée.

On en déduit, par le théorème de continuité sous le signe intégrale, l'application $u_k : t \mapsto \displaystyle\int_{k/2}^{(k+1)/2} v_k(u,t)\mathrm{d}u$ est continue sur $\mathbf{R}_+$: d'où le résultat.

13. Soit $k \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. Comme $\frac{t}{e^{tu}-1} > 0$ pour tout $u \in \left[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right]$, le signe de l'intégrande de $u_k(t)$ ne dépend que du signe de q. Or l'expression de la fonction q montre que :

$$\forall x \in [0,1[\,, \quad \begin{cases} q(x) \leqslant 0 & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ q(x) \geqslant 0 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[. \end{cases}$$

Par 1-périodicité de q, on a donc :

$$\forall x \in \left]\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right[, \quad q(x) = \begin{cases} -|q(x)| \leqslant 0 & \text{si } k \text{ est pair,} \\ |q(x)| \geqslant 0 & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

J'exclus les bornes pour éviter les distinctions de cas fastidieuses, et inutiles (car l'intégrale ignore les valeurs en les points isolés : il ne coûte donc rien d'étudier son signe en excluant les extrémités de l'intervalle d'intégration).

On en déduit d'une part :

$$\forall x \in \left]\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right[, \quad q(x) = (-1)^{k+1}|q(x)|,$$

et d'autre part que, par croissance de l'intégrale : $u_k(t) \leqslant 0$ si k est pair, et $u_k(t) \geqslant 0$ si k est impair (on a en effet établi plus haut que le signe de l'intégrande est dicté par le signe de q). On a donc aussi, pour tenir compte de cette distinction de cas selon la parité de k :

$$u_k(t) = (-1)^{k+1}|u_k(t)|.$$

(On note une erreur d'énoncé concernant l'exposant de -1). La première égalité demandée est alors immédiate :

$$|u_k(t)| = (-1)^{k+1}u_k(t) = \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t(-1)^{k+1}q(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u = \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t|q(u)|}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u.$$

Tout ce qui précède démontre que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} u_k(t)$ est alternée : montrons qu'elle vérifie le critère spécial des séries alternées :

— pour tout entier $k \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}
|u_k(t)| - |u_{k+1}(t)| &= \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t|q(u)|}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u - \int_{(k+1)/2}^{(k+2)/2} \frac{t[q(u)|}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u \\
&= \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t|q(u)|}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u - \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t|q(k+1-v)|}{e^{t(k+1-v)}-1}\mathrm{d}v \qquad (v = k+1-u) \\
&= \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t|q(u)|}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u - \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t|q(v)|}{e^{t(k+1-v)}-1}\mathrm{d}v \qquad (|q| \text{ 1-pér. et paire}) \\
&= \int_{k/2}^{(k+1)/2} \underbrace{t|q(u)|}_{\geqslant 0} \underbrace{\left(\frac{1}{e^{tu}-1} - \frac{1}{e^{t(k+1-u)}-1}\right)}_{\geqslant 0}\mathrm{d}u \\
&\geqslant 0,
\end{aligned}$$

le signe du terme en facteur de $t|q(u)|$ découlant du fait que l'application $u \mapsto \frac{1}{e^{tu}-1}$ soit clairement décroissante (on a $u \leqslant k+1-u$ pour tout $u \in \left[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right]$) ; ceci montre que la suite $(|u_k(t)|)_{k\geqslant 1}$ est décroissante ;

— pour tout entier $k \geqslant 1$, on a :

$$0 \leqslant |u_k(t)| \leqslant \frac{1}{2}\int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t\mathrm{d}u}{e^{tu}-1} \overset{(**)}{\leqslant} \frac{1}{2}\int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ln(1)}{2} = 0,$$

donc par le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{k\to+\infty} |u_k(t)| = 0$.

Ainsi la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} u_k(t)$ est alternée, et la valeur absolue de son terme général décroît en convergeant vers 0. Par le théorème spécial des séries alternées, la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} u_k(t)$ converge (ce qu'en fait, on pouvait déjà déduire de la question 7), et son reste est majoré en valeur absolue par son premier terme :

$$\forall n \in \mathbf{N}\setminus\{0\}, \quad \left|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k(t)\right| \leqslant |u_n(t)| \leqslant \frac{1}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Or, en prenant le logarithme dans $(**)$, on a pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n},$$

donc :

$$\forall n \in \mathbf{N}\setminus\{0\}, \quad \left|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k(t)\right| \leqslant \frac{1}{2n},$$

d'où le résultat.

14. De la question précédente, il résulte que :

$$\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, \qquad \left\| \sum_{k=n}^{+\infty} u_k \right\|_\infty \leqslant \frac{1}{2n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui démontre que le reste de la série de fonctions $\sum_{k \geqslant 2} u_k$ converge uniformément sur $\mathbf{R}_+$ vers la fonction nulle, et donc la série de fonctions $\sum_{k \geqslant 2} u_k$ converge uniformément sur $\mathbf{R}_+$. En tant que limite uniforme de fonctions continues sur $\mathbf{R}_+$ (question 12), la somme $\sum_{k=2}^{+\infty} u_k$ est continue sur $\mathbf{R}_+$. La continuité sur $\mathbf{R}_+$ implique en particulier que, quand $t \to 0^+$, on a :

$$\lim_{t \to 0^+} \sum_{k=2}^{+\infty} u_k(t) = \sum_{k=2}^{+\infty} u_k(0).$$

Or, par la relation de Chasles :

$$\forall t \in \mathbf{R}_+^*, \quad \sum_{k=2}^{+\infty} u_k(t) = \sum_{k=2}^{+\infty} \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{tq(u)}{e^{tu} - 1} \mathrm{d}u = \int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu} - 1} \mathrm{d}u,$$

et, par le même argument :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} u_k(0) = \int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u} \mathrm{d}u.$$

Le calcul de limite ci-dessus se réécrit donc ainsi :

$$\lim_{t \to 0^+} \int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu} - 1} \mathrm{d}u = \int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u} \mathrm{d}u \overset{[q.9]}{=} \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1,$$

d'où le résultat.

15. Soit $t > 0$. En reprenant les arguments de la question 7, il est clair que les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{tu}{e^{tu} - 1} \mathrm{d}u$, $\int_1^{+\infty} \frac{t\lfloor u \rfloor}{e^{tu} - 1} \mathrm{d}u$ et $\int_1^{+\infty} \frac{t}{e^{tu} - 1} \mathrm{d}u$ convergent. Écrivons :

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu} - 1} \mathrm{d}u &= \int_1^{+\infty} \frac{tu}{e^{tu} - 1} \mathrm{d}u - \int_1^{+\infty} \frac{t\lfloor u \rfloor}{e^{tu} - 1} \mathrm{d}u - \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{t}{e^{tu} - 1} \mathrm{d}u \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{tu}{e^{tu} - 1} \mathrm{d}u - \sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{t\lfloor u \rfloor}{e^{tu} - 1} \mathrm{d}u - \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{t}{e^{tu} - 1} \mathrm{d}u \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{tu}{e^{tu} - 1} \mathrm{d}u - \sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{tk}{e^{tu} - 1} \mathrm{d}u - \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{t}{e^{tu} - 1} \mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Or une primitive de $u \mapsto \frac{t}{e^{tu} - 1} = \frac{te^{-tu}}{1 - e^{-tu}}$ est $u \mapsto \ln(1 - e^{-tu})$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu} - 1} \mathrm{d}u &= \int_1^{+\infty} \frac{tu}{e^{tu} - 1} \mathrm{d}u - \sum_{k=1}^{+\infty} k \int_k^{k+1} \left[\ln\left(1 - e^{-tu}\right) \right]_k^{k+1} - \frac{1}{2} \left[\ln\left(1 - e^{-tu}\right) \right]_1^{+\infty} \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{tu}{e^{tu} - 1} \mathrm{d}u - \sum_{k=1}^{+\infty} k \left[\ln\left(1 - e^{-t(k+1)}\right) - \ln\left(1 - e^{-tk}\right) \right] + \frac{1}{2} \ln\left(1 - e^{-t}\right).
\end{aligned}$$

Simplifions les deux premiers termes du membre de droite. Commençons par $\sum_{k=1}^{+\infty} k \left[\ln\left(1 - e^{-t(k+1)}\right) - \ln\left(1 - e^{-tk}\right) \right]$: pour obtenir $\ln(P(e^{-t}))$, il faudrait faire apparaître la somme $\sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tk}\right)$. Nous y parvenons ainsi ; posons pour abréger :

$$\forall k \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, \quad a_k = \ln\left(1-e^{-tk}\right),$$

de sorte que la somme à simplifier ci-dessus s'écrive : $\sum_{k=1}^{+\infty} k(a_{k+1}-a_k)$. On a alors, pour tout entier $N \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} k\left(a_{k+1}-a_k\right) = \sum_{k=1}^{N} k a_{k+1} - \sum_{k=1}^{N} k a_k = \sum_{k=2}^{N+1} (k-1) a_k - \sum_{k=1}^{N} k a_k &= -\sum_{k=2}^{N+1} a_k + N a_{N+1} - a_1 \\ &= -\sum_{k=1}^{N+1} a_k + N a_{N+1}.\end{aligned}$$

Les séries $\sum_{k\geqslant 1} k(a_{k+1}-a_k)$ et $\sum_{k\geqslant 1} a_k$ convergent : pour la première, cela découle du calcul d'intégrale plus haut, et pour la seconde on note que c'est la série dont la somme apparaît dans la question 5. Par conséquent, il est sensé de prendre la limite quand $N \to +\infty$ dans cette égalité, et on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(a_{k+1}-a_k\right) = -\sum_{k=1}^{+\infty} a_k + \lim_{N\to+\infty} N a_{N+1}.$$

(Nous avons implicitement effectué une transformation d'Abel.)

D'après la question 5, on a : $-\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \ln\left(P(e^{-t})\right)$, et de plus, pour N au voisinage de $+\infty$:

$$N a_{N+1} = N \ln\left(1-e^{-t(N+1)}\right) \underset{N\to+\infty}{\sim} N e^{-t(N+1)} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

par le théorème des croissances comparées. On a donc montré :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(a_{k+1}-a_k\right) = \ln\left(P\left(e^{-t}\right)\right),$$

et donc :

$$\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1} \mathrm{d}u = \int_1^{+\infty} \frac{tu}{e^{tu}-1} \mathrm{d}u - \ln\left(P\left(e^{-t}\right)\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1-e^{-t}\right).$$

Enfin, pour exprimer l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{tu}{e^{tu}-1} \mathrm{d}u$ en fonction de $\int_1^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tu}\right) \mathrm{d}u$ (l'intégrale qui figure dans l'identité de l'énoncé), nous allons effectuer une intégration par parties :

— en dérivant $u \mapsto u$, qui est de classe C^1 sur $[1, +\infty[$ et de dérivée $u \mapsto 1$;

— en intégrant $u \mapsto \frac{t}{e^{tu}-1}$, qui est continue sur $[1, +\infty[$ et dont une primitive est, on l'a vu, $u \mapsto \ln\left(1-e^{-tu}\right)$.

Puisque l'intégrale est généralisée, nous devons préalablement vérifier l'existence du terme $\left[u \ln\left(1-e^{-tu}\right)\right]_1^{+\infty}$. On a :

$$\lim_{u\to+\infty} u \ln\left(1-e^{-tu}\right) = 0,$$

par un calcul analogue à celui effectué plus haut avec $N a_{N+1}$. Il n'y a donc pas de problème d'existence. La formule de l'intégration par parties nous donne donc :

$$\int_1^{+\infty} \frac{tu}{e^{tu}-1} \mathrm{d}u = \left[u \ln\left(1-e^{-tu}\right)\right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tu}\right) \mathrm{d}u = -\ln\left(1-e^{-t}\right) - \int_1^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tu}\right) \mathrm{d}u.$$

On peut enfin conclure :

$$\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u = \left(-\ln\left(1-e^{-t}\right) - \int_1^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u\right) - \ln\left(P\left(e^{-t}\right)\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1-e^{-t}\right).$$

C'est-à-dire, après simplifications, le résultat voulu :

$$\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\ln\left(1-e^{-t}\right) - \ln\left(P\left(e^{-t}\right)\right) - \int_1^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u.$$

16. Soit $t>0$ au voisinage de 0. D'après la question précédente :

$$\ln\left(P\left(e^{-t}\right)\right) = -\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u - \frac{1}{2}\ln\left(1-e^{-t}\right) - \int_1^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u.$$

Étudions le comportement asymptotique de chaque terme quand $t \to 0^+$. Tout d'abord, on a :

$$\ln\left(1-e^{-t}\right) = \ln\left(t + \underset{t\to 0}{o}(t)\right) = \ln\left(t\left(1+\underset{t\to 0}{o}(1)\right)\right) = \ln(t) + \ln\left(1+\underset{t\to 0}{o}(1)\right).$$

Il découle deux choses de ce développement asymptotique. D'abord, du fait que le second terme tende vers $\ln(1)=0$ quand $t\to 0^+$, on a :

$$-\frac{1}{2}\ln\left(1-e^{-t}\right) = -\frac{\ln(t)}{2} + \underset{t\to 0}{o}(1).$$

D'autre part, on en déduit que : $-\ln\left(1-e^{-tu}\right) \underset{u\to 0}{\sim} -\ln(u) > 0$, et donc que les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_0^1 \ln(u)\mathrm{d}u$ sont de même nature (notons qu'on intègre bien une fonction continue sur $]0,1]$). Comme la seconde converge (c'est une intégrale de référence), on en déduit que la première converge aussi. On a alors :

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u &= \int_0^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u - \int_0^1 \ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u\\
&= \int_0^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u - \int_0^1 \ln\left(\frac{1-e^{-tu}}{t}\right)\mathrm{d}u - \int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}u\\
&= \int_0^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u - \int_0^1 \ln\left(\frac{1-e^{-tu}}{t}\right)\mathrm{d}u - \ln(t).\end{aligned}$$

La seconde intégrale a pour limite -1 quand $t\to 0^+$ d'après la question 11. Ensuite, on effectue le changement de variable $v = tu$ dans la première intégrale. Il est licite, car l'application $u \mapsto tu$ est de classe C^1 et strictement croissante de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$. On a $\mathrm{d}v = t\mathrm{d}u$, et donc :

$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u = \frac{1}{t}\int_0^{+\infty} \ln\left(1-e^{-v}\right)\mathrm{d}v \overset{(q.10)}{=} -\frac{\pi^2}{6t}.$$

Ainsi :

$$\int_1^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u = -\frac{\pi^2}{6t} + 1 - \ln(t) + \underset{t\to 0}{o}(1).$$

Si l'on compile tout ce qu'on a démontré jusqu'à présent dans cette question, on a :

$$\begin{aligned}\ln\left(P\left(e^{-t}\right)\right) &= -\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u - \frac{\ln(t)}{2} - \left(-\frac{\pi^2}{6t} + 1 - \ln(t)\right) + \underset{t\to 0}{o}(1)\\
&= -\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u + \frac{\ln(t)}{2} + \frac{\pi^2}{6t} - 1 + \underset{t\to 0}{o}(1).\end{aligned}$$

Or, d'après la question 14, on a : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u = \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1 + \underset{t\to 0}{o}(1)$. On a donc, en conclusion :

$$\ln\left(P\left(e^{-t}\right)\right) = \frac{\pi^2}{6t} + \frac{\ln(t)}{2} - \frac{\ln(2\pi)}{2} + \underset{t\to 0^+}{o}(1).$$

C. Développement de P en série entière

17. Soit $N \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. Tout d'abord, $P_{n,N}$ est non vide, puisque $(n, 0, \ldots, 0) \in P_{n,N}$. Justifions que $P_{n,N}$ est inclus dans $[\![0, n]\!]^N$: soit $(a_1, \ldots, a_N) \in P_{n,N}$. Alors :

$$\forall \ell \in [\![1, N]\!], \quad n = \sum_{k=1}^{n} k a_k = \ell a_\ell + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \ell}}^{N} \underbrace{k a_k}_{\geqslant 0} \geqslant \ell a_\ell \geqslant a_\ell.$$

On a montré que $a_\ell \leqslant n$ pour tout $\ell \in [\![1, N]\!]$, et par hypothèse on a déjà $a_\ell \geqslant 0$, donc : $(a_1, \ldots, a_N) \in [\![0, n]\!]^N$. Ceci vaut pour tout $(a_1, \ldots, a_N) \in P_{n,N}$, d'où l'inclusion demandée.
Ceci montre que l'ensemble $P_{n,N}$ est fini, et donc que son cardinal $p_{n,N} \in \mathbf{N}$ est bien défini. On a $p_{n,N} \geqslant 1$ pour tout $(n, N) \in \mathbf{N} \times (\mathbf{N} \setminus \{0\})$ car $P_{n,N} \neq \emptyset$.
Montrons que la suite $(p_{n,N})_{N \geqslant 1}$ est croissante ; pour cela, il suffit de montrer qu'il existe une injection de $P_{n,N}$ dans $P_{n,N+1}$ pour tout $N \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ (en effet, une application injective ne peut être à valeurs que dans un ensemble plus grand que celui de départ). Il suffit de prendre l'application :

$$\Phi_{n,N} : \left\{ \begin{array}{rcl} P_{n,N} & \longrightarrow & P_{n,N+1} \\ (a_1, \ldots, a_N) & \longmapsto & (a_1, \ldots, a_N, 0), \end{array} \right.$$

clairement à valeurs dans $P_{n,N+1}$ (si $\sum\limits_{k=1}^{N} k a_k = n$, alors $(N+1) \times 0 + \sum\limits_{k=1}^{N} k a_k = n$ également) et injective : si $(a_1, \ldots, a_N) \in P_{n,N}$ et $(b_1, \ldots, b_N) \in P_{n,N}$ vérifient : $\Phi_{n,N}((a_1, \ldots, a_N)) = \Phi_{n,N}((b_1, \ldots, b_N))$, alors l'identification coordonnée par coordonnée donne : $(a_1, \ldots, a_N) = (b_1, \ldots, b_N)$, d'où l'injectivité.
Puisqu'il existe une application injective de $P_{n,N}$ dans $P_{n,N+1}$, on a : $\operatorname{card}(P_{n,N}) \leqslant \operatorname{card}(P_{n,N+1})$. C'est-à-dire : $p_{n,N} \leqslant p_{n,N+1}$. Ceci vaut pour tout $N \geqslant 1$, donc la suite $(p_{n,N})_{N \geqslant 1}$ est croissante.
Il reste à justifier qu'elle est constante à partir du rang $n_0 = \max(n, 1)$: si $n = 0$, alors on a clairement $p_{0,N} = 1$ pour tout $N \geqslant 1 = \max(n, 1)$, vu que l'égalité $0 = \sum\limits_{k=1}^{N} k a_k$ impose : $\forall k \in [\![1, N]\!]$, $a_k = 0$ (une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chaque terme est nul), de sorte que le N-uplet $(0, \ldots, 0)$ soit le seul à convenir pour tout $N \geqslant 1$. Supposons à présent $n \geqslant 1$. Montrons :

$$\forall N \geqslant \max(n, 1), \quad p_{n,N} = p_{n,N+1}.$$

Pour cela, il suffit de démontrer que l'application $\Phi_{n,N}$ ci-dessus, en plus d'être injective, est surjective : cela assure que c'est une bijection, et une bijection conserve les cardinaux. Soit, donc, $(b_1, \ldots, b_N, b_{N+1}) \in P_{n,N+1}$, et construisons un antécédent par $\Phi_{n,N}$ de cet élément. Notons d'abord que le dernier coefficient b_{N+1} est nul. On a en effet, comme $(b_1, \ldots, b_N, b_{N+1}) \in P_{n,N+1}$:

$$n = \sum_{k=1}^{N+1} k b_k = (N+1) b_{N+1} + \sum_{k=1}^{N} k b_k.$$

Or $N + 1 \geqslant \max(n, 1) + 1 \geqslant n + 1 > n$. Par conséquent, si $b_{N+1} \neq 0$, alors $b_{N+1} \geqslant 1$ (c'est un entier naturel), et donc on aurait :

$$n = (N+1) b_{N+1} + \sum_{k=1}^{N} \underbrace{k b_k}_{\geqslant 0} \geqslant (N+1) b_{N+1} \geqslant N + 1 > n.$$

C'est absurde : on ne peut pas avoir $n > n$. Par l'absurde, on a montré : $b_{N+1} = 0$, et par ailleurs l'égalité ci-dessus devient : $n = \sum\limits_{k=1}^{N} k b_k$, ce qui démontre qu'on a : $(b_1, \ldots, b_N) \in P_{n,N}$. En résumé, on a montré :

$$(b_1, \ldots, b_N, b_{N+1}) = (b_1, \ldots, b_N, 0) = \Phi_{n,N}((b_1, \ldots, b_N))$$

avec $(b_1, \ldots, b_N) \in P_{n,N}$, donc tout élément de $P_{n,N+1}$ admet un antécédent par $\Phi_{n,N}$, ce qui démontre sa surjectivité (si $N \geqslant \max(n,1)$).
Étant une application surjective et injective, c'est une bijection, et une bijection est nécessairement entre deux ensembles de même cardinal. On en déduit : $\forall N \geqslant \max(n,1)$, $p_{n,N} = p_{n,N+1}$, ce qu'il fallait démontrer.

18. Soit $z \in D$. On a alors $|z^N| < 1$, et donc :

$$\frac{1}{1-z^N} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(z^N\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{kN}.$$

On en déduit que si l'on pose :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad a_{n,N} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ divise } N, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,N} z^n = \sum_{\substack{n=0 \\ N|n}}^{+\infty} z^n \overset{[n=kN]}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} z^{kN} = \frac{1}{1-z^N}.$$

Déduisons-en la formule :

$$\forall N \in \mathbf{N}^*, \ \forall z \in D, \quad \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-z^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n.$$

par récurrence sur $N \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$.
Initialisons. Si $N = 1$, alors pour tout $z \in D$ on a : $\displaystyle\prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-z^k} = \frac{1}{1-z}$, tandis que l'on a :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad p_{n,1} = 1.$$

En effet, calculer $p_{n,1}$ revient à calculer le nombre d'entiers a_1 tels que : $1 \times a_1 = n$. Il n'y en a qu'un seul : c'est n. On a alors :

$$\forall z \in D, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,1} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z},$$

ce qui prouve que le résultat voulu est vrai pour $N = 1$.
À présent, soit $N \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, et supposons qu'on a :

$$\forall z \in D, \quad \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-z^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n.$$

Alors :

$$\prod_{k=1}^{N+1} \frac{1}{1-z^k} = \frac{1}{1-z^{N+1}} \times \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-z^k} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,N+1} z^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n\right).$$

Nous avons le produit de deux sommes de séries entières : cela incite à faire un produit de Cauchy. On a clairement : $\forall n \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant a_{n,N+1} \leqslant 1$, donc la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} a_{n,N+1} z^n$ est de rayon de convergence supérieur à celui de $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} z^n$: le rayon de convergence est donc supérieur ou égal à 1.

De plus, d'après la question précédente, on a : $\forall n \in \mathbf{N}$, $p_{n,N} \leqslant \operatorname{card}\left(\llbracket 0, n \rrbracket^N\right) = (n+1)^N$, et on montre facilement que la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} (n+1)^N z^n$ est de rayon de convergence 1. Un argument parmi d'autres : si $\rho \in \mathbf{R}_+$, alors la suite $\left((n+1)^N \rho^n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0 si $\rho < 1$ par croissances comparées, et est donc bornée ; si $\rho \geqslant 1$ alors $(n+1)^N \rho^n \geqslant (n+1)^N \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc la suite n'est pas bornée ; le rayon de convergence est donc $\sup([0,1[) = 1$. Toujours par le théorème de comparaison des séries entières, la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} p_{n,N} z^n$ est de rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

On en déduit que le produit de Cauchy $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n z^n$ de ces deux séries entières est aussi de rayon de convergence supérieur ou égal à 1, et on a :

$$\forall z \in D, \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,N+1} z^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n,$$

avec :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{k,N+1} \cdot p_{n-k,N} = \sum_{\substack{k=0\\ N+1|k}}^{n} p_{n-k,N} = \sum_{0\leqslant \ell \leqslant \frac{n}{N+1}} p_{n-\ell(N+1),N}.$$

Il reste à démontrer que cette somme est égale à $p_{n,N+1}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Soit $n \in \mathbf{N}$. Pour le montrer, on note qu'on peut fabriquer un $(N+1)$-uplet $(a_1, \dots, a_{N+1})$ tel que $n = \sum\limits_{n=1}^{N+1} k a_k$ ainsi :

— on choisit un entier $\ell \in \mathbf{N}$ tel que : $(N+1)\ell \leqslant n$;

— on choisit un N-uplet $(a_1, \dots, a_N)$ d'entiers naturels tel que : $\sum\limits_{k=1}^{N} k a_k = n - \ell(N+1)$ (il y a $p_{n-\ell(N+1),N}$ possibilités) ;

— on complète ce N-uplet en un $(N+1)$-uplet vérifiant : $\sum\limits_{k=1}^{N+1} k a_k = n$, ce qui ne peut se faire que d'une seule façon, en posant $a_{N+1} = \ell$ (puisque en effet $\sum\limits_{k=1}^{N+1} k a_k = n$ équivaut, par propriété de $(a_1, \dots, a_N)$, à : $(N+1)a_{N+1} = n - \sum\limits_{k=1}^{N} k a_k = \ell(N+1)$).

On obtient ainsi tous les $(N+1)$-uplets possibles de $P_{n,N+1}$, puisque réciproquement, si $(a_1, \dots, a_{N+1}) \in P_{n,N+1}$, alors :

$$\sum_{k=1}^{N} k a_k = \sum_{k=1}^{N+1} k a_k - (N+1)a_{N+1} = n - (N+1)a_{N+1} = n - (N+1)\ell,$$

avec $\ell = a_{N+1} \leqslant \frac{n}{N+1}$ (on utilise la majoration déjà apparue dans la question précédente : $\forall k \in [\![1, N+1]\!]$, $k a_k \leqslant n$). Ainsi on obtient les $p_{n,N+1}$ éléments de $P_{n,N+1}$ par ce décompte.

Ces choix étant incompatibles deux à deux, on a par principe additif :

$$p_{n,N+1} = \sum_{0\leqslant \ell \leqslant \frac{n}{N+1}} p_{n-\ell(N+1),N} = c_n.$$

On a donc bien :

$$\forall z \in D, \quad \prod_{k=1}^{N+1} \frac{1}{1-z^k} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,N+1} z^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N+1} z^n,$$

d'où le résultat au rang $N+1$, ce qui clôt l'hérédité.

Par principe de récurrence, on a donc, pour tout $N \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$: $\forall z \in D$, $\prod\limits_{k=1}^{N} \frac{1}{1-z^k} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n$.

19. Soit $N \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. Comme la série $\sum_{n \geqslant 0} p_{n,N} x^n$ est à termes positifs (on a en effet pris $x \in [0,1[$), on a :

$$\sum_{n=0}^{\ell} p_{n,N} x^n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} x^n \overset{(q.18)}{=} \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-x^k}.$$

On en déduit, quand $N \to +\infty$, d'après la question 5 :

$$\sum_{n=0}^{\ell} p_n x^n \leqslant P(x).$$

Or la série $\sum_{n \geqslant 0} p_n x^n$ est à termes positifs et majorée (par $P(x)$) : elle est donc convergente. Ceci vaut pour tout $x \in [0,1[$, donc le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} p_n x^n$ vérifie : $R \geqslant 1$.

Étudions la nature de la série pour $x = 1$: on a $p_n \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ d'après la question 17 (ceci découle du fait que $P_{n,N} \neq \emptyset$ pour tous $n \in \mathbf{N}$ et $N \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$), de sorte que $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ne puisse pas converger vers 0, et la série $\sum_{n \geqslant 0} p_n$ diverge grossièrement. On en déduit : $R \leqslant 1$.

Puisque $R \geqslant 1$ et $R \leqslant 1$, on conclut : $R = 1$.

20. Soit $N \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. On rappelle que d'après la question 17, on a $p_n = p_{n,N}$ pour tout $N \geqslant \max(n,1)$. Donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n &= \sum_{n=0}^{N} p_n z^n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} p_n z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n \\
&= \sum_{n=0}^{N} p_{n,N} z^n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} p_n z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n \\
&= \sum_{n=N+1}^{+\infty} p_n z^n - \sum_{n=N+1}^{+\infty} p_{n,N} z^n \\
&= \sum_{n=N+1}^{+\infty} (p_n - p_{n,N}) z^n.
\end{aligned}$$

On a donc, d'après l'inégalité triangulaire, et du fait que $p_n \geqslant p_{n,N}$ et $p_{n,N} \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$0 \leqslant \left| \sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n \right| \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} |p_n - p_{n,N}| \cdot |z|^n = \sum_{n=N+1}^{+\infty} (p_n - p_{n,N}) |z|^n \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} p_n |z|^n.$$

Comme $|z| < 1$, d'après la question précédente la série $\sum_{n \geqslant 0} p_n |z|^n$ converge, donc son reste converge vers 0. On en déduit :

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=N+1}^{+\infty} p_n |z|^n = 0.$$

Et donc, par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n.$$

Mais on a aussi :

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n \overset{(q.18)}{=} \lim_{N \to +\infty} \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-z^k} \overset{(q.5)}{=} P(z).$$

Donc, par unicité de la limite :

$$P(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n.$$

21. Soit $t > 0$, et soit $\theta \in [-\pi, \pi]$. On a $|e^{-t+i\theta}| = e^{-t} < 1$, donc d'après la question précédente :

$$e^{-in\theta} P\left(e^{-t+i\theta}\right) = e^{-in\theta} \sum_{k=0}^{+\infty} p_k \left(e^{-t+i\theta}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k e^{-tk} e^{i\theta(k-n)}.$$

Nous allons en déduire :

$$2\pi p_n e^{-nt} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} P\left(e^{-t+i\theta}\right) \mathrm{d}\theta$$

grâce au théorème d'intégration terme à terme sur un segment, dont nous vérifions les hypothèses. Posons :

$$\forall k \in \mathbf{N},\ \forall \theta \in [-\pi, \pi], \quad f_k(\theta) = p_k e^{-tk} e^{i\theta(k-n)}.$$

— pour tout $k \in \mathbf{N}$, l'application f_k est clairement continue (par morceaux) sur $[-\pi, \pi]$, par composition et continuité de l'exponentielle sur $\mathbf{C}$;

— pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $\theta \in [-\pi, \pi]$, on a : $|f_k(\theta)| = |p_k| e^{-tk} = p_k e^{-tk}$; on en déduit :

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad \|f_k\|_\infty = p_k e^{-tk},$$

or $|e^{-t}| < 1$ car $t > 0$, et la série entière $\sum_{k \geqslant 0} p_k z^k$ est de rayon de convergence 1, donc la série $\sum_{k \geqslant 0} \|f_k\|_\infty = \sum_{k \geqslant 0} p_k (e^{-t})^k$ converge ; on a donc démontré que la série de fonctions $\sum_{k \geqslant 0} f_k$ converge normalement, donc uniformément, sur le segment $[-\pi, \pi]$, et de plus sa somme est continue (par morceaux) sur $[-\pi, \pi]$, puisqu'il s'agit d'une limite uniforme d'une série de fonctions continues.

D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, d'une part la série $\sum_{k \geqslant 0} \int_{-\pi}^{\pi} f_k(\theta) \mathrm{d}\theta$ converge, et d'autre part :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(\theta) \mathrm{d}\theta = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f_k(\theta) \mathrm{d}\theta.$$

Or, d'après les calculs effectués au début de la question :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(\theta) \mathrm{d}\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} p_k e^{-tk} e^{i\theta(k-n)} \mathrm{d}\theta = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} P\left(e^{-t+i\theta}\right) \mathrm{d}\theta,$$

et d'autre part :

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f_k(\theta) \mathrm{d}\theta = p_k e^{-tk} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta(k-n)} \mathrm{d}\theta = \begin{cases} p_k e^{-tk} \left[\frac{e^{i\theta(k-n)}}{k-n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0 & \text{si } k \neq n, \\ p_n e^{-tn} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta = 2\pi p_n e^{-tn} & \text{si } k = n, \end{cases}$$

étant donné que : $e^{i\pi(k-n)} - e^{-i\pi(k-n)} = (-1)^{k-n} - (-1)^{k-n} = 0$ (pour le cas $k \neq n$). Donc :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f_k(\theta) \mathrm{d}\theta = \int_{-\pi}^{\pi} f_n(\theta) \mathrm{d}\theta + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{+\infty} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f_k(\theta) \mathrm{d}\theta}_{=0} = 2\pi p_n e^{-tn}.$$

En conclusion, l'intégration terme à terme ci-dessus s'écrit plus simplement ainsi :

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} P\left(e^{-t+i\theta}\right) \mathrm{d}\theta = 2\pi p_n e^{-tn}.$$

Cela donne le résultat voulu, en isolant p_n :

$$p_n = \frac{e^{tn}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} P\left(e^{-t+i\theta}\right) \mathrm{d}\theta = \frac{e^{tn} P\left(e^{-t}\right)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} \frac{P\left(e^{-t+i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)} \mathrm{d}\theta. \tag{1}$$

Remarque. On a démontré la formule intégrale de Cauchy dans un cas particulier.

D. Contrôle de P

22. D'après la question 3, on a :

$$\left|\frac{1-x}{1-xe^{i\theta}}\right| = \left|\exp\left(L(xe^{i\theta}) - L(x)\right)\right| = \exp\left(\mathrm{Re}\left(L(xe^{i\theta}) - L(x)\right)\right).$$

On a utilisé l'égalité suivante, valable pour tout $\omega \in \mathbf{C}$: $|e^{\omega}| = e^{\mathrm{Re}(\omega)}$, et qui se démontre ainsi :

$$\forall \omega \in \mathbf{C}, \quad |e^{\omega}| = \sqrt{e^{\omega}\overline{e^{\omega}}} = \sqrt{e^{\omega}e^{\bar{\omega}}} = \sqrt{e^{\omega+\bar{\omega}}} = \sqrt{e^{2\mathrm{Re}(\omega)}} = e^{\mathrm{Re}(\omega)}.$$

Or :

$$\mathrm{Re}\,(L(x)) = L(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}, \quad \text{et : } \mathrm{Re}\left(L\left(xe^{i\theta}\right)\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n e^{in\theta}}{n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \cos(n\theta)}{n},$$

donc :

$$\begin{aligned}\left|\frac{1-x}{1-xe^{i\theta}}\right| = \exp\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n(\cos(n\theta)-1)}{n}\right) &= \exp\left(-(1-\cos(\theta))x - \sum_{n=2}^{+\infty}(1-\cos(n\theta))\frac{x^n}{n}\right) \\ &= \exp\left(-(1-\cos(\theta))x\right)\exp\left(-\sum_{n=2}^{+\infty}(1-\cos(n\theta))\frac{x^n}{n}\right),\end{aligned}$$

et comme : $\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0,1\}$, $1-\cos(n\theta) \geqslant 0$, la seconde somme ne fait intervenir que des quantités positives, donc :

$$-\sum_{n=2}^{+\infty}(1-\cos(n\theta))\frac{x^n}{n} \leqslant 0.$$

On en déduit :

$$\exp\left(-\sum_{n=2}^{+\infty}(1-\cos(n\theta))\frac{x^n}{n}\right) \leqslant 1,$$

si bien que l'égalité ci-dessus implique :

$$\left|\frac{1-x}{1-xe^{i\theta}}\right| \leqslant \exp\left(-(1-\cos(\theta))x\right),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Pour majorer $\left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right|$, on note que par la question 5 :

$$\left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right| = \lim_{N\to+\infty}\left|\prod_{n=1}^{N} \frac{1-x^n}{1-x^n e^{in\theta}}\right|.$$

Or, par ce qui précède (qu'on peut bien appliquer avec x^n au lieu de x, vu que $x^n \in [0,1[$ pour tout $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ si $x \in [0,1[$), pour tout entier $N \geqslant 1$ on a :

$$\begin{aligned}\left|\prod_{n=1}^{N} \frac{1-x^n}{1-x^n e^{in\theta}}\right| = \prod_{n=1}^{N}\left|\frac{1-x^n}{1-x^n e^{in\theta}}\right| &\leqslant \prod_{n=1}^{N} \exp\left(-(1-\cos(n\theta))x^n\right) \\ &= \exp\left(-\sum_{n=1}^{N}(1-\cos(n\theta))x^n\right) \\ &= \exp\left(-\sum_{n=1}^{N} x^n + \sum_{n=1}^{N}\cos(n\theta)x^n\right).\end{aligned}$$

Or :
$$\sum_{n=1}^{N} x^n = \frac{1-x^N}{1-x} - 1 \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-x} - 1,$$
et :
$$\sum_{n=1}^{N} \cos(n\theta)x^n = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{N} e^{in\theta}x^n\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{N} \left(xe^{i\theta}\right)^n\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1-\left(xe^{i\theta}\right)^N}{1-xe^{i\theta}} - 1\right).$$
On a $\left(xe^{i\theta}\right)^N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car : $\left|xe^{i\theta}\right| = x < 1$. Donc :
$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \cos(n\theta)x^n = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}} - 1\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right) - 1.$$
Par conséquent, quand $N \to +\infty$, la majoration du produit ci-dessus donne :
$$\left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right| = \lim_{N\to+\infty}\left|\prod_{n=1}^{N} \frac{1-x^n}{1-x^n e^{in\theta}}\right| \leqslant \exp\left(-\frac{1}{1-x} + 1 + \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right) - 1\right),$$
c'est-à-dire :
$$\left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right| \leqslant \exp\left(-\frac{1}{1-x} + \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right)\right),$$
ce qu'il fallait démontrer.

23. On a :
$$\frac{1}{1-xe^{i\theta}} = \frac{1-xe^{-i\theta}}{|1-xe^{i\theta}|^2} = \frac{1-x\cos(\theta)+ix\sin(\theta)}{|1-xe^{i\theta}|^2},$$
donc :
$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right) = \frac{1-x\cos(\theta)}{|1-xe^{i\theta}|^2}.$$
Or :
$$\begin{aligned}\left|1-xe^{i\theta}\right|^2 = (1-xe^{i\theta})(1-xe^{-i\theta}) &= 1 - x\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right) + \left|xe^{i\theta}\right|^2 \\ &= 1-2x\cos(\theta)+x^2 \\ &= 1-2x+x^2+2x(1-\cos(\theta)) \\ &= (1-x)^2+2x(1-\cos(\theta)),\end{aligned}$$
donc :
$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right) = \frac{1-x\cos(\theta)}{(1-x)^2+2x(1-\cos(\theta))}.$$
On en déduit :
$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} - \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right) &= \frac{((1-x)^2+2x(1-\cos(\theta))) - (1-x)\left(1-x\cos(\theta)\right)}{(1-x)\left((1-x)^2+2x(1-\cos(\theta))\right)} \\ &= \frac{2x(1-\cos(\theta)) + (1-x)((1-x)-(1-x\cos(\theta))}{(1-x)\left((1-x)^2+2x(1-\cos(\theta))\right)} \\ &= \frac{2x(1-\cos(\theta)) - x(1-x)(1-\cos(\theta))}{(1-x)\left((1-x)^2+2x(1-\cos(\theta))\right)} \\ &= \frac{x(1-\cos(\theta))(2-(1-x))}{(1-x)\left((1-x)^2+2x(1-\cos(\theta))\right)} \\ &= \frac{x(1-\cos(\theta))(1+x)}{(1-x)\left((1-x)^2+2x(1-\cos(\theta))\right)}\end{aligned}$$

comme $x \in [0,1[$, on a : $1+x \geqslant 1$. On en déduit :

$$\frac{1}{1-x} - \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right) \geqslant \frac{x(1-\cos(\theta))}{(1-x)\left((1-x)^2+2x(1-\cos(\theta))\right)},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Supposons à présent : $x \geqslant \frac{1}{2}$. En combinant la question précédente et l'inégalité ci-dessus, on a :

$$\left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right| \leqslant \exp\left(-\frac{x(1-\cos(\theta))}{(1-x)\left((1-x)^2+2x(1-\cos(\theta))\right)}\right).$$

Pour majorer le membre de droite, suivons l'indication de l'énoncé, en distinguant les cas :

— si $x(1-\cos(\theta)) \leqslant (1-x)^2$, alors par croissance de l'application $u \mapsto -\frac{1}{u}$ on a :

$$\begin{aligned}
-\frac{x(1-\cos(\theta))}{(1-x)\left((1-x)^2+2x(1-\cos(\theta))\right)} &\leqslant -\frac{x(1-\cos(\theta))}{(1-x)\left((1-x)^2+2x(1-x)^2\right)} \\
&= -\frac{x(1-\cos(\theta))}{(1-x)^3(1+2x)} \\
&\leqslant -\frac{x(1-\cos(\theta))}{(1-x)^3(1+2)} && (\text{car } 1+2x \leqslant 3) \\
&\leqslant -\frac{1-\cos(\theta)}{6(1-x)^3}, && (\text{car } -x \leqslant -\frac{1}{2})
\end{aligned}$$

et donc :

$$\left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right| \leqslant \exp\left(-\frac{1-\cos(\theta)}{6(1-x)^3}\right),$$

ce qui donne la première inégalité proposée;

— si $x(1-\cos(\theta)) \geqslant (1-x)^2$, alors on a, toujours par croissance de l'application $u \mapsto -\frac{1}{u}$:

$$\begin{aligned}
-\frac{x(1-\cos(\theta))}{(1-x)\left((1-x)^2+2x(1-\cos(\theta))\right)} &\leqslant -\frac{x(1-\cos(\theta))}{(1-x)\cdot 3x(1-\cos(\theta))} \\
&= -\frac{1}{3(1-x)},
\end{aligned}$$

et donc :

$$\left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right| \leqslant \exp\left(-\frac{1}{3(1-x)}\right).$$

On a donc démontré que si $x \geqslant \frac{1}{2}$ alors, selon que $x(1-\cos(\theta))$ soit supérieur ou inférieur à $(1-x)^2$, on a :

$$\left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right| \leqslant \exp\left(-\frac{1-\cos(\theta)}{6(1-x)^3}\right), \quad \text{ou :} \quad \left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right| \leqslant \exp\left(-\frac{1}{3(1-x)}\right).$$

24. Posons : $\forall \theta \in [-\pi,\pi]\setminus\{0\}$, $f(\theta) = \dfrac{1-\cos(\theta)}{\theta^2}$. Alors f est continue sur $[-\pi,\pi]\setminus\{0\}$, et on a au voisinage de 0 :

$$f(\theta) \underset{\theta\to 0}{\sim} \frac{\theta^2/2}{\theta^2} \xrightarrow[\theta\to 0]{} \frac{1}{2},$$

donc f se prolonge en une application $\tilde{f}$ continue sur le SEGMENT $[-\pi,\pi]$. Par le théorème des bornes atteintes, $\tilde{f}$ est bornée et atteint ses bornes. On en déduit l'existence de $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que :

$\alpha = \inf\limits_{[-\pi,\pi]} \tilde{f} = \min\limits_{[-\pi,\pi]} \tilde{f}$. Comme $\tilde{f} \geqslant 0$ trivialement (on a $\cos \leqslant 1$) et ne s'annule pas sur $[-\pi, \pi]$ (en effet, pour $\theta \neq 0$ on a $\cos(\theta) \neq 1$ donc $\tilde{f}(\theta) = f(\theta) \neq 0$, et pour $\theta = 0$ on a $\tilde{f}(0) = \lim\limits_0 f = \frac{1}{2} \neq 0$), on a : $\alpha > 0$. Ainsi on a bien l'existence de $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall \theta \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}, \quad f(\theta) = \frac{1 - \cos(\theta)}{\theta^2} \geqslant \alpha,$$

d'où le résultat en multipliant par $\theta^2 > 0$ (et pour $\theta = 0$ l'inégalité reste trivialement vérifiée).
Soit $t_0 > 0$ tel que : $e^{-t_0} = \frac{1}{2}$. C'est vérifié pour $t_0 = \ln(2)$. Alors, pour tout $t \in]0, t_0]$, en reprenant la minoration de $1 - \cos(\theta)$ ci-dessus, et en posant $x = e^{-t} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$ dans les majorations de la question précédente, on obtient pour tout $\theta \in [-\pi, \pi]$:

$$\left|\frac{P\left(e^{-t}e^{i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)}\right| \leqslant \exp\left(-\frac{\alpha\theta^2}{6\left(1 - e^{-t}\right)^3}\right), \text{ ou : } \left|\frac{P\left(e^{-t}e^{i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)}\right| \leqslant \exp\left(-\frac{1}{3\left(1 - e^{-t}\right)}\right)$$

Or, pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a : $1 - e^{-t} \leqslant t$ (voir $(**)$ à la question 11), donc par croissance de $u \mapsto -\frac{1}{u}$ on a :

$$\left|\frac{P\left(e^{-t}e^{i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)}\right| \leqslant \exp\left(-\frac{\alpha\theta^2}{6t^3}\right) = \exp\left(-\frac{\alpha}{6}\left(\theta t^{-3/2}\right)^2\right),$$

ou :

$$\left|\frac{P\left(e^{-t}e^{i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)}\right| \leqslant \exp\left(-\frac{1}{3t}\right) = \exp\left(-\frac{1}{3}\frac{|\theta|^{2/3}t^{-1}}{|\theta|^{2/3}}\right) \leqslant \exp\left(-\frac{1}{3}\frac{|\theta|^{2/3}t^{-1}}{\pi^{2/3}}\right) = \exp\left(-\frac{\left(t^{-3/2}|\theta|\right)^{2/3}}{3\pi}\right),$$

d'où le résultat en posant $\beta = \frac{\alpha}{6} > 0$ et $\gamma = \frac{1}{3\pi^{2/3}} > 0$ (il faudrait en principe traiter à part le cas $\theta = 0$, pour la seconde inégalité, mais il est trivial : nous laissons le lecteur s'en convaincre).
Remarque. Il est aussi possible de démontrer la minoration $1 - \cos(\theta) \geqslant \alpha\theta^2$, et d'expliciter α, en écrivant : $1 - \cos(\theta) = 2\sin\left(\theta/2\right)^2$. Il est alors relativement classique de démontrer, grâce à une étude de variation, qu'on a : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x) \geqslant \frac{2x}{\pi}$ (c'est une inégalité de convexité). Par parité de $\sin^2$ et $x \mapsto \left(\frac{2x}{\pi}\right)^2$, on a même : $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $(\sin(x))^2 \geqslant \frac{4x^2}{\pi^2}$. On en déduit alors, en prenant $x = \theta/2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\forall \theta \in [-\pi, \pi], \quad 1 - \cos(\theta) \geqslant 2 \cdot \frac{4(\theta/2)^2}{\pi^2} = \frac{2\theta^2}{\pi^2},$$

d'où la minoration voulue en posant $\alpha = \frac{2}{\pi^2} > 0$.

25. Soit $t \in]0, t_0]$. D'après la question précédente (et pour éviter une distinction de cas), on a :

$$\forall \theta \in [-\pi, \pi], \quad \left|\frac{P\left(e^{-t}e^{i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)}\right| \leqslant \max\left(e^{-\beta\left(t^{-3/2}\theta\right)^2}, e^{-\gamma\left(t^{-3/2}|\theta|\right)^{2/3}}\right) \leqslant e^{-\beta\left(t^{-3/2}\theta\right)^2} + e^{-\gamma\left(t^{-3/2}|\theta|\right)^{2/3}}.$$

On en déduit, grâce à l'inégalité triangulaire :

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\frac{\pi^2\theta}{6t^2}} \frac{P\left(e^{-t}e^{i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)} \mathrm{d}\theta\right| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{P\left(e^{-t}e^{i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)}\right| \mathrm{d}\theta \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{-\beta\left(t^{-3/2}\theta\right)^2} + e^{-\gamma\left(t^{-3/2}|\theta|\right)^{2/3}}\right) \mathrm{d}\theta$$
$$= 2\int_0^{\pi} \left(e^{-\beta\left(t^{-3/2}\theta\right)^2} + e^{-\gamma\left(t^{-3/2}\theta\right)^{2/3}}\right) \mathrm{d}\theta,$$

par parité des intégrandes. Le changement de variable $u = t^{-3/2}\theta$ (licite car $\theta \mapsto t^{-3/2}\theta$ est de classe C^1 sur $[0, \pi]$) donne alors :

$$\int_0^{\pi} \left(e^{-\beta\left(t^{-3/2}\theta\right)^2} + e^{-\gamma\left(t^{-3/2}\theta\right)^{2/3}}\right) \mathrm{d}\theta = t^{3/2} \int_0^{t^{-3/2}\pi} \left(e^{-\beta u^2} + e^{-\gamma u^{2/3}}\right) \mathrm{d}u.$$

Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(e^{-\beta u^2}+e^{-\gamma u^{2/3}}\right)\mathrm{d}u$ converge : l'intégrande est continu sur $[0,+\infty[$, et par le théorème des croissances comparées il est dominé par $u\mapsto\frac{1}{u^2}$ au voisinage de $+\infty$, qui est intégrable au voisinage de $+\infty$ en tant que fonction de Riemann d'exposant $2>1$. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, $u\mapsto e^{-\beta u^2}+e^{-\gamma u^{2/3}}$ est également intégrable au voisinage de $+\infty$, d'où le résultat. Cela nous permet d'écrire, étant donné que l'intégrande est positif :

$$\int_0^{t^{-3/2}\pi}\left(e^{-\beta u^2}+e^{-\gamma u^{2/3}}\right)\mathrm{d}u\leqslant\int_0^{+\infty}\left(e^{-\beta u^2}+e^{-\gamma u^{2/3}}\right)\mathrm{d}u,$$

et donc, en posant $C=\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(e^{-\beta u^2}+e^{-\gamma u^{2/3}}\right)\mathrm{d}u$ (qui est bien une constante de la variable t), les calculs qui précèdent montrent que :

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i\frac{\pi^2\theta}{6t^2}}\frac{P\left(e^{-t}e^{i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)}\mathrm{d}\theta\right|\leqslant 2Ct^{3/2},$$

et ce pour tout $t\in]0,t_0]$, ce qui montre bien qu'on a :

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i\frac{\pi^2\theta}{6t^2}}\frac{P\left(e^{-t}e^{i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)}\mathrm{d}\theta=\underset{t\to0^+}{O}\left(t^{3/2}\right).$$

E. Conclusion

26. Posons $t=\frac{\pi}{\sqrt{6n}}$ dans (1), ce qui équivaut à $n=\frac{\pi^2}{6t^2}$ (c'est ce qui apparaît dans l'intégrande de la question précédente). Notons qu'on a $n\to+\infty$ si et seulement si $t\to0^+$. On a alors :

$$p_n=\frac{e^{\frac{\pi\sqrt{n}}{\sqrt6}}P\left(e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6n}}}\right)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-in\theta}\frac{P\left(e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6n}}+i\theta}\right)}{P\left(e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6n}}}\right)}\mathrm{d}\theta.$$

Or, d'après la question précédente :

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{-in\theta}\frac{P\left(e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6n}}+i\theta}\right)}{P\left(e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6n}}}\right)}\mathrm{d}\theta=\underset{n\to+\infty}{O}\left(n^{-3/4}\right).$$

De plus, d'après la question 16 :

$$P\left(e^{-t}\right)=e^{\frac{\pi^2}{6t}}\cdot e^{\frac{\ln(t)}{2}}\cdot e^{-\frac{\ln(2\pi)}{2}}\cdot e^{o(1)}\underset{t\to0^+}{\sim}\sqrt{t}e^{\frac{\pi^2}{6t}}\cdot e^{-\frac{\ln(2\pi)}{2}},$$

donc, en particulier :

$$P\left(e^{-t}\right)=\underset{t\to0^+}{O}\left(\sqrt{t}e^{\frac{\pi^2}{6t}}\right),$$

puis :

$$P\left(e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6n}}}\right)=\underset{n\to+\infty}{O}\left(n^{-1/4}e^{\frac{\pi\sqrt{n}}{\sqrt6}}\right).$$

On a donc :

$$p_n=\underset{n\to+\infty}{O}\left(e^{\frac{\pi\sqrt{n}}{\sqrt6}}\times n^{-1/4}e^{\frac{\pi\sqrt{n}}{\sqrt6}}\times n^{-3/4}\right)=\underset{n\to+\infty}{O}\left(n^{-1}e^{2\frac{\pi\sqrt{n}}{\sqrt6}}\right).$$

C'est-à-dire, étant donné que $\frac{2}{\sqrt6}=\frac{2}{\sqrt2\sqrt3}=\sqrt{\frac23}$:

$$p_n=\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)}{n}\right),$$

d'où le résultat.