Les polynômes de Legendre

«Quand on choisit le gendre, il faut le choisir bien
Et ce choix-là n'est pas affaire de rien ... »
Alexis Piron, *L'amant mystérieux*, Acte II, scène 8, 1776

- On pose $L_n(X) = \frac{1}{2^n(n!)} \frac{d^n}{dx^n}((x^2 - 1)^n)$.
- On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire : $(P|Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$.
- On définit l'application φ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même qui au polynôme P associe $\varphi(P) = \frac{d}{dx}((x^2 - 1)P'(x))$

- 1) Montrer que φ stabilise $\mathbb{R}_n[X]$. On appelle φ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par φ .
- 2) Donner la matrice de φ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
- 3) Montrer que φ est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}[X]$.
- 4) Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
- 5) En utilisant la formule de Leibniz, montrer que $L_n(X) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (x-1)^{n+k}(x+1)^k$.
En déduire $L_n(1)$ et $L_n(-1)$.
- 6) On pose $P_n(X) = (X^2 - 1)^n$. Etablir les relations suivantes :
 - a) $P'_{n+1}(X) - 2(n+1)XP_n(X) = 0$
 - b) $(X^2 - 1)P'_n(X) - 2nXP_n(X) = 0$
- 7) En déduire
 - a) $L'_{n+1}(X) = XL'_n(X) + (n+1)L_n(X)$.
 - b) $\varphi(L_n) = n(n+1)L_n$.
- 8) Montrer que la famille $(L_n, n \in \mathbb{N})$ est orthogonale.
- 9) En déduire que $XL_n(X)$ est combinaison linéaire de L_{n+1}, L_n et L_{n-1} puis que $(n+1)L_{n+1}(X) - (2n+1)XL_n(X) + nL_{n-1}(X) = 0$
- 10) Montrer que $L_{n+1} \in (\mathbb{R}_n[X])^\perp$.
- 11) En déduire que L_{n+1} possède exactement $n+1$ racines dans l'intervalle $] -1, 1[$.
- 12) On note a_n le coefficient dominant de L_n . Montrer que $(L'_{n+1}|L_n) = (n+1) \frac{a_{n+1}}{a_n} \|L_n\|^2$.
- 13) Montrer que $\|L_n\|^2 = 2 - 2 \int_{-1}^1 tL_n(t)L'_n(t)dt$.
- 14) En déduire $\|L_n\|^2$.
- 15) Donner une Base OrthoNormale de $\mathbb{R}[X]$.
- 16) Calculer $d(X^{n+1}, \mathbb{R}_n[X])$.
- 17) Soit f une fonction continue, définie sur $[-1, 1]$. On pose $\widetilde{L}_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} L_n$ et $c_n(f) = (f|\widetilde{L}_n)$.
 - a) Soit $P = \sum_{k=0}^n \lambda_k \widetilde{L}_k \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que $\|f - P\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n (c_k(f))^2 + \sum_{k=0}^n (\lambda_k - c_k(f))^2$.
 - b) En déduire $d_n(f) = d(f, \mathbb{R}_n[X])$.
 - c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n(f)$.