MATRICES DONT LES VALEURS PROPRES SONT SUR LA DIAGONALE

Les matrices diagonales et les matrices triangulaires sont des exemples triviaux de matrices ayant leurs valeurs propres sur la diagonale. Ce problème s'intéresse aux matrices vérifiant cette particularité.
Dans ce problème, toutes les matrices sont à coefficients réels et n est un entier, $n \geqslant 2$.
On dira qu'une matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une **matrice à diagonale propre**[1] si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$ et si ses termes diagonaux sont ses valeurs propres avec le même ordre de multiplicité, c'est-à-dire si le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - a_{ii})$.
On notera $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des **MDP** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

I EXEMPLES

1. Soient α un réel et $M(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 0 & 2 & -\alpha \\ 1 & 1 & 2-\alpha \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que, $\forall \alpha$, $M(\alpha)$ est une **MDP**.
(b) Quelles sont les valeurs de α pour lesquelles la matrice $M(\alpha)$ est diagonalisable ?

2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice antisymétrique A est-elle une **MDP** ?

3. Cas $n = 2$: Déterminer $\mathcal{E}_2$.

II TEST DANS LE CAS $n = 3$

4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une **MDP** soit inversible. Donner un exemple de **MDP** non diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, inversible et telle que A^{-1} est également une **MDP**. On donnera A^{-1}.

5. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, démontrer que A est une **MDP** si et seulement si, elle vérifie les deux propriétés suivantes :

$$\det A = \prod_{i=1}^{3} a_{ii} \quad \text{et} \quad a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{23}a_{32} = 0$$

6.

(a) Écrire un algorithme qui, à partir d'une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, teste si la matrice est ou n'est pas une matrice à diagonale propre. On considère que l'algorithme suppose connu le calcul du déterminant.
(b) Parmi les matrices suivantes, indiquer les **MDP** :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -8 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad A_6 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Conjecturer une condition nécessaire et suffisante sur les produits

---

1. **MDP** pour les intimes...

$$a_{12}a_{21}, \quad a_{13}a_{31} \quad \text{et} \quad a_{23}a_{32}$$

pour qu'une **MDP** $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible soit telle que A^{-1} soit également une **MDP** (on demande juste de donner cette conjecture sans chercher à la prouver).

III EXEMPLES DE MATRICES PAR BLOCS

7. Donner un exemple d'une **MDP** M de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ (matrice 4×4) dans chacun des cas suivants :
(a) La matrice M contient treize réels non nuls (on expliquera brièvement la démarche).
(b) $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où les matrices A, B et C sont toutes des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ne contenant aucun terme nul (on expliquera brièvement la démarche).

IV QUELQUES PROPRIÉTÉS

8. (a) Si $A \in \mathcal{E}_n$, montrer que, pour tout couple (a, b) de réels, $aA + bI_n$ et $aA^T + bI_n \in \mathcal{E}_n$.
(b) La **MDP**itude est-elle un invariant de similitude ?
9. On note G_n l'ensemble des **MDP** inversibles, montrer que G_n est dense dans $\mathcal{E}_n$.
10. Matrices trigonalisables
(a) Une matrice trigonalisable est-elle nécessairement une **MDP** ?
(b) Justifier qu'une matrice à diagonale propre est trigonalisable.
(c) Déterminer une CNS pour qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ soit semblable à une **MDP**.
11. Démontrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est somme de deux **MDP**. $\mathcal{E}_n$ est-il un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

V MATRICES SYMÉTRIQUES ET MATRICES ANTISYMÉTRIQUES

12. Matrices symétriques à diagonale propre
(a) Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont notées $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
Démontrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$.
(On pourra utiliser le fait qu'une matrice symétrique réelle est orthosemblable à une matrice diagonale)
(b) Déterminer l'ensemble des **MDP** symétriques réelles.
13. Matrices antisymétriques à diagonale propre
Soit A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre.
(a) Démontrer que $A^n = 0$ et calculer $\left(A^T A\right)^n$.
(b) Justifier que la matrice $A^T A$ est diagonalisable puis que $A^T A = 0$.
(c) Conclure .

VI DIMENSION MAXIMALE D'UN S.E.V. INCLUS DANS $\mathcal{E}_n$

14. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que l'on ait $F \subset \mathcal{E}_n$.
Démontrer que

$$\dim F \leqslant \frac{n(n+1)}{2}$$

Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $F \subset \mathcal{E}_n$?
15. Déterminer un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $F \subset \mathcal{E}_n$, de dimension maximale, mais tel que F ne soit pas constitué uniquement de matrices triangulaires.