Notations

Si $A = (a_{k,\ell}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on appelle matrice conjuguée de A et on note $\overline{A}$, la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont le coefficient de la k-ième ligne et la ℓ-ième colonne est égal au conjugué $\overline{a}_{k,\ell}$ du complexe $a_{k,\ell}$, pour tout couple (k, ℓ) d'éléments de $\{1, \ldots, n\}$.

L'objectif de ce problème est d'établir **le théorème de d'Alembert-Gauss** appelé aussi **théorème fondamental de l'algèbre** qui affirme que "*tout polynôme non constant à coefficients complexes admet au moins une racine complexe*"... Il ne sera donc pas possible de l'utiliser ; on pourra tout de même utiliser le résultat élémentaire selon lequel *" tout polynôme du second degré à coefficients complexes se factorise sur* $\mathbb{C}$ *".*

A. Premiers résultats

1. (a) Montrer que tout polynôme à coefficient réels de degré impair possède au moins une racine réelle.
   (b) En déduire que tout endomorphisme d'un $\mathbb{R}$ e.v. de dimension impaire possède au moins une valeur propre.
   (c) **Application** : Existe-t-il une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A + I_3 = 0$?
2. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, et soient u et v deux endomorphismes de E qui **commutent**.
   (a) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda id_E)$ et $\mathrm{Im}\,(u - \lambda id_E)$ sont stables par u et v.
   (b) Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et n impair et distinct de 1 alors E possède au moins un sous-espace vectoriel strict de dimension impaire, et stable par les endomorphismes u et v.
3. Montrer par récurrence sur la dimension que deux endomorphismes *qui commutent* d'un espace vectoriel *réel* de dimension *impaire* possèdent au moins un vecteur propre commun.

B. Endomorphismes d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension impaire

On note i un complexe tel que $i^2 = -1$ et $\mathcal{F}$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $\mathcal{F} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\ ,\ M^T = \overline{M}\ \}$.

On suppose de plus que n est **impair**.

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel réel.
2. Vérifier que la famille constituée des éléments $E_{1,1}, \ldots, E_{n,n}, E_{k,\ell}+E_{\ell,k}, i(E_{k,\ell}-E_{\ell,k})$ avec $(k, \ell) \in \{1, \ldots, n\}^2$ et $k < \ell$, est une base de $\mathcal{F}$; quelle est alors la dimension de $\mathcal{F}$? quelle est sa parité ?
3. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; on considère les deux applications u et v définies sur $\mathcal{F}$ par
$$u(M) = \frac{1}{2}(AM + M\ {}^t\overline{A}), \quad v(M) = \frac{1}{2i}(AM - M\ {}^t\overline{A}).$$
   (a) Montrer que u et v sont des endomorphismes de $\mathcal{F}$.
   (b) Vérifier que u et v commutent puis justifier qu'ils possèdent au moins un vecteur propre commun.
   (c) On note $M_0 \in \mathcal{F}$ un vecteur propre commun aux endomorphismes u et v et on suppose que $u(M_0) = \lambda M_0$ et que $v(M_0) = \mu M_0$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
   Exprimer la matrice AM_0 en fonction de la matrice M_0 et montrer soigneusement que $\lambda + i\mu$ est une valeur propre de la matrice A.
4. (a) Justifier que tout endomorphisme d'un espace vectoriel complexe de dimension impaire possède au moins une valeur propre.
   (b) Montrer par récurrence sur la dimension que deux endomorphismes *qui commutent* d'un espace vectoriel complexe de dimension *impaire* possèdent au moins un vecteur propre commun.

C. Étude du cas général

On sait que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, n s'écrit de manière unique sous la forme $n = 2^k p$ où $k \in \mathbb{N}$ et p est un entier naturel impair.
On considère la propriété $\mathcal{P}_k$ suivante :

Pour tout entier naturel impair p, et tout espace vectoriel complexe E de dimension $2^k p$:
(i) *tout endomorphisme de E possède au moins une valeur propre ;*

(ii) *deux endomorphismes de E qui commutent possèdent au moins un vecteur propre commun.*

On se propose de montrer cette propriété par récurrence sur l'entier naturel k.

La propriété $\mathcal{P}_0$ vient d'être établie dans la section précédente. Soit donc $k \in \mathbb{N}^*$ et supposons la propriété $\mathcal{P}_\ell$ vraie pour tout entier naturel $\ell < k$; soit p un entier naturel impair et E un espace vectoriel complexe de dimension $2^k p$.

C.I. Étude de l'assertion (i) de $\mathcal{P}_k$

Soit f un endomorphisme de E ; on note A la matrice de f dans une base quelconque de E et on considère le sous-espace vectoriel , noté $\mathcal{G}$, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par

$$\mathcal{G} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \; ; M^T = -M \ \}.$$

1. Préciser la dimension du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathcal{G}$.
2. On considère les deux applications u et v définies sur $\mathcal{G}$ par

$$u(M) = (AM + M \ A^T), \quad v(M) = AM \ A^T.$$

   (a) Vérifier que u et v sont des endomorphismes de $\mathcal{G}$ et que u et v commutent.
   (b) Justifier soigneusement que les endomorphismes u et v possèdent au moins un vecteur propre commun.
   (c) On note $N_0 \in \mathcal{G}$ un vecteur propre commun aux endomorphismes u et v et on suppose que $u(N_0) = \lambda N_0$ et que $v(N_0) = \mu N_0$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.
      i. Vérifier que $(A^2 - \lambda A + \mu I_n)N_0 = 0$.
      Dans la suite, on notera W un vecteur colonne non nul de la matrice N_0 et on désignera par α et β les racines complexes du polynôme du second degré $X^2 - \lambda X + \mu$.
      ii. Vérifier que $(A - \alpha I_n)(A - \beta I_n)W = 0$
      iii. Justifier alors que α ou β est valeur propre de A et conclure .

C.II. Étude de l'assertion (ii) de $\mathcal{P}_k$

Soient f et g deux endomorphismes de E qui commutent ; on cherche à montrer que f et g ont au moins un vecteur propre commun.

1. Si f est une homothétie de E, justifier que f et g ont au moins un vecteur propre commun.
2. Si f n'est pas une homothétie de E, soit λ une valeur propre de f. On sait que les sous-espaces vectoriels $F_1 = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda id_E)$ et $F_2 = \mathrm{Im}\,(f - \lambda id_E)$ sont stables par f et g.
   (a) Si la dimension de l'un des s.e.v. F_1 ou F_2 s'écrit $2^\ell q$ avec $\ell < k$ et q impair, comment peut-on conclure ?
   (b) Sinon, c'est que l'un de ces 2 s.e.v. est de dimension $2^k q$ où q est impair et l'autre de dimension $2^k r$ avec r pair.
   Justifier alors que $q < p$ et indiquer comment on pourrait montrer que les endomorphismes f et g ont au moins un vecteur propre commun.

D. Retour au théorème fondamental de l'algèbre

Soit $P = X^n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ un polynôme unitaire de degré n à coefficients complexes ; on note f l'endomorphisme du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ canoniquement associée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A.
2. Justifier alors que le polynôme P possède au moins une racines complexe.
3. Montrer le théorème fondamental de l'algèbre.

* * *

N'est-ce pas qu'il est beau, Gauss ?