Polynômes de Legendre : Correction

1. Soit $\mathbb{P} \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $\deg(x^2-1)P'(x) \leqslant n+1$ donc $\deg \varphi(P) \leqslant n$.

2. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & & \\ & 2 & 0 & \ddots & \\ & & 6 & 0 & n(n-1) \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & n(n+1) \end{pmatrix}$

3. Par ipépé, $(L(P)|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left((x^2-1)P'(x)\right) Q(x)dx = \left[(x^2-1)P'(x)Q(x)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}(x^2-1)P'(x)Q'(x)dx$ et la symétrie en P et Q de cette formule permet d'affirmer que $\boxed{(L(P)|Q) = (P|L(Q))}$.

4. $\deg L_n = n$. C'est une famille échelonnée en degré. Donc, $(L_0, ..., L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

5. $L_n(X) = \dfrac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left((X-1)^n\right)^{(k)} \left((X+1)^n\right)^{(n-k)} = \dfrac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!}(X-1)^{n-k} \times \frac{n!}{k!}(X+1)^k$.
   D'où $L_n(X) = \dfrac{1}{2^n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (X-1)^{n-k}(X+1)^k$.
   On obtient donc $L_n(1) = \dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{n}^2 2^n = 1$ et $L_n(-1) = \dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{0}^2(-2)^n = (-1)^n$.

6. (a) $P_{n+1}(X) = (X^2-1)^{n+1}$, donc en dérivant : $P'_{n+1}(X) - 2(n+1)XP_n(X) = 0$
   (b) $P_n(X) = (X^2-1)^n$ et par dérivation également $(X^2-1)P'_n(X) - 2nXP_n(X) = 0$

7. (a) En dérivant $n+1$ fois 6.(a) par la formule de Leibniz, on obtient :
   $$\boxed{L'_{n+1}(X) = XL'_n(X) + (n+1)L_n(X)}.$$
   (b) En dérivant $n+1$ fois la relation 6.(b) avec la formule de Leibniz, on obtient : $\boxed{\varphi(L_n) = n(n+1)L_n}$.

8. Soient i et j deux entiers distincts , alors $(\varphi(L_i)|L_j) = i(i+1)(L_i|L_j)$ mais on a aussi $(\varphi(L_i)|L_j) = (L_i|\varphi(L_j)) = j(j+1)(L_i|L_j)$ d'où $\boxed{(L_i|L_j) = 0}$. Par conséquent, la famille $(L_n, n \in \mathbb{N})$ est orthogonale.

9. Le polynôme $XL_n(X)$ est de degré $n+1$ donc on le décompose dans la base $(L_0, ..., L_{n+1})$ en $XL_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k L_k(X)$. Par orthogonalité, $(XL_n(X)|L_j(X)) = \alpha_j ||L_j(X)||^2$.
   Or, $(XL_n(X)|L_j(X)) = (L_n(X)|XL_j(X))$, toujours par orthogonalité, $(L_n(X)|XL_j(X)) = 0$ pour $j \leqslant n-2$.
   Par conséquent, $XL_n(X)$ n'est combinaison linéaire que de $L_{n-1}(X), L_n(X)$ et $L_{n+1}(X)$:
   $XL_n(X) = \alpha_{n-1}L_{n-1}(X) + \alpha_n L_n(X) + \alpha_{n+1}L_{n+1}(X)$.
   En examinant la parité des deux membre, on trouve que $\alpha_n = 0$. Pour $X = 1$, on trouve que $\alpha_{n-1} + \alpha_{n+1} = 1$ et en comparant les termes de degré $n+1$ dans chacun des deux membres, on trouve que $\dfrac{(2n)!}{2^n(n!)^2} = \alpha_{n+1} \times \dfrac{(2n+2)!}{2^{n+1}((n+1)!)^2}$. D'où $\alpha_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n+1}$ et $\alpha_{n-1} = \dfrac{n}{2n+1}$.
   En conclusion : $\boxed{(n+1)L_{n+1}(X) - (2n+1)XL_n(X) + nL_{n-1}(X) = 0}$

10. D'après ce qui précède, L_{n+1} est orthogonal à $(L_0, ..., L_n)$ qui est une famille échelonnée, donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Par conséquent, $\boxed{L_{n+1} \in (\mathbb{R}_n[X])^{\perp}}$.

11. Raisonnons par l'absurde : supposons que L_{n+1} ne s'annule que k fois dans l'intervalle $]-1, 1[$ avec k compris entre 0 et n. Notons $x_1, ..., x_j$ les réels $\in]-1, 1[$ où L_{n+1} s'annule en changeant de signe (i.e. de multiplicité impaire). Par hypothèse, $j \leqslant k \leqslant n$. Notons $Q = \displaystyle\prod_{i=1}^{j}(X - x_i)$ si $j > 0$ et

$Q = 1$ si $j = 0$. Alors Q et L_{n+1} s'annulent en changeant de signe sur $]-1, 1[$ pour les mêmes valeurs $x_1, ..., x_j$. Par conséquent , $Q \times L_{n+1}$ est de signe constant. Or $L_{n+1} \perp Q \iff \displaystyle\int_{-1}^{1} L_{n+1}(t)Q(t)dt = 0$, et $t \mapsto L_{n+1}(t)Q(t)$ est une fonction continue et de signe constant sur $[-1, 1]$, son intégrale n'est par conséquent nulle que si cette fonction est-elle même nulle. Cela entraînerait donc que $L_{n+1} \times Q$ aurait une infinité de racines et serait le polynôme nul, ce qui est contradictoire car ni L_{n+1}, ni Q ne sont nuls.
On en déduit que L_{n+1} possède exactement $n + 1$ racines dans l'intervalle $]-1, 1[$.

12. $L'_{n+1} = (n + 1)a_{n+1}X^n + Q_0$ avec $\deg Q_0 \leqslant n - 1$, que l'on peut également écrire :
$L'_{n+1} = (n + 1)\dfrac{a_{n+1}}{a_n}L_n + Q_1$ avec $\deg Q_1 \leqslant n - 1$ or $L_n \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^{\perp}$
donc $(L'_{n+1}|L_n) = (n + 1)(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}L_n|L_n) + (Q_1|L_n) = (n + 1)\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \|L_n\|^2$.

13. $\|L_n\|^2 = \displaystyle\int_{-1}^{1} L_n(t)^2dt = \left[xL_n(x)^2\right]_{-1}^{1} - 2\int_{-1}^{1} tL_n(t)L'_n(t)dt = 2 - 2\int_{-1}^{1} tL_n(t)L'_n(t)dt.$

14. On a $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{2}\dfrac{(2n + 2)(2n + 1)}{(n + 1)^2} = \dfrac{2n + 1}{n + 1}$ donc $(L'_{n+1}|L_n) = (2n + 1)\|L_n\|^2$.
De plus, $L'_{n+1}(X) = XL'_n(X) + (n + 1)L_n(X)$ donc $(L'_{n+1}|L_n) = (XL'_n(X)|L_n(X)) + (n + 1)\|L_n\|^2$.
Or, d'après la question précédente : $(XL'_n(X)|L_n(X)) = \displaystyle\int_{-1}^{1} tL_n(t)L'_n(t)dt = 1 - \frac{1}{2}\|L_n\|^2$.
On en déduit que $\boxed{\|L_n\|^2 = \dfrac{2}{2n + 1}}$.

15. On sait depuis la question 8) que la famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale et échelonnée en degré, ce qui en fait une base de $\mathbb{R}[X]$. Si l'on normalise cette famille, on obtient alors une BON.
Avec le calcul de la question précédente, posons alors $\widetilde{L_n} = \sqrt{\dfrac{2n + 1}{2}}L_n$. On peut donc affirmer sans trop d'appréhension que la famille $(\widetilde{L_n}, n \in \mathbb{N})$ est une BON de $\mathbb{R}[X]$.

16. Nous savons que L_{n+1} est un vecteur de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ normal à $\mathbb{R}_n[X]$.
Par conséquent, $d(X^{n+1}, \mathbb{R}_n[X]) = \left\|\dfrac{(X^{n+1}|L_{n+1})}{\|L^2_{n+1}\|}L_{n+1}\right\| = \dfrac{|(X^{n+1}|L_{n+1})|}{\|L_{n+1}\|}$.
Or , $X^{n+1} = \dfrac{1}{a_{n+1}}L_{n+1} + Q$ où Q est un polynôme de degré $\leqslant n$ donc $(X^{n+1}|L_{n+1}) = \dfrac{1}{a_{n+1}}\|L_{n+1}\|^2$.
Finalement $\boxed{d(X^{n+1}, \mathbb{R}_n[X]) = \dfrac{2^{n+1}((n + 1)!)^2}{(2n + 2)!}\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n + 1}}}$.

17. (a) $\|f - P\|^2 = \|f\|^2 + \|P\|^2 - 2(f|P) = \|f\|^2 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^2 - 2\sum_{k=0}^{n}\lambda_k c_k(f)$
d'où $\|f - P\|^2 = \|f\|^2 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(c_k(f))^2 + \sum_{k=0}^{n}(\lambda_k - c_k(f))^2$.
(b) Par conséquent, $\|f - P\|^2$ est minimale pour $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k(f)\widetilde{L_n}$ et on trouve $d_n(f) = d(f, \mathbb{R}_n[X]) = \|f\|^2 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(c_k(f))^2$.
(c) D'après la question précédente, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(c_k(f))^2 \leqslant \|f\|^2$. La série de terme général $c_k(f)$ est à termes positifs et est donc convergente car ses sommes partielles sont bornées, le terme général tend donc nécessairement vers 0. En conclusion : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} c_n(f) = 0}$.