 Devoir à rendre pour le jeudi 8 janvier 2026

I. Préliminaires.

1. Montrer les inégalités suivantes :

$$\forall t \in]-1,+\infty[,\ \ln(1+t) \leqslant t \tag{1}$$

$$\forall t \in]0,+\infty[,\ t\ln(t) \geqslant -\frac{1}{e} \tag{2}$$

2. Soit ψ une bijection de l'intervalle ouvert I sur l'intervalle ouvert J.
Définition : On dit que ψ est un C^1-difféomorphisme de I dans J si ψ est une bijection de classe C^1 telle que sa bijection réciproque soit également de classe C^1 de J dans I.
Si ψ est de classe C^1 sur I, donner une condition nécessaire et suffisante pour que ψ soit un C^1-difféomorphisme de I sur J. Dans ce cas, rappeler l'expression de la dérivée de ψ^{-1}.

II. Construction d'une application particulière.

On note H l'ensemble des fonctions f strictement positives, continues sur $\mathbb{R}$, pour lesquelles il existe $\rho > 0$ (dépendant de f) tel que, pour tout réel x :

$$0 < f(x) \leqslant \frac{1}{\rho}\exp\left(\left(\frac{1}{2}-\rho\right)x^2\right) \tag{A}$$

On note H_0, le sous-ensemble de H des fonctions f telles que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-u^2/2}\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}\,du = \sqrt{2\pi}$$

Dans tout le reste de l'énoncé, f est un élément de H_0

3. Soit F_f définie par
$$F_f(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)e^{-u^2/2}\,du$$
En particulier,
$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\,du$$
Montrer que F_f est un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\left]0,\sqrt{2\pi}\right[$.

4. Montrer qu'il existe une unique fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, on ait
$$\int_{-\infty}^{\varphi(x)} f(u)e^{-u^2/2}\,du = \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\,du$$

5. Montrer que φ est monotone et que φ est un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

6. Pour tout réel x, calculer
$$\ln(\varphi'(x)) + \ln(f(\varphi(x))) - \frac{1}{2}\varphi(x)^2$$
et
$$\ln((\varphi^{-1})'(x)) - \ln(f(x)) - \frac{1}{2}\varphi^{-1}(x)^2$$

7. Soit h une fonction continue par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que la fonction $u \mapsto h(u)f(u)e^{-u^2/2}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$.
Montrer l'identité suivante :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)f(u)e^{-u^2/2}\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\varphi(u))e^{-u^2/2}\,du$$

8. Montrer qu'il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout réel $x \geqslant A$, on ait :

$$\int_x^{x+1} \varphi^2(u)e^{-u^2/2}\,du \geqslant \varphi^2(x)e^{-(x+1)^2/2}$$

9. Montrer qu'il existe un réel $B > 0$ tel que pour tout réel $|u| \geqslant B$, on ait :

$$|\varphi(u)| \leqslant e^{(|u|+1)^2/4}$$

10. Déterminer une primitive de la fonction

$$u \mapsto (u\varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1)e^{-u^2/2}$$

11. Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} (u\varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1)e^{-u^2/2}\,du$$

III. Une inégalité intéressante.

On introduit les notations suivantes :

$$E(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\ln(f(u))e^{-u^2/2}\,du$$

$$\Phi(f) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |u - \varphi(u)|^2 e^{-u^2/2}\,du$$

12. Justifier la convergence de ces deux intégrales.
13. Montrer l'identité :
$$E(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(f(\varphi(u)))e^{-u^2/2}\,du$$
14. Montrer l'égalité suivante :

$$E(f) - \Phi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi'(u) - 1 - \ln(\varphi'(u)))e^{-u^2/2}\,du$$

15. Quelle est la relation d'ordre entre $\Phi(f)$ et $E(f)$?
16. Déterminer les fonctions telles que $E(f) = \Phi(f)$.

Exercice

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, la fonction $t \mapsto \left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^n$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

   On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n$.
2. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $I_n > 0$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
3. (a) Montrer que $I_n = \dfrac{1}{(n-1)!}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(\sin^n x)dx$.
   (b) pour $p \in \mathbb{N}$, linéariser $\sin^{2p} x$ et $\sin^{2p+1} x$.
   (c) En déduire, pour $p \geqslant 2$, les valeurs de I_{2p} et I_{2p+1}.
   (d) Expliciter I_n pour $n \in [\![2, 6]\!]$.