MATRICES A DIAGONALE PROPRE

1 EXEMPLES

1. (a) Le polynôme caractéristique de $M(\alpha)$ est

$$\begin{aligned}\chi_{M(\alpha)}(X) &= -X^3+\operatorname{tr}(M(\alpha))X^2-\operatorname{tr}(\operatorname{Com}(M(\alpha)))X+\det(M(\alpha))\\ &= -X^3+(5-\alpha)X^2-(8-3\alpha)X+(4-2\alpha)\\ &= (1-X)(2-X)((2-\alpha)-X).\end{aligned}$$

Les racines de $\chi_{M(\alpha)}$ sont bien les éléments diagonaux de $M(\alpha)$.

$\boxed{\text{Pour tout } \alpha, \text{ la matrice } M(\alpha) \text{ est une matrice à diagonale propre.}}$

(b) Si $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$ alors les valeurs propres de $M(\alpha)$ sont deux à deux distinctes, $M(\alpha)$ est diagonalisable.
Si $\alpha = 0$ les valeurs propres sont 1 de multiplicité 1 et 2 de multiplicité 2 .

$\operatorname{rg}(M(0)-2I_3) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} = 1$, la dimension de E_2 est donc 2 et $M(0)$ est diagonalisable.

Si $\alpha = 1$ les valeurs propres sont 1 de multiplicité 2 et 2 de multiplicité 1 .

$\operatorname{rg}(M(1)-I_3) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} = 2$, la dimension de E_1 est donc 1 et $M(0)$ n'est pas diagonalisable.

$\boxed{M(\alpha) \text{ est diagonalisable si et seulement si } \alpha \neq 1.}$

2. $\chi_A(X) = -X^3+\operatorname{tr}(A)X^2-\operatorname{tr}(\operatorname{Com}(A))X+\det(A) = -X^3-X.$
χ_A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ donc $\boxed{\text{la matrice } A \text{ n'est pas à diagonale propre}}$.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$.
$\chi_A(X) = X^2-(a+d)X+(ad-bc)$.
Si A est une MDP alors ses valeurs propres sont a et d et son polynôme caractéristique vaut alors $Q(X) = (X-a)(X-d) = X^2-(a+d)X+ad$.
Par conséquent la matrice A est une MDP si et seulement si $P_A = Q$, c'est à dire si et seulement si $bc = 0$. $\mathcal{E}_2$ est donc l'ensemble des matrices triangulaires.

2 TEST DANS LE CAS $n = 3$

4. Pour une MDP, le déterminant est égal au produit des éléments diagonaux.
Par conséquent, une MDP est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux sont tous non nuls
Pour obtenir l'exemple demandé, il suffit de prendre une matrice triangulaire, non diagonale et inversible :

$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

5. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. A est une matrice à diagonale propre si et seulement si son polynône caractéristique est égal à $(a_{11}-X)(a_{22}-X)(a_{33}-X)$
En développant ces deux polynômes et en identifiant leurs coefficients on trouve que

$$\boxed{A \text{ est une matrice à diagonale propre si et seulement si } \det A = \prod_{i=1}^{3} a_{ii} \text{ et } a_{12}a_{21}+a_{13}a_{31}+a_{23}a_{32} = 0}$$

6. (a) Si $(\det A = a_{11}a_{22}a_{33})$ et $(a_{12}a_{21}+a_{13}a_{31}+a_{23}a_{32} = 0)$ alors la matrice est MDP sinon la matrice n'est pas MDP.
(b) Les matrices à diagonale propre sont A_1, A_3, A_4, A_5, A_6 et A_8
(c) $a_{12}a_{21} = a_{13}a_{31} = a_{23}a_{32} = 0$

3 EXEMPLES DE MATRICES PAR BLOCS

7. (a) Si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ est une matrice par blocs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et si les matrices A et C sont des matrices carrées d'ordre r et s à diagonale propre, alors M est une matrice à diagonale propre. En effet, $\chi_M(X) = \det\begin{pmatrix} A - XI_r & B \\ 0 & C - XI_s \end{pmatrix} = \det(A - XI_r)\det(C - XI_s) = \chi_A(X)\chi_C(X)$ Les matrices A et C étant à diagonale propre, les valeurs propres de M sont ses éléments diagonaux.

On prend alors $A = (1)$ (matrice à diagonale propre car triangulaire), $B = (111)$ et $C = A_5$ (définie à la question 6, matrice à diagonale propre dont tous les termes sont non nuls)

On obtient $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, M est à diagonale propre et contient bien treize réels non nuls

(b) Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ une matrice par blocs de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ où les matrices A, B et C sont des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui ne contiennent aucun terme nul.

De même qu'en a), $\chi_M(X) = \chi_A(X)\chi_C(X)$. Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$.

Si a ou d est valeur propre de A, alors χ_A est scindé et $\operatorname{tr} A = a + d$, les valeurs propres de A sont alors a et d, la matrice A est alors à diagonale propre et d'après la question 3. c'est une matrice triangulaire ce qui est impossible car la matrice A ne contient aucun terme nul.

Donc, les valeurs propres de A sont e et h et les valeurs propres de C sont a et d.

On en déduit $\chi_A(X) = (X - e)(X - h)$ et $\chi_C(X) = (X - a)(X - d)$.

En développant ces polynômes et en identifiant leurs coefficients, on obtient les relations : $\begin{cases} a + d = e + h \\ ad - bc = eh \\ eh - gf = ad \end{cases}$

Il suffit de trouver des réels a, b, c, d, e, f, g et h tous non nuls vérifiant ces équations et de prendre une matrice B quelconque ne contenant aucun terme nul.

Par exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

On obtient : $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

4 QUELQUES PROPRIETES

8. (a) On note $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Les valeurs propres de A sont $a_{11}, a_{22} \dots a_{nn}$.

Les valeurs propres de $aA + bI_n$ sont $a \cdot a_{11} + b, a \cdot a_{22} + b, \dots, a \cdot a_{nn} + b$.

Ce sont les termes diagonaux de $aA + bI_n$, $\boxed{aA + bI_n \text{ est donc une matrice à diagonale propre}}$.

Les termes diagonaux et les valeurs propres d'une matrice et de sa transposée sont les mêmes, et $(aA + bI_n)^T = aA^T + bI_n$, $\boxed{aA^T + bI_n \text{ est donc une matrice à diagonale propre}}$.

(b) La réponse est non. Prenons par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ qui est diagonalisable et de valeurs propres 0 et 2. Cette matrice n'est pas une MDP et est semblable à une matrice diagonale qui est une MDP.

9. Soit $A \in \mathcal{E}_n$, pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_p = A - \dfrac{1}{p} I_n$.

D'après la question précédente, U_p est une matrice à diagonale propre.

D'autre part, $\det U_p = \chi_A\left(\frac{1}{p}\right)$ est nul si et seulement si $\frac{1}{p}$ est valeur propre de A.

U_p est donc inversible sauf pour un nombre fini de valeurs de p.

Il existe donc $P_0 \in \mathbb{N}$ tel que la suite $(U_p)_{p \geqslant P_0}$ soit une suite d'éléments de G_n. Cette suite converge vers A.

De la caractérisation séquentielle de la densité, on déduit que $\boxed{G_n \text{ est dense dans } \mathcal{E}_n}$.

10. (a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice réelle symétrique donc elle est diagonalisable et aussi trigonalisable, mais d'après la question 3., elle n'est pas à diagonale propre.

Une matrice trigonalisable n'est donc pas nécessairement à diagonale propre.

(b) Par définition, le polynôme caractéristique d'une matrice à diagonale propre est scindé, une telle matrice est donc trigonalisable.

(c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si A est semblable à une matrice B à diagonale propre, alors $\chi_A = \chi_B$ et χ_B est scindé, donc χ_A est scindé.

Réciproquement, si χ_A est scindé, alors A est semblable à une matrice triangulaire supérieure, or toute matrice triangulaire est à diagonale propre donc A est semblable à une matrice à diagonale propre.

$\boxed{\text{En conclusion : } A \text{ est semblable à une matrice à diagonale propre si et seulement si } \chi_A \text{ est scindé.}}$

11. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Comme toute matrice triangulaire est à diagonale propre, il suffit d'écrire A comme une somme de deux matrices triangulaires :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Pour tout $n \geqslant 2$ il existe une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui n'est pas à diagonale propre, par exemple la matrice par blocs $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Cette matrice s'écrit comme somme de deux matrices à diagonale propre, donc $\boxed{\mathcal{E}_n \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

5 MATRICES SYMETRIQUES ET MATRICES ANTISYMETRIQUES

12. (a) A est une matrice réelle et symétrique donc il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^T$.

$\operatorname{tr}\left(A^T A\right) = \operatorname{tr}\left(PDP^T PDP^T\right) = \operatorname{tr}\left(PDDP^T\right) = \operatorname{tr}\left(D^2\right)$

(car PD^2P^T est semblable à D^2 et deux matrices semblables ont la même trace.)

Or $\operatorname{tr}\left(A^T A\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$ et $\operatorname{tr}\left(D^2\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$, donc

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$$

(b) Si de plus A est une matrice à diagonale propre, alors les valeurs propres de A sont $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$.

Donc $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j \neq i}^{n} a_{ij}^2 = 0$, tous les coefficients non diagonaux de A sont donc nuls et on en déduit que A est une matrice diagonale.

Réciproquement, toute matrice diagonale est à diagonale propre.

$\boxed{\text{Les matrices symétriques réelles à diagonale propre sont donc les matrices diagonales.}}$

13. (a) A est antisymétrique, donc tous ses éléments diagonaux sont nuls et comme elle est à diagonale propre, son polynôme caractéristique est scindé et toutes ses valeurs propres sont nulles. On a donc $\chi_A(X) = X^n$ et par le TCHeu $A^n = 0$.

$\left(A^T A\right)^n = (-AA)^n = (-1)^n A^{2n} = 0$ .D'où $\boxed{\left(A^T A\right)^n = 0}$.

(b) $A^T A$ est une matrice réelle symétrique donc elle est diagonalisable.

$\left(A^T A\right)^n = 0$ donc toutes les valeurs propres de $A^T A$ sont nulles. On en déduit $A^T A = 0$

(c) De ce qui précède, on déduit que $\operatorname{tr}\left(A^T A\right) = 0$ donc $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 0$. $\boxed{A \text{ est donc la matrice nulle.}}$

6 DIMENSION MAXIMALE D'UN ESPACE VECTORIEL INCLUS DANS $\mathcal{E}_n$

14. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que l'on ait $F \subset \mathcal{E}_n$.
De la question 15., on déduit $F \cap \mathcal{A}_n = \{0\}$. Donc $\dim F + \dim \mathcal{A}_n = \dim(F + \mathcal{A}_n) \leqslant \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2$
On en déduit $\dim F \leqslant n^2 - \dim \mathcal{A}_n = n^2 - \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$ d'où $\boxed{\dim F \leqslant \dfrac{n(n+1)}{2}}$.
Le sous-espace des matrices triangulaires supérieures est de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et il est inclus dans $\mathcal{E}_n$
La dimension maximale d'un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $F \subset \mathcal{E}_n$ est donc $\boxed{\dfrac{n(n+1)}{2}}$.

16. On prend pour F l'ensemble des matrices M de la forme $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}), B \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ triangulaire inférieure.

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & \cdots & m_{1n} \\ 0 & m_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & m_{32} & m_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & m_{n2} & \cdots & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

L'ensemble de ces matrices est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ qui n'est pas constitué uniquement de matrices triangulaires.
Les matrices A et C sont à diagonale propre et d'après ce que l'on a vu dans la question 8., on en déduit que M est à diagonale propre et que donc $F \subset \mathcal{E}_n$.
On a déterminé un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $F \subset \mathcal{E}_n$, de dimension maximale mais tel que F ne soit pas constitué uniquement de matrices triangulaires.