Corrigé de la première épreuve de mathématique
Mines PSI 2022
daouia_abdelkader@hotmail.fr

[A].Fonctions L et P.

1. Le rayon de convergence est 1 , d'après la règle de d'Alembert.On a donc la convergence pour tout $z \in D$:
$$L(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} = -\ln(1-z) \qquad \forall z \in]-1,1[$$
2. Si $z = 0$, $\Phi(t) = 0 \ \ \forall t \in \mathbb{R}$.
Si $z \in D,\ z \neq 0$, on pose , $a_n = \dfrac{z^n}{n}$, on a $\Phi(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n t^n$, c'est la somme d'une série entière de rayon de convergence $\dfrac{1}{|z|} > 1$, Φ est donc de dérivable sur $[-1,1]$:
$$\Phi^{'}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} t^{n-1} z^n = z \sum_{n=1}^{+\infty} (tz)^{n-1} = \frac{z}{1-tz}$$
3. $\Psi^{'}(t) = (1-tz)\dfrac{z}{1-tz}\exp(L(tz)) - z\exp(L(tz)) = 0 \qquad \forall t \in [0,1]$
La dérivée est nulle sur l'intervalle $[0,1]$, donc la fonction est constante , et sa valeur en 0 est $\Psi(0) = 1$:
$$1 = \Psi(0) = \Psi(1) = (1-z)\exp(L(z)) \Longrightarrow \exp(L(z)) = \frac{1}{1-z}$$
4. $|L(z)| = |\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|z^n|}{n} = -\ln(1-|z|) \qquad \forall\ z \in D.$
Pour $z \in D$, $|z|^n \longrightarrow_{n\longrightarrow+\infty} 0$:
$$0 \leq |L(z^n)| \leq -\ln(1-|z^n|) \sim |z^n|$$
Comme la série $\displaystyle\sum_{n\geq1} |z^n|$ est convergente ($|z| < 1$) , la série $\displaystyle\sum_{n\geq1} L(z^n)$ est absolument convergente d'après CCSTP , elle est donc convergente (dans $\mathbb{C}$ toute série absolument convergente est convergente).
$$P(z) = \exp\Big[\sum_{n=1}^{+\infty} L(z^n)\Big] \qquad z \in D$$
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} L(z^n) \in \mathbb{C}$, car la série est convergente , et on sait que $e^b \neq 0 \quad \forall b \in \mathbb{C}$, donc $P(z) \neq 0$.
La continuité de la fonction exponentielle nous permet d'écrire :
$$P(z) = \lim_{N\longrightarrow+\infty} \exp(\sum_{n=1}^{N} L(z^n) = \lim_{N\longrightarrow+\infty} \prod_{n=1}^{N} \exp(L(z^n)) = \lim_{N\longrightarrow+\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-z^n}$$
On prend $t > 0$ et $z = e^{-t} \in]0,1[\in D$, et en utilisant la continuité de $\ln$ sur $]0,+\infty[$:
$$\prod_{n=1}^{N} \underbrace{\frac{1}{1-e^{-nt}}}_{>0} \longrightarrow_{N\longrightarrow+\infty} P(e^{-t}) \Longrightarrow -\sum_{n=1}^{N} \ln(1-e^{-nt}) \longrightarrow_{N\longrightarrow+\infty} \ln(P(e^{-t})$$

Et on a :

$$\ln(P(e^{-t}) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1-e^{-nt}) \qquad \forall t>0$$

B. Développement asymptotique en variable réelle

6. La fonction : $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, elle admet une limite à droite et à gauche en tout point de $\mathbb{Z}$.
q est donc continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, pour $\in \mathbb{Z}$:

$$\lim_{x\longrightarrow n_-} q(x) = \frac{1}{2} \qquad , \qquad \lim_{x\longrightarrow n_+} q(x) = -\frac{1}{2}$$

q est donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
$q(x+1) = x+1-\lfloor x \rfloor - 1 - \dfrac{1}{2} = x+1-\lfloor x+1 \rfloor - \dfrac{1}{2} = q(x)$, q est 1-périodique.
On restreint l'étude à l'intervalle $[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}]$: Pour $x \in]0,\dfrac{1}{2}[$:

$$q(x) = x-\frac{1}{2} \implies |q(x)| = \frac{1}{2}-x \quad , \quad q(-x) = -x+1-\frac{1}{2} = -x+\frac{1}{2} \geq 0 \implies |q(-x)| = |q(x)|$$

7. Pour $t>0$, la fonction : $u \longmapsto \dfrac{q(u)}{e^{tu}-1}$ est continue par morceaux sur $[1,+\infty[$, comme la fonction q est périodique et continue par morceaux , elle est donc bornée sur $\mathbb{R}$:

$$\lim_{u\longrightarrow+\infty} \frac{u^2 q(u)}{e^{tu}-1} = 0 \implies \frac{q(u)}{e^{tu}-1} =_{+\infty} o(\frac{1}{u^2})$$

La comparaison avec l'intégrale de Riemann ,permet de justifier l'intégrabilité de la fonction.

8. On va utiliser la périodicité de q , et utiliser la relation de Chasles :

$$\int_1^n \frac{q(u)}{u}du = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{q(u)}{u}du$$

Pour $u \in [k,k+1[$, on a $q(u) = u-k-\dfrac{1}{2}$:

$$\int_1^n \frac{q(u)}{u}du = \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} du - \sum_{k=1}^{n-1}(k+\frac{1}{2})\int_k^{k+1}\frac{du}{u} = n-1-\sum_{k=1}^{n-1}(k+\frac{1}{2})\Big(\ln(k+1)-\ln(k)\Big)$$

$$= n-1-\sum_{k=1}^{n}(k+\frac{3}{2})\ln(k) + \sum_{k=1}^{n-1}(k+\frac{1}{2})\ln(k)$$

$$= n-1-\sum_{k=1}^{n-1}\ln(k) - (n+\frac{3}{2})\ln(n)$$

$$= n-1-\sum_{k=1}^{n}\ln(k) - (n+\frac{1}{2})\ln(n)$$

$$= n-1+\ln(n!) - n\ln(n) - \frac{1}{n}\ln(n) = \ln\Big(\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}\Big) - 1$$

9. q est bornée sur $\mathbb{R}$,$\exists M > 0 \quad : \quad |q(u)| \leq M \qquad \forall\ u \in \mathbb{R}$:

$$\Big| \int_{\lfloor x \rfloor}^{x} \frac{q(u)}{u} du \Big| \leq M \int_{\lfloor x \rfloor}^{x} \frac{1}{u} du = M \ln \Big(\frac{x}{\lfloor x \rfloor} \Big)$$

On sait que : $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \implies \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x} \longrightarrow_{x \longrightarrow +\infty} 1$, et on trouve alors le résultat.
Soit $x \in [1, +\infty[$, on pose $n = \lfloor x \rfloor$:

$$\int_{1}^{x} \frac{q(u)}{u} du = \int_{1}^{n} \frac{q(u)}{u} du + \int_{n}^{x} \frac{q(u)}{u} du = \ln \Big(\frac{n! e^{n}}{n^{n} \sqrt{n}} \Big) - 1 + \underbrace{\int_{n}^{x} \frac{q(u)}{u} du}_{\longrightarrow_{x \longrightarrow +\infty} 0}$$

On rappelle la formule de Stirling :

$$n! \sim n^{n} e^{-n} \sqrt{2\pi n} \implies \lim_{n \longrightarrow +\infty} = \frac{1}{2} \ln(2\pi)$$

L'intégrale est donc convergente , et sa valeur est :

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{q(u)}{u} du = \frac{1}{2} \ln(2\pi) - 1$$

10. On rappelle le DESE :

$$\ln(1 - u) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^{n}}{n} \qquad u \in]-1, 1[$$

On peut alors écrire :

$$\int_{0}^{+\infty} \ln(1 - e^{-u}) du = -\int_{0}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nu}}{n} du$$

$\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \Big| \frac{e^{-nu}}{n} \Big| du = \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-nu}}{n} du = \frac{1}{n^{2}}$, on remarque alors que $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \int_{0}^{+\infty} \Big| \frac{e^{-nu}}{n} \Big| du$ est convergente , on peut donc intervertir somme et intégrale :

$$\int_{0}^{+\infty} \ln(1 - e^{-u}) du = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2}} = -\frac{\pi^{2}}{6}$$

11. C'est facile d'établir que : $1 + x \leq e^{x} \implies (1 + x)e^{-x} \leq 0 \qquad \forall x \geq 0$.
On pose $h(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{x} \qquad x \in \mathbb{R}_{+}^{*}$.
h est dérivable , et $h^{'}(x) = \dfrac{1 - (1 + x)e^{-x}}{x^{2}} \leq 0 \qquad x \in \mathbb{R}_{+}^{*}$, h est donc décroissante .
On prend une suite $(t_n)_n \subset]0, 1]$ qui converge vers 0 ,
et on pose $f_n(u) = \ln \Big(\dfrac{1 - e^{-ut_n}}{t_n} \Big) \qquad u \in]0, 1]$. Un simple développement limité donne :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(u) = \ln(u) \qquad u \in]0, 1]$$

La suite $(f_n)_n$ est une suite de fonctions continues sur $]0, 1]$, elle converge simplement vers une fonction continue . Pour l'hypothèse de domination , on remarque que :

$$1 \geq \frac{1 - e^{-ut_n}}{t_n} = \frac{1 - e^{-ut_n}}{ut_n} u = h(ut_n)u \geq h(1)u \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall u \in]0, 1]$$

On en déduit facilement :

$$|f_n(u)| \leq \varphi(u) = -\ln(u) + |h(1)| \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall u \in]0,1]$$

φ est intégrable sur $]0,1]$, on peut donc utiliser le théorème de la convergence dominée :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_0^1 \ln\Big(\frac{1-e^{-ut_n}}{t_n}\Big)du = \int_0^1 \ln(u)du = \lim_{a\longrightarrow 0}\Big[u\ln(u)-u\Big]_a^1 = -1$$

Ceci étant vrai pour toute suite $(t_n)_n \subset]0,1]$ qui converge vers 0 , on a donc :

$$\lim_{t\longrightarrow 0^+} \int_0^1 \ln\Big(\frac{1-e^{-ut}}{t}\Big)du = \int_0^1 \ln(u)du = -1$$

12. (a) <u>Continuité sur $]0,+\infty]$</u> :

    Pour $t \in]0,+\infty]$, on écrit $u_k(t) = \displaystyle\int_{\frac{k}{2}}^{\frac{k+1}{2}} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}du = \int_{\frac{k}{2}}^{\frac{k+1}{2}} g(t,u)du$
    $\forall t>0$, $u \longmapsto g(t,u)$ est continue par morceaux sur $[\frac{k}{2},\frac{k+1}{2}]$.
    $\forall u \in [\frac{k}{2},\frac{k+1}{2}]$, $t \longmapsto g(t,u)$ est continue sur $]0,+\infty]$.
    On sait qu'il existe une constante $M>0$: $|q(u)| \leq M \quad \forall\ u \in\in \mathbb{R}$, on peut donner la domination :

    $$|g(t,u)| \leq \frac{M\ b}{e^{\frac{ak}{2}}-1} \qquad \forall t \in [a,b] \subset]0,+\infty[\qquad \forall u \in [\frac{k}{2},\frac{k+1}{2}]$$

    La fonction dominatrice est une constante , elle est donc intégrable sur le segment $[\frac{k}{2},\frac{k+1}{2}]$, on peut donc établir la continuité en utilisant le théorème de continuité sous le signe intégrale.

    (b) <u>Continuité en 0</u> :

    On a $e^{tu} \geq 1+tu \implies u \leq \dfrac{e^{tu}-1}{t} \longrightarrow_{t\longrightarrow\longrightarrow 0} u$.
    $\Big|\dfrac{tq(u)}{e^{tu}-1}\Big| \leq \dfrac{M}{u} \quad \forall\ t>0 \quad \forall\ u \in [\frac{k}{2},\frac{k+1}{2}]$, la fonction dominatrice est intégrable sur $[\frac{k}{2},\frac{k+1}{2}]$, on peut en passant par les suites utiliser le théorème de la convergence dominée montrer qu'on a la continuité en 0.

13. Soit $t>0$, pour démontrer les résultats , on va traiter les cas k pair , puis impair :

    (a) On suppose $k=2p$, $p \in \mathbb{N}^*$

    $$u_k(t) = \int_p^{p+\frac{1}{2}} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}du = \int_p^{p+\frac{1}{2}} \frac{t(u-p-\frac{1}{2})}{e^{tu}-1}du = -\int_p^{p+\frac{1}{2}} \frac{t(p+\frac{1}{2}-u)}{e^{tu}-1}du = -\int_p^{p+\frac{1}{2}} \frac{t|q(u)|}{e^{tu}-1}du$$

    On a donc le résultat pour les entiers pairs .

    (b) On fait de même pour les impairs

$|u_k(t)| - |u_k(t)| = \displaystyle\int_{\frac{k}{2}}^{\frac{k+1}{2}} \frac{t|q(u)|}{e^{tu}-1}du - \int_{\frac{k+1}{2}}^{\frac{k+2}{2}} \frac{t|q(u)|}{e^{tu}-1}du$. On introduit le changement de variable $s = k+1-u$ dans la dernière intégrale :

$$\int_{\frac{k+1}{2}}^{\frac{k+2}{2}} \frac{t|q(u)|}{e^{tu}-1}du = -\int_{\frac{k+1}{2}}^{\frac{k}{2}} \frac{t|q(k+1-s)|}{e^{t(k+1-s)}-1}ds = \int_{\frac{k}{2}}^{\frac{k+1}{2}} \frac{t|q(-s)|}{e^{t(k+1-s)}-1}ds = \int_{\frac{k}{2}}^{\frac{k+1}{2}} \frac{t|q(s)|}{e^{t(k+1-s)}-1}ds$$

On a utilisé $s \longmapsto |q(s)|$ est paire .

$$|u_k(t)| - |u_k(t)| = \int_{\frac{k}{2}}^{\frac{k+1}{2}} t|q(u)|\Big(\frac{1}{e^{tu}-1} - \frac{1}{e^{t(k+1-u)}-1}\Big)du$$

Pour $u \leq \frac{k+1}{2}$, on a $tu \leq t(k+1-u)$, et on conclut que :

$$|u_k(t)| - |u_k(t)| \geq 0$$

La suite $(|u_k(t)|)_{k\geq 1}$ est décroissante .Sa limite est 0 , car on a déjà démontré dans la question 7 que l'intégrale est absolument convergente.
On peut donc utiliser la majoration du reste dans le critère spécial des séries alternés :

$$\Big|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k(t)\Big| \leq |u_n(t)| \leq \int_{\frac{k}{2}}^{\frac{k+1}{2}} \frac{|q(u)|}{u} \leq \frac{1}{2}\int_{\frac{k}{2}}^{\frac{k+1}{2}} \frac{1}{u} = \frac{1}{2}\ln(\frac{n+1}{n}) = \frac{1}{2}\ln(1+\frac{1}{n}) \leq \frac{1}{2n}$$

14. On vient d'établir que $\sum_{k\geq 1} u_k$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$, comme les termes de la série sont continues sur $[0,+\infty[$ (d'après la question 12) , la somme est alors continue sur $[0,+\infty[$, et on peut passer à la limite :

$$\lim_{t\longrightarrow 0}\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}du = \lim_{t\longrightarrow 0}\sum_{k=2}^{+\infty} u_k(t) = \sum_{k=2}^{+\infty}\lim_{t\longrightarrow 0} u_k(t) = \int_1^{+\infty}\frac{q(u)}{u}du = \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1$$

15. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}du = \sum_{k=1}^{+\infty}\int_k^{k+1}\frac{tq(u)}{e^{tu}-1}du = \sum_{k=1}^{+\infty}\int_k^{k+1}\frac{t(u-k-\frac{1}{2})}{e^{tu}-1}du$

$$= \int_1^{+\infty}\frac{tue^{-tu}}{1-e^{-tu}}du - \sum_{k=1}^{+\infty}(k+\frac{1}{2})\int_k^{k+1}\frac{te^{-tu}}{1-e^{-tu}}du$$

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{tue^{-tu}}{1-e^{-tu}}du = \lim_{A\longrightarrow+\infty}\Big[u\ln(1-e^{-tu})\Big]_1^A - \int_1^{+\infty}\ln(1-e^{-tu})du$

$$= -\ln(1-e^{-t}) - \int_1^{+\infty}\ln(1-e^{-tu})du$$

(b) $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{te^{-tu}}{1-e^{-tu}}du = \ln(1-e^{-(k+1)t}) - \ln(1-e^{-kt})$

On trouve alors :

$$\int_1^{+\infty}\frac{tq(u)}{e^{tu}-1}du = -\ln(1-e^{-t}) - \int_1^{+\infty}\ln(1-e^{-tu})du - \sum_{k=1}^{+\infty}(k+\frac{1}{2})\Big(\ln(1-e^{-(k+1)t}) - \ln(1-e^{-kt})\Big)$$

$$= -\ln(1-e^{-t}) - \int_1^{+\infty}\ln(1-e^{-tu})du - \sum_{k=2}^{+\infty}(k-\frac{1}{2})\Big(\ln(1-e^{-kt}) + \sum_{k=1}^{+\infty}(k+\frac{1}{2})\Big(\ln(1-e^{-kt})$$

$$= -\ln(1-e^{-t}) - \int_1^{+\infty}\ln(1-e^{-tu})du + \frac{1}{2}\ln(1-e^{-t}) - \sum_{k=1}^{+\infty}(k-\frac{1}{2})\ln(1-e^{-kt}) + \sum_{k=1}^{+\infty}(k+\frac{1}{2})\ln(1-e^{-kt})$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(1-e^{-t}) - \int_1^{+\infty}\ln(1-e^{-tu})du + \sum_{k=1}^{+\infty}\ln(1-e^{-kt})$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(1-e^{-t}) - \ln(P(e^{-t})) - \int_1^{+\infty}\ln(1-e^{-tu})du$$

16. $\ln(P(e^{-t})) = -\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}du - \frac{1}{2}\ln(1-e^{-t}) - \int_1^{+\infty} \ln(1-e^{-tu})du$

   (a) $\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}du \longrightarrow_{t\longrightarrow 0} \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1$ (D'après la question 9).

   (b) En posant le changement de variable $tu = s$, on trouve

$$\int_1^{+\infty} \ln(1-e^{-tu})du = \frac{1}{t}\int_t^{+\infty} \ln(1-e^{-s})ds \sim_0 \frac{1}{t}\int_0^{+\infty} \ln(1-e^{-s})ds = \frac{\pi^2}{6t}$$

   D'après la question 10.

   (c) $\ln(1-e^{-t}) = \underbrace{\ln\Big(\frac{1-e^{-t}}{t}\Big)}_{\longrightarrow_{t\longrightarrow 0} 0} + \ln(t) \Longrightarrow \ln(1-e^{-t}) \sim_0 \ln(t)$

   Ces trois équivalences donnent le résultat.

   <u>C. Développement de P en série entière</u>

17. $(n, 0, 0, \dots, 0) \in P_{n,N}$ l'ensemble est donc non vide .

   Soit $(a_1, a_2, \dots, a_N) \in P_{n,N}$, on a : $0 \leq ia_i \leq \sum_{k=1}^{N} ka_k = n$, pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, il en découle :

$$0 \leq a_i \leq \frac{n}{i} \leq n \qquad i \in [\![1, N]\!] \implies P_{n,N} \subset [\![0, n]\!]^N$$

   $(a_1, a_2, \dots, a_N) \in P_{n,N} \Longrightarrow (a_1, a_2, \dots, a_N, 0) \in P_{n,N+1}$, on peut donc injecter $P_{n,N}$ dans $P_{n,N+1}$, d'où la croissance du cardinal.

   Si $N \geq n+1$,pour les entiers $n+1 \leq k \leq N$, $ka_k \leq n \Longrightarrow a_k \leq \frac{n}{k} < 1 \Longrightarrow a_k = 0$

   Le cardinal va se stabiliser donc à partir de $N = n$.

18. $z \in D$, $\frac{1}{1-z^N} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{kN} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,N}z^n$ avec :

   $a_{n,N} = 0$ si n n'est pas multiple de N ,et 1 si n est multiple de N.

   Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $z \in D$:

$$\prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-z^k} = \prod_{k=1}^{N}\sum_{h=0}^{+\infty} z^{kh} = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{(a_1,a_2,\dots,a_N)\in P_{n,N}} 1\Big)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N}z^n$$

19. Pour $x \in [0, 1[$, $\sum_{n=0}^{l} p_n x^n = \sum_{n=0}^{l} p_{n,l}x^n$ (car la suite $(p_{n,N})_N$ est constante à partir de n, elles sont donc toutes constantes à partir de l ,pour $n \leq l$.

   Comme tous les termes sont positifs , on peut étendre la majoration :

$$\sum_{n=0}^{l} p_n x^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,l}x^n = \prod_{k=1}^{l} \frac{1}{1-x^k} \leq P(x)$$

   Les termes $\frac{1}{1-x^k} \geq 1$.

   La série $\sum_{n\geq 0} p_n x_n$ converge pour tout $x \in [0, 1[$, le rayon de convergence est supérieur ou égal à 1, comme la suite $(p_n)_n$ est une suite d'entiers qui ne tend pas vers 0 , on n'a donc pas de convergence pour $x = 1$, d'où le rayon de convergence est 1.

20. .
Pour $z \in D$, la série $\sum_{n\geq 0} p_n|z|^n$ est convergente :

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad : \forall n \geq n_0 \quad \sum_{k=n}^{+\infty} p_k|z|^k \leq \varepsilon$$

$\lim_{N\longrightarrow+\infty} p_{n,N} = p_n \qquad 0 \leq n \leq\leq n_0$

Et on sait que :

$$\lim_{N\longrightarrow+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n = P(z)$$

$$\Big|\sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n\Big| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \Big|(p_n - p_{n,N})z^n\Big| = \sum_{n=0}^{n_0} \Big|(p_n - p_{n,N})\Big|\Big|z\Big|^n + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \Big|(p_n - p_{n,N})\Big|\Big|z\Big|^n$$

On sait que : $0 \leq p_n - p_{n,N} \leq p_n$, on peut donc écrire :

$$\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \Big|(p_n - p_{n,N})\Big|\Big|z\Big|^n \leq \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} p_n\Big|z\Big|^n \leq \varepsilon$$

$\sum_{n=0}^{n_0} |(p_n - p_{n,N})||z|^n \longrightarrow_{N\longrightarrow+\infty} 0$: Pour ce ε , il existe N_0 : $\forall N \geq N_0$

$$\Big|\sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n\Big| \leq 2\varepsilon$$

On trouve donc le résultat.

21. On va commencer par l'intégrale :
$\dfrac{e^{nt}P(e^{-t})}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta}\frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})}d\theta = \frac{e^{nt}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta}P(e^{-t}e^{i\theta})d\theta = \frac{e^{nt}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta}\sum_{k=0}^{+\infty} p_k e^{-kt}e^{ik\theta}d\theta$
La convergence est normale sur $[-\pi, \pi]$, on peut donc intervertir , et on utilise :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n-k)\theta}d\theta = 0 \quad k \neq n \quad , \quad 1 \quad k = n$$

On retrouve le résultat.

D. Contrôle de P

22. Soit $x \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
$\dfrac{1-x}{1-xe^{i\theta}} = \dfrac{\exp(L(xe^{i\theta}))}{\exp(L(x))}$

$$= \exp\Big(L(xe^{i\theta}) - L(x)\Big) = \exp\Big(-\sum_{n=1}^{+\infty}(1 - e^{in\theta})\frac{x^n}{n}\Big)$$

$$= \exp\Big(-\sum_{n=1}^{+\infty}(1 - \cos(n\theta))\frac{x^n}{n} - i(\sum_{n=1}^{+\infty}(1 - \sin((n\theta)\frac{x^n}{n})\Big)$$

$$= \exp\Big(-\sum_{n=1}^{+\infty}(1-\cos(n\theta))\frac{x^n}{n}\Big)\exp\Big(-i(\sum_{n=1}^{+\infty}(1-\sin((n\theta)\frac{x^n}{n})\Big)$$

Le dernier membre de droite est un complexe de module 1.

$\Big|\dfrac{1-x}{1-xe^{i\theta}}\Big| = \exp\Big(-\sum_{n=1}^{+\infty}(1-\cos(n\theta))\dfrac{x^n}{n}\Big) = \exp\Big(-(1-\cos(\theta))x\Big)\exp\Big(-\sum_{n=2}^{+\infty}(1-\cos(n\theta))\dfrac{x^n}{n}\Big)$

$$\leq \exp\Big(-(1-\cos(\theta))x\Big)$$

On a majoré le terme qui reste par 1 , car les termes à l'intérieur de l'exponentielle sont négatifs.

Remarque :

On peut faire autrement :

$\Big|\dfrac{1-x}{1-xe^{i\theta}}\Big| \leq \dfrac{1-x}{1-x\cos(\theta)} \leq^{?} \exp\Big(-(1-\cos(\theta))x\Big)$

La dernière inégalité est équivalente à :

$$1-x \leq (1-xt)\exp\Big(-(1-t)x\Big) \qquad \forall x \in [0,1[\qquad \forall t \in [-1,1]$$

On considère la fonction φ , définie par : $\varphi(t) = (1-xt)\exp\Big(-(1-t)x\Big)$ $\quad t \in [-1,1]$. φ est croissante sur $[-1,0]$ et décroissante sur $[0,1]$, son minimum alors est

$$\min(\varphi(1) = 1-x, \varphi(-1) = (1+x)e^{-2x})$$

Pour comparer les deux ,on introduit $h(x) = (1+x)e^{-2x} - (1-x)$, on dérive deux fois , et on démontre que $h(x) \geq 0$, $\forall x \in [0,1[$.

$$(1-x) = \varphi(1) \leq \varphi(t) \qquad \forall t \in [-1,1]$$

Déduction :

D'après la question 5 , $\dfrac{P(xe^{i\theta})}{P(x)} = \lim_{N\longrightarrow+\infty}\prod_{n=1}^{N}\Big(\dfrac{1-x^n}{1-x^ne^{in\theta}}\Big)$. Par continuité du module (1 lipschitzien) et la majoration précédente , on a :

$$\Big|\frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)}\Big| = \Big|\lim_{N\longrightarrow+\infty}\prod_{n=1}^{N}\Big(\frac{1-x^n}{1-x^ne^{in\theta}}\Big)\Big| \leq \lim_{N\longrightarrow+\infty}\prod_{n=1}^{N}\Big(\exp(-(1-\cos(n\theta)x^n\Big)$$

$$= \lim_{N\longrightarrow+\infty}\Big(\exp(-\sum_{n=1}^{N}(1-\cos(n\theta)x^n\Big)$$

$$= \exp(-\lim_{N\longrightarrow+\infty}\sum_{n=1}^{N}(1-\cos(n\theta)x^n)$$

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} x^n \longrightarrow \frac{1}{1-x}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^n\cos(n\theta) = Re\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}x^ne^{in\theta}\Big) = Re\Big(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\Big)$

23. .

$$\frac{1}{1-x} - Re\Big(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\Big) = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x\cos(\theta)}{1-2x\cos(\theta)+x^2} = \frac{x(1+x)(1-\cos(\theta))}{(1-x)((1-x)^2+2x(1-\cos(\theta))}$$

$$\geq \frac{x(1-\cos(\theta))}{(1-x)((1-x)^2+2x(1-\cos(\theta))}$$

$1+x \geq 1$ et tous les autres termes sont positifs.
<u>Déduction</u> :

(a) Si $\quad x(1-\cos(\theta)) \leq (1-x)^2 \quad$:
$\dfrac{x(1-\cos(\theta))}{(1-x)((1-x)^2+2x(1-\cos(\theta))} \geq \dfrac{x(1-\cos(\theta))}{3(1-x)^3} \geq \dfrac{(1-\cos(\theta))}{6(1-x)^3} \qquad (x \geq \dfrac{1}{2})$
Avec le signe $-$ et la croissance de l'exponentielle , on trouve la première majoration.

(b) . $\dfrac{x(1-\cos(\theta))}{(1-x)((1-x)^2+2x(1-\cos(\theta))} \geq \dfrac{x(1-\cos(\theta))}{(1-x)(3x(1-\cos(\theta))} = \dfrac{1}{3(1-x)}$
On conclut comme dans le cas précédent.

(c) .
On considère la fonction $C \ : \ t \longmapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$, $C(0) = \dfrac{1}{2}$ définie sur $[-\pi,\pi]$.
C est paire , continue ,strictement positive , elle est alors bornée et atteint ses bornes (le minimum noté $\alpha > 0$:

$$1-\cos(t) \geq \alpha t^2 \qquad \forall t \in [-\pi,\pi]$$

$e^{-t} = x \geq \frac{1}{2} \Longrightarrow t \leq \ln(2) = t_0$, pour $t \in]0,t_0]$:

i. Si $e^{-t}(1-\cos(\theta)) \geq (1-e^{-t})^2$, on a la majoration :

$$\Big|\frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})}\Big| \leq \exp\Big(-\frac{1-\cos(\theta)}{6(1-e^{-t})^3}\Big) \leq \exp\Big(-\frac{\alpha\theta^2}{6(1-e^{-t})^3}\Big)$$

On considère la fonction : $t \longmapsto \dfrac{1-e^{-t}}{t}$ qui est définit sur $]0,t_0]$, prolongeable par continuité en 0 , strictement positive , elle est alors majorée :

$$\exists \delta > 0 \quad : \quad 1-e^{-t} \leq \delta t \quad t \in]0,t_0]$$

On trouve la première majoration avec : $\beta = \dfrac{\alpha}{6\delta^3}$.

ii. On raisonne de même dans l'autre cas.

(d) On va regrouper les deux majoration :

$$\Big|\frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})}\Big| \leq e^{-\beta(t^{-\frac{3}{2}}\theta)^2} + e^{-\gamma(t^{-\frac{3}{2}}|\theta|)^{\frac{2}{3}}}$$

On majore le module de l'intégrale par l'intégrale du module , et on utilise la majoration précédente.

(e) On utilise les questions 21 et 25 .