PC$\overset{\star}{2}$ **Correction du devoir à rendre pour le jeudi 8 janvier 2026**

Le problème est tiré de Mines PC 2005, Maths 1, (3h)

I. Préliminaires.

1. ln est une fonction concave sur $\mathbb{R}^{+*}$ (dérivée seconde négative sur l'intervalle). Son graphe est donc situé sous chacune de ses tangentes. En prenant la tangente au point d'abscisse 1 on a donc

$$\forall x > 0,\ ln(x) \leqslant x - 1$$

ou encore (en posant $t = x-1$) : $\forall t > -1,\ ln(1+t) \leqslant t$ La fonction $f\ :\ t \mapsto t.ln(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $f' : t \mapsto 1 + ln(t)$. On a donc le tableau de variation suivant

t	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f(t)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit que $\forall t > 0,\ t.ln(t) \geqslant -\frac{1}{e}$

2. I étant un intervalle ouvert, ψ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de I dans $J = \psi(I)$ si et seulement ψ est dérivable à dérivée continue sur I avec

$$\forall x \in I,\ \psi'(x) \neq 0$$

Remarque : ceci entraîne la stricte monotonie de ψ sur I et donc la bijectivité de I dans J. Dans ce cas, $\forall x \in J,\ (\psi^{-1})'(x) = \frac{1}{\psi'(\psi^{-1}(x))}$

II. Construction d'une application.

3. Comme $f \in H_0$, l'intégrale de $g : u \mapsto f(u)e^{-u^2/2}$ existe sur $\mathbb{R}$. Comme g est positive, cette existence donne l'intégrabilité de g sur $\mathbb{R}$. On a aussi intégrabilité sur $\mathbb{R}^-$ et, par relation de Chasles,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_f(x) = F_f(0) + \int_0^x f(u)e^{-u^2/2}\,du = F_f(0) + G(x)$$

Comme g est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$, G est, par théorème fondamental, une primitive de g. C'est donc une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ (de dérivée égale à g). F_f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ avec

$$\forall x,\ F_f'(x) = g(x) = f(x)e^{-x^2/2} > 0$$

F_f est donc, avec la première partie, un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans son image qui, par croissance et continuité, est $J =]\lim_{-\infty} F_f, \lim_{+\infty} F_f[$. Par définition de l'intégrale et par celle de H_0, on a $J =]0, \sqrt{2\pi}[$.

4. L'égalité proposée se lit $F_f(\varphi(x)) = F_1(x)$. Comme $F_1(x) \in]0, \sqrt{2\pi}[$, ceci équivaut, par bijectivité de F_f, à $\varphi(x) = F_f^{-1} \circ F_1(x)$. Il ya donc une unique fonction φ convenable et c'est

$$\varphi = F_f^{-1} \circ F_1$$

5. F_f^{-1} et F_1 étant de classe $\mathcal{C}^1$, φ l'est aussi et

$$\forall x,\ \varphi'(x) = (F_f^{-1})'(F_1(x))F_1'(x) = \frac{F_1'(x)}{F_f' \circ F_f^{-1}(F_1(x))}$$

Les calculs précédent donnent donc (puisque $F_f^{-1} \circ F_1 = \varphi$)

$$(*) \ : \ \forall x, \ \varphi'(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{f(\varphi(x))e^{-\varphi(x)^2/2}} > 0$$

La question 1 indique que φ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans son image qui, par croissance et continuité, est $]\lim_{-\infty}\varphi, \lim_{+\infty}\varphi[$. Enfin, on a

$$\lim_{t\to-\infty} F_f^{-1} \circ F_1(t) = \lim_{x\to 0^+} F_f^{-1}(x) = -\infty$$

$$\lim_{t\to+\infty} F_f^{-1} \circ F_1(t) = \lim_{x\to\sqrt{2\pi}^-} F_f^{-1}(x) = +\infty$$

ce qui montre que φ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

6. En passant au logarithme dans $(*)$, on obtient directement

$$\forall x, \ ln(\varphi'(x)) + ln(f(\varphi(x))) - \frac{\varphi(x)^2}{2} = -\frac{x^2}{2}$$

Soit $y \in \mathbb{R}$ et $x = \varphi^{-1}(y)$. La relation précédente donne

$$ln(\varphi'(\varphi^{-1}(y))) + ln(f(y)) - \frac{y^2}{2} = -\frac{\varphi^{-1}(y)^2}{2}$$

Avec la formule rappelée en question 2, on a donc

$$-ln((\varphi^{-1})'(y)) + ln(f(y)) - \frac{y^2}{2} = -\frac{\varphi^{-1}(y)^2}{2}$$

On a donc montré que

$$\forall y, \ ln((\varphi^{-1})'(y)) - ln(f(y)) - \frac{\varphi^{-1}(y)^2}{2} = -\frac{y^2}{2}$$

7. Remarquons que, avec la relation $(*)$ de laquestion 5,

$$\forall u, \ h(\varphi(u))e^{-u^2} = h(\varphi(u))f(\varphi(u))e^{-\varphi(u)^2/2}\varphi'(u)$$

φ étant un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme d'un segment $[a, b]$ dans son image, on peut poser $v = \varphi(u)$ pour obtenir (avec la remarque initiale)

$$\int_a^b h(\varphi(u))e^{-u^2/2}\, du = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} h(v)f(v)e^{-v^2/2}\, dv$$

Quand a tend vers $-\infty$ et b vers $+\infty$, le membre de droite admet une limite avec l'hypothèse d'intégrabilité faite ($\varphi(a) \to -\infty$ et $\varphi(b) \to +\infty$). On peut donc passer à la limite dans notre relation et obtenir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(\varphi(u))e^{-u^2/2}\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} h(v)f(v)e^{-v^2/2}\, dv$$

Remarque : on n'a pas prouvé l'intégrabilité de $u \mapsto h(\varphi(u))e^{-u^2/2}$ sur $\mathbb{R}$ mais seulement l'existence de l'intégrale pour cette fonction continue par morceaux qui ne présente de problème d'intégrabilité qu'aux voisinages des infinis. Ceci suffit pour obtenir la formule demandée. Remarquons cependant que le même calcul peut être mené en remplacant $h(u)$ par $|h(u)|$. On obtient alors l'existence de $\int_{\mathbb{R}} |h(\varphi(u))|e^{-u^2/2}\, du$ c'est à dire l'intégrabilité de $u \mapsto h(\varphi(u))e^{-u^2/2}$.

8. φ étant croissante sur $\mathbb{R}$ et de limite infinie en $+\infty$, elle est positive au voisinage de $+\infty$. Quitte à restreindre ce voisinage, on a

$$\exists\, A > 0 /\ \forall x \geqslant A,\ \varphi(x) \geqslant 0$$

Pour tout $x \geqslant A$, on a

$$\forall u \in [x, x+1],\ \varphi(u) \geqslant \varphi(x) \geqslant 0,\ 0 \leqslant u \leqslant x+1$$

Sur $\mathbb{R}^+$, on a croissance de $t \mapsto t^2$ et décroissance de $t \mapsto e^{-t^2/2}$. On en déduit que

$$\forall u \in [x, x+1],\ \varphi(u)^2 e^{-u^2/2} \geqslant \varphi(x)^2 e^{-(x+1)^2/2}$$

Par croissance de l'intégrale ($x \leqslant x+1$) on en déduit que

$$\int_x^{x+1} \varphi(u)^2 e^{-u^2/2}\, du \geqslant \varphi(x)^2 e^{-(x+1)^2/2}$$

9. Avec la question précédente, on a

$$\forall x \geqslant A,\ \varphi^2(x) \leqslant e^{\frac{(x+1)^2}{2}} \int_x^{x+1} \varphi(u)^2 e^{-u^2/2}\, du$$

On a $0 \leqslant u^2 f(u) e^{-u^2/2} \leqslant \frac{u^2}{\rho} e^{-\rho u^2} = o(1/u^2)$ ce qui prouve l'intégrabilité de cette fonction aux voisinages des infinis et donc sur $\mathbb{R}$ (pas de problème ailleurs). La question 7 utilisée avec $h(u) = u^2$ donne l'intégrabilité de $\varphi(u)^2 e^{-u^2/2}$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi, l'intégrale de cette fonction entre x et $x+1$ tend vers 0 quand $x \to +\infty$ (différence de $\int_0^{x+1}$ et de $\int_0^x$ qui tend vers $l - l = 0$). Pour x assez grand cette intégrale est inférieure à 1. On a donc un $B > 0$ tel que

$$\forall x \geqslant B,\ 0 \leqslant \varphi(x) \leqslant e^{\frac{(x+1)^2}{4}}$$

Pour traiter le cas du voisinage de $-\infty$, on reprend la question précédente. En prenant garde aux signes, on obtient pour x assez petit ($x \leqslant A' < 0$)

$$\varphi(x+1)^2 e^{-x^2} \leqslant \int_x^{x+1} \varphi(u)^2 e^{-u^2/2}\, du$$

Pour x assez petit le majorant est inférieur à 1 et ainsi, on trouve B' tel que

$$\forall x \leqslant B' < 0,\ |\varphi(x+1)| \leqslant e^{\frac{(x-1)^2}{4}} = e^{\frac{(|x|+1)^2}{4}}$$

Le B cherché est $\max(B, -B')$.

10. L'application $u \mapsto (u\varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1)e^{-u^2/2}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, on obtient une primitive H en posant

$$H(x) = \int_0^x (u\varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1)e^{-u^2/2}\, du$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Par intégration par parties, on obtient

$$\int_0^x \varphi'(u) e^{-u^2/2}\, du = \left[\varphi(u) e^{-u^2/2}\right]_0^x + \int_0^x u\varphi(u) e^{-u^2/2}\, du$$

$$\int_0^x u^2 e^{-u^2/2}\, du = \left[-u e^{-u^2/2}\right]_0^x + \int_0^x e^{-u^2/2}\, du$$

En combinant ces résultats, on obtient

$$H(x) = \left[(u - \varphi(u)) e^{-u^2/2}\right]_0^x$$

On obtient finalement que $x \mapsto (x - \varphi(x)) e^{-x^2/2}$ est une primitive de la fonction proposée. On peut le vérifier d'ailleurs en dérivant !

11. Par continuité de la fonction sous l'intégrale et avec la question précédente, on a

$$\int_a^b (u\varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1)e^{-u^2/2}\, du = (b - \varphi(b))e^{-b^2/2} - (a - \varphi(a))e^{-a^2/2}$$

Par croissances comparées, $xe^{-x^2/2}$ est de limite nulle en $+\infty$ et $-\infty$. La question 9 donne par ailleurs que

$$\forall |u| \geqslant B,\ |\varphi(u)e^{-u^2/2}| \leqslant e^{\frac{(|u|+1)^2}{4} - \frac{u^2}{2}} = e^{\frac{-u^2+2|u|+1}{4}}$$

et cette quantité est de limite nulle aux infinis. On peut ainsi passer à la limite $a \to -\infty$ et $b \to +\infty$ dans l'intégrale. On peut ainsi écrire que

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} (u\varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1)e^{-u^2/2}\, du = 0$$

Remarque : à nouveau, on n'a pas prouvé d'intégrabilité mais juste une existence d'intégrale. L'énoncé commençant par demander de calculer une primitive, il ne semble pas utile de prouver une intégrabilité ici.

III. Une inégalité intéressante.

12. L'application $u \mapsto |u - \varphi(u)|^2 e^{-u^2/2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et les seuls problèmes d'intégrabilité sont ceux aux voisinages des infinis. D'après la question 9 et l'inégalité triangulaire, on a

$$\forall |u| \geqslant B,\ |u - \varphi(u)|^2 e^{-u^2/2} \leqslant |u|e^{-u^2/2} + e^{\frac{-u^2+2|u|+1}{4}} = o\left(\frac{1}{u^2}\right)$$

et on a donc aussi intégrabilité aux voisinages des infinis. Finalement, la fonction est intégrable sur $\mathbb{R}$ et on a existence de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u - \varphi(u)|^2 e^{-u^2/2}\, du$$

De même, $u \mapsto ln(f(u))f(u)e^{-u^2}2$ est continue sur $\mathbb{R}$ et les seuls problèmes d'intégrabilité sont ceux aux voisinages des infinis. Soit $u \in \mathbb{R}$.

- Si $f(u) \leqslant 1$ alors avec la question 1, $|f(u)ln(f(u))| = -f(u)ln(f(u)) \leqslant \frac{1}{e}$.
- Si $f(u) \geqslant 1$ alors $0 \leqslant f(u)ln(f(u))$. L'hypothèse faite sur f donne alors

$$f(u)ln(f(u))e^{-u^2/2} \leqslant \frac{1}{\rho}e^{-\rho u^2}\left((1/2 - \rho)u^2) - ln(\rho)\right)$$

Ainsi, dans tous les cas,

$$|f(u)ln(f(u))|e^{-u^2/2} \leqslant \frac{1}{e}e^{-u^2/2} + \frac{1}{\rho}e^{-\rho u^2}\left((1/2 - \rho)u^2) - ln(\rho)\right)$$

et le majorant est, par croissances comparées, négligeable devant $1/u^2$ aux voisinages des infinis. Comme dans le premier cas, on obtient l'existence de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ln(f(u))f(u)e^{-u^2}2\, du$$

13. Avec l'intégrabilité prouvée ci-dessus on peut utiliser la question 7 avec $h(u) = ln(f(u))$ (h est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et on a l'intégrabilité voulue) pour obtenir

$$E(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} ln(f(\varphi(u)))e^{-u^2/2}\, du$$

14. En combinant les question 13 et 6, on obtient

$$E(f) - \Phi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-ln(\varphi'(u)) - u^2 + u\varphi(u))e^{-u^2/2}\, du$$

L'intégration par parties donne

$$\int_a^b u\varphi(u)e^{-u^2/2}\, du = \left[-\varphi(u)e^{-u^2/2}\right]_a^b + \int_a^b \varphi'(u)e^{-u^2/2}\, du$$

$$\int_a^b u^2 e^{-u^2/2}\, du = \left[-ue^{-u^2/2}\right]_a^b + \int_a^b e^{-u^2/2}\, du$$

On obtient donc

$$\int_a^b (-ln(\varphi'(u)) - u^2 + u\varphi(u))e^{-u^2/2}\, du = \left[ue^{-u^2/2} - \varphi(u)e^{-u^2/2}\right]_a^b + \int_a^b (-ln(\varphi'(u)) - 1 + \varphi'(u))e^{-u^2/2}\, du$$

Le membre de gauche admet une limite quand $a \to -\infty$ et $b \to +\infty$. Il en est de même pour le terme entre crochets du membre de droite (déjà vu plus haut) avec une limite nulle. Le troisième DOIT donc admettre une limite et on peut écrire

$$E(f) - \Phi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-ln(\varphi'(u)) - 1 + \varphi'(u))e^{-u^2/2}\, du$$

15. D'après la question 1, on a $ln(\varphi'(u)) \leqslant \varphi'(u) - 1$. La question précédente inique alors que

$$E(f) - \Phi(f) \geqslant 0$$

16. Si g est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, continu et positive telle que $\int_{\mathbb{R}} g = 0$ alors

$$\forall a < b,\ 0 \leqslant \int_a^b g \leqslant \int_{\mathbb{R}} g = 0$$

et, avec le cours, g est nulle sur $[a, b]$ et donc sur $\mathbb{R}$ (vrai sur tout segment). La réciproque est immédiate.
Ainsi, $E(f) = \Phi(f)$ a lieu si et seulement si $\varphi'(u) - 1 - ln(\varphi'(u)) = 0$ c'est à dire $\varphi'(u) = 1$ (ln est strictement concave et il n'y a égalité dans la première inégalité de la question 1 que si $t = 0$).

- Si f convient alors il existe c tel que $\varphi : x \mapsto x + c$. La question 6 donne alors

$$\forall x,\ f(x + c) = e^{\frac{2cx + c^2}{2}}$$

et donc

$$\forall x,\ f(x) = e^{cx - \frac{c^2}{2}}$$

- Réciproquement, soit f une fonction du type précédent. f est strictement positive et continue sur $\mathbb{R}$ et on a

$$f(u)e^{-u^2/2} = e^{-\frac{(u-c)^2}{2}}$$

et en posant $v = u - c$ on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} f(u)e^{-u^2/2}\, du = \int_{\mathbb{R}} e^{-v^2/2}\, dv$$

Il reste à voir si la condition (A) est vérifiée pour une bonne valeur de $\rho > 0$.

Le problème du transport de Monge consiste à optimiser le coût global du transport d'une répartition de masse vers une autre. Dans le cas uni-dimensionnel que nous venons de traiter, on se donne un tas de sable infiniment fin dont le poids entre les abscisses $u - du$ *et* $u + du$ *est donné par* $2\exp(-u^2/2)du$*. On veut le déplacer vers un tas de sable de densité linéique* $f(u)exp(-u^2/2)$*. Cela est représenté par une application* s *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *qui pour tout réel* u *donne l'abscisse,* $s(u)$*, du grain situé en* u *après le transport. On montre que l'application* φ *déterminée en question 4 minimise le coût du transport défini par* $\int_{-\infty}^{+\infty} |u - s(u)| e^{-u^2/2}\, du$*, parmi toutes les fonctions* s *possibles. L'objectif de ce problème est de majorer ce coût minimal par une quantité qui ne dépend que de* f *et qui ne nécessite pas le calcul de* φ*. Le nombre* $E(f)$ *est appelé l'entropie de Boltzmann.*

Exercice

1. On pose $f_n(t) = \left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^n$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et tend vers 1 en 0. Il y a donc un faux problème de convergence en 0.
   Par ailleurs, en $+\infty$, $f_n(t) = O(\dfrac{1}{t^n})$ qui est une intégrale de Riemann convergente sur $[1, +\infty[$, ce qui prouve l'intégrabilité de f_n sur $\mathbb{R}_+$.
2. Il est clair que $I_n > 0$ si n est pair. Supposons donc n impair.
   On pose $u_k = \displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n dt = \int_0^{\pi} (-1)^k \left(\frac{\sin u}{u + k\pi}\right)^n du = (-1)^k a_k$ avec a_k positive, qui décroît et qui est telle que $a_k \leqslant \dfrac{\pi}{(k\pi)^n}$, donc $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$. D'après le critère spécial des séries alternées, I_n est le reste d'ordre 0 de cette série, il est donc du signe du premier terme, c'est-à-dire positif strictement.
   Montrons que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
   $|I_n| \leqslant \displaystyle\int_0^1 |\frac{\sin t}{t}|^n dt + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^n}$.
   Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^n} = \frac{1}{n-1} \to 0$
   Soit $\varepsilon > 0$ fixé, posons $A = \displaystyle\int_0^{\varepsilon} \frac{|\sin t|^n}{t^n} dt$. On a $A \leqslant \varepsilon$ car $|\dfrac{\sin t}{t}| \leqslant 1$
   et $B = \displaystyle\int_{\varepsilon}^1 \frac{|\sin t|^n}{t^n} dt$. On a $B \leqslant \displaystyle\int_{\varepsilon}^1 \frac{|\sin \varepsilon|^n}{\varepsilon^n} dt \leqslant \left|\frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon}\right|^n$ car une étude de fonction montrerait sans difficulté que la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est décroissante sur $[0, 1]$.
   Or, $\dfrac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} < 1$ donc $\left|\dfrac{\sin \varepsilon}{\varepsilon}\right|^n \to 0$ et donc, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, \left|\dfrac{\sin \varepsilon}{\varepsilon}\right|^n < \varepsilon$ ce qui donne finalement, $\forall n \geqslant N$, $|I_n| \leqslant 3\varepsilon$.
3. (a) On procède à des intégration par parties successives en dérivant à chaque fois $\sin^n t$:
   $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n = \frac{-1}{n-1}\left[\frac{\sin^n t}{t^{n-1}}\right]_0^{\infty} + \frac{1}{n-1}\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^{n-1}} \frac{d}{dt}(\sin^n t) dt = \frac{1}{n-1}\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^{n-1}} \frac{d}{dt}(\sin^n t) dt$
   car la partie entre crochets est nulle.
   En effet, en 0, $\sin^n t \sim t^n$ donc $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sin^n t}{t^{n-1}} = 0$ et en $+\infty$, $\sin^n t$ est bornée, donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\sin^n t}{t^{n-1}} = 0$.
   Avec une nouvelle intégration par parties :
   $$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{n-1}\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^{n-1}} \frac{d}{dt}(\sin^n t) dt \\ &= \frac{-1}{(n-1)(n-2)}\left[\frac{\frac{d}{dt}(\sin^n t)}{t^{n-2}}\right]_0^{\infty} + \frac{1}{(n-1)(n-2)}\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^{n-2}} \frac{d^2}{dt^2}(\sin^n t) dt \\ &= \frac{1}{(n-1)(n-2)}\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^{n-2}} \frac{d^2}{dt^2}(\sin^n t) dt. \end{aligned}$$
   Justifions la nullité de la partie entre crochets :
   $\sin^n t \sim t^n$ au voisinage de 0, donc $\dfrac{d}{dt}(\sin^n t) \sim_0 t^{n-1}$ et donc $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\frac{d}{dt}(\sin^n t)}{t^{n-2}} = 0$.
   En $+\infty$, $\dfrac{d}{dt}(\sin^n t)$ est un polynôme en sin et cos donc est bornée, d'où $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{d}{dt}(\sin^n t)}{t^{n-2}} = 0$.
   Généralisons : $\sin^n t \sim_0 t^n$, donc $\dfrac{d^k}{dt^k}(\sin^n t) \sim_0 t^{n-k} \implies \displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\frac{d^k}{dt^k}(\sin^n t)}{t^{n-k-1}} = 0$.

En $+\infty$, $\dfrac{d^k}{dt^k}(\sin^n t)$ est un polynôme en sin et cos donc borné, d'où $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{d^k}{dt^k}(\sin^n t)}{t^{n-k-1}} = 0$.
Par desintégrations par parties successives, avec à chaque fois la nullité de la partie entre crochets, on aboutit finalement à

$$I_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} \frac{1}{t}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(\sin^n t)dt$$

(b) Avec les techniques habituelles :

$$\sin^{2p} x = \frac{(-1)^p}{2^{2p}}\left[\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k\binom{2p}{k}\cos\left((2p-2k)x\right) + (-1)^p\binom{2p}{p}\right]$$

et

$$\sin^{2p+1} x = \frac{(-1)^p}{2^{2p}}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{2p+1}{k}\sin\left((2p-2k+1)x\right)$$

(c) En utilisant la formule de 3.a) et la linéarisation de la question b),

$$I_{2p} = \frac{\pi}{2(2p-1)!}\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k(p-k)^{2p-1}\binom{2p}{k}$$

et

$$I_{2p+1} = \frac{\pi}{2^{2p+1}(2p)!}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k(2p-2k+1)^{2p}\binom{2p+1}{k}$$

(d) Avec la formule précédente, on trouve :
$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{(\sin t)^2}{t^2}dt = \frac{\pi}{2}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{(\sin t)^3}{t^3}dt = \frac{3\pi}{8}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{(\sin t)^4}{t^4}dt = \frac{\pi}{3}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{(\sin t)^5}{t^5}dt = \frac{115\pi}{384}$,
$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{(\sin t)^6}{t^6}dt = \frac{11\pi}{40}$.