PC $\overset{\star}{2}$

correction du DM sur les noyaux itérés

Partie I : Généralités

1. $x \in \operatorname{Ker} u^k \Rightarrow u^k(x) = 0 \Rightarrow u(u^k(x)) = 0 \Rightarrow u^{k+1}(x) = 0 \Rightarrow x \in \operatorname{Ker} u^{k+1}$.
   $\boxed{\text{La suite } \operatorname{Ker}(u^k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est donc croissante pour l'inclusion}}$.
   $y \in \operatorname{Im} u^{k+1} \Rightarrow \exists\, x \in E, y = u^{k+1}(x) \Rightarrow y = u^k(u(x)) \Rightarrow y \in \operatorname{Im} u^k$.
   $\boxed{\text{La suite } \operatorname{Im}(u^k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est donc décroissante pour l'inclusion.}}$
2. Dans $E = \mathbb{R}[X]$, pour $u : P \longmapsto P'$, $\operatorname{Ker} u^k = \mathbb{R}_{k-1}[X]$ et pour $v : P \longmapsto XP$, $\operatorname{Im} v^k = \{P, \operatorname{val}(P) \geqslant k+1\}$
3. Si $\operatorname{Im}(\,u^p\,) = \operatorname{Im}(\,u^{p+1}\,)$ alors soit $y \in \operatorname{Im}(\,u^{p+1}) \Longrightarrow \exists\, x\ \in E,\ y = u^{p+1}(x) = u(u^p(x))$ or $u^p(x) \in \operatorname{Im} u^p$ donc $\exists\, x'\,, u^p(x) = u^{p+1}(x')$, par conséquent $y = u(u^{p+1}(x')) = u^{p+2}(x') \in \operatorname{Im} u^{p+2}$.
   Ce qui entraîne, avec la première inclusion établie dans la question 1 : $\operatorname{Im} u^{p+2} = \operatorname{Im} u^{p+1}$ puis par récurrence immédiate : $\boxed{\text{pour tout } j \geqslant p,\ \operatorname{Im} u^j = \operatorname{Im} u^p}$.
4. si $\operatorname{Ker} u^p = \operatorname{Ker} u^{p+1}$ alors soit $x \in \operatorname{Ker} u^{p+2} \Rightarrow u^{p+2}(x) = 0 \Rightarrow u(x) \in \operatorname{Ker} u^{p+1} \Rightarrow u(x) \in \operatorname{Ker} u^p \Rightarrow x \in \operatorname{Ker} u^{p+1}$.
   Ce qui entraîne avec la première inclusion établie dans la question 1 : $\operatorname{Ker} u^{p+1} = \operatorname{Ker} u^{p+2}$ puis par récurrence immédiate : $\boxed{\text{pour tout } j \geqslant p,\ \operatorname{Ker} u^j = \operatorname{Ker} u^p}$.
5. (a) **Remarque :** L'hypothèse de finitude de la dimension ne porte que sur $\operatorname{Ker} u$, par contre, on n'a pas d'hypothèse sur la dimension de E, ce qui fait qu'on ne pourra pas utiliser le théorème du rang.
   Montrons dans un premier temps que $\operatorname{Ker} u^n$ est de dimension finie.
   Pour cela, nous allons établir le lemme suivant :

Soit u une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F. Si $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont de dimensions finies, alors E est de dimension finie.

   Démonstration du lemme : En admettant l'existence d'un supplémentaire S de $\operatorname{Ker} u$ dans E (qui est garantie si on admet l'axiome du choix), le théorème noyau/image nous dit que u induit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} u$, ce qui prouve que S est de dimension finie. On en déduit alors que $E = S \oplus \operatorname{Ker} u$ est de dimension finie (puisqu'engendré par la concaténation d'une base de S et d'une base de $\operatorname{Ker} u$).

   Montrons à présent que $\operatorname{Ker} u^n$ est de dimension finie par récurrence.
   L'hypothèse est vérifiée pour $n = 1$.
   Supposons qu'elle le soit également au rang n.
   On remarque que $x \in \operatorname{Ker} u^{n+1} \Longrightarrow u^{n+1}(x) = O_E \Longrightarrow u^n(u(x)) = O_E$.
   Par conséquent $u(\operatorname{Ker} u^{n+1}) \subset \operatorname{Ker} u^n$. On peut donc définir $v = u_{|\operatorname{Ker} u^{n+1}}^{|\operatorname{Ker} u^n} \in \mathcal{L}(\operatorname{Ker} u^{n+1}, \operatorname{Ker} u^n)$.
   $\operatorname{Ker} v = \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} u^{n+1} = \operatorname{Ker} u$ qui est de dimension finie.
   De plus $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker} u^n$ qui est également de dimension finie par hypothèse de récurrence.
   Donc $\operatorname{Ker} u^n$ est de dimension finie d'après le lemme.

   Soit à présent S_n un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u^n$ dans $\operatorname{Ker} u^{n+1}$.
   On a donc $\operatorname{Ker} u^{n+1} = S_n \oplus \operatorname{Ker} u^n$. D'où $\dim S_n = \dim \operatorname{Ker} u^{n+1} - \dim \operatorname{Ker} u^n$.
   On a vu que $u(\operatorname{Ker} u^{n+1}) \subset \operatorname{Ker} u^n$, par conséquent, on a aussi $u(S_n) \subset \operatorname{Ker} u^n$.
   On peut donc définir $w = u_{|S_n}^{|\operatorname{Ker} u^n} \in \mathcal{L}(S_n, \operatorname{Ker} u^n)$.
   $\operatorname{Ker} w = \operatorname{Ker} u \cap S_n \subset \operatorname{Ker} u^n \cap S_n = \{O_E\}$.
   Donc w est injective ce qui implique $\dim S_n = \dim w(S_n)$.
   Montrons que $\operatorname{Im} w \cap \operatorname{Ker} u^{n-1} = \{O_E\}$.
   Soit $y \in \operatorname{Im} w$, i.e. $\exists x \in S_n, y = u(x)$.
   Or si $y \in \operatorname{Ker} u^{n-1}$, alors $u^{n-1}(y) = u^n(x) = O_E \Longrightarrow x \in \operatorname{Ker} u^n$. Or $\operatorname{Ker} u^n$ et S_n sont en somme directe, par conséquent $x = O_E$ et $y = u(x) = O_E$.
   Donc $\operatorname{Im} w$ est un sev de $\operatorname{Ker} u^n$ en somme directe avec $\operatorname{Ker} u^{n-1}$.
   En terme de dimension, on obtient :

$$\dim \operatorname{Im} w + \dim \operatorname{Ker} u^{n-1} \leqslant \dim \operatorname{Ker} u^n \Longrightarrow \dim \operatorname{Im} w \leqslant \dim \operatorname{Ker} u^n - \dim \operatorname{Ker} u^{n-1}$$

Ce qui donne finalement $\dim \operatorname{Ker} u^{n+1} - \dim \operatorname{Ker} u^n \leqslant \dim \operatorname{Ker} u^n - \dim \operatorname{Ker} u^{n-1}$.

En conclusion : $\boxed{\text{la suite de terme général } \left(\dim(\operatorname{Ker} u^{n+1}) - \dim(\operatorname{Ker} u^n)\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$

(b) La suite de terme général $\left(\dim(\operatorname{Ker} u^{n+1}) - \dim(\operatorname{Ker} u^n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et est positive d'après la question 1).
Le théorème de la limite monotone nous dit alors que cette suite converge.
Par ailleurs, cette suite est à valeurs entières et nous savons grâce à l'exercice 1 qu'une suite d'entiers convergente est stationnaire.
Il existe donc N tel que $\dim(\operatorname{Ker} u^{n+1}) - \dim(\operatorname{Ker} u^n) = a$, $\forall n \geqslant N$.
Par télescopage, on en déduit que $\dim \operatorname{Ker} u^n = na - Na + \dim \operatorname{Ker} u^N$, $\forall n \geqslant N$, ce qui donne le résultat.

(c) Dans $E = \mathbb{K}[X]$, l'endomorphisme $u : P \longmapsto P^{(p)}$ fournit un exemple où l'on a égalité.

Partie II : Cas de la dimension finie :

1. Les dimensions des noyaux itérés vont en augmentant et sont des entiers compris entre 0 et n, qui est un ensemble fini. La suite des dimensions est donc stationnaire.
De plus, les noyaux formant une suite croissante pour l'inclusion, la stationnaritude de la suite des dimensions implique celle des noyaux itérés.
Le même raisonnement vaut pour les images itérées et leurs dimensions qui forment une suite décroissante.
D'après le théorème du rang, licite ici car E est de dimension finie, si ça stationne pour les noyaux, ça stationne pour les images et réciproquement.

Montrons que $E = N \oplus I$.
Par construction, on a $\mathbb{N} = \operatorname{Ker} u^r$ et $I = \operatorname{Im} u^r$, donc par le théorème du rang, $\dim N + \dim I = n$.
Il reste à montrer que $N \cap I = \{O_E\}$.
Soit $x \in N \cap I$, $x \in N \Longrightarrow u^r(x) = 0$, $x \in I \Longrightarrow \exists y \in E, x = u^r(y)$.
D'où $u^{2r}(y) = O_E \Longrightarrow y \in \operatorname{Ker} u^{2r} = \operatorname{Ker} u^r \Longrightarrow u^r(y) = O_E \Longrightarrow x = O_E$.

2. D'après la partie I, la suite des noyaux itérées est strictement croissante pour l'inclusion puis stationne à partir du rang r.
Il en va de même pour la suite des dimensions des noyaux itérés.
Or cette suite prend ses valeurs dans l'ensemble $[\![0, n]\!]$ qui est de cardinal $n + 1$.
L'ensemble $\dim \operatorname{Ker} u^0, \ldots \dim \operatorname{Ker} u^{n+1}$ est de cardinal $n + 2$, donc d'après le principe des tiroirs, cher à Johann Dirichlet, deux de ces entiers sont égaux. Notons les i et j avec $0 \leqslant i < j \leqslant n+1$. D'après la partie I, la suite des noyaux itérés stationne au moins à partir de $\operatorname{Ker} u^i$, ce qui prouve que le rang de stationnement r vérifie $\boxed{r \leqslant n}$.

3. Soit $x \in N \Rightarrow u^r(x) = 0 \Rightarrow u^{r+1}(x) = u^r(u(x)) = 0 \Rightarrow u(x) \in N$.
Soit $y \in I \Rightarrow y = u^r(x) \Rightarrow u(y) = u^r(u(x)) \Rightarrow u(y) \in I$.
Par conséquent : $\boxed{N \text{ et } I \text{ sont stables par } u}$.

4. $N = \operatorname{Ker} u^p$ donc $\left(u_{|N}^{|N}\right)^p = 0$.
Posons $v = u_{|I}^{|I}$, c'est un endomorphisme de I d'après la question précédente.
Soit $\operatorname{Ker} v = I \cap \operatorname{Ker} u \ \subset \ I \cap \operatorname{Ker} u^r \ = \ I \cap N = \{O_E\}$
Donc v est injective, et comme c'est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, alors v est bijective.

5. Posons $v = u_{|G}^{|G}$ et $w = u_{|F}^{|F}$.
Soit p l'indice de nilpotence de w.
On a $F = \operatorname{Ker} w^p \subset \operatorname{Ker} u^p \subset N$.
Par ailleurs, v est bijective donc pour tout $k \in \mathbb{N}, G = \operatorname{Im} v^k \subset \operatorname{Im} u^k$, donc $G \subset I$.
En considérant les dimensions, les deux égalités $E = F \oplus G$ et $E = N \oplus I$ couplées aux deux inclusions $F \subset N$ et $G \subset I$ entraînent nécessairement que $\boxed{F = N \text{ et que } G = I}$.

Partie III : Applications 1

1. $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} u^2$ d'où $\dim \operatorname{Ker} u \leqslant \dim \operatorname{Ker} u^2$.
D'après I.5.a) $\dim \operatorname{Ker} u^2 - \dim \operatorname{Ker} u \leqslant \dim \operatorname{Ker} u - \dim \operatorname{Ker} u^0$

d'où
$$\dim \operatorname{Ker} u \leqslant \dim \operatorname{Ker} u^2 \leqslant 2 \dim \operatorname{Ker} u$$

2. $\operatorname{Im} u^2 = \operatorname{Ker} u^3 \Longrightarrow u^5 = 0_{\mathcal{L}(E)} \Longrightarrow u^4 \circ u = 0_{\mathcal{L}(E)} \Longrightarrow \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u^4$.
Soit $x \in \operatorname{Ker} u^4 \Longrightarrow u(x) \in \operatorname{Ker} u^3 = \operatorname{Im} u^2$ donc il existe $x' \in E, u(x) = u^2(x')$
Donc $x - u(x') \in \operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} u^3 = \operatorname{Im} u^2$ donc il existe $x'' \in E, x - u(x') = u^2(x'')$.
Finalement, $x = u(x') + u^2(x'') \in \operatorname{Im} u$.
Conclusion $\boxed{\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u^4}$.

Partie IV : Applications à un endomorphisme nilpotent

1. $\boxed{\Rightarrow}$ est évident.
$\boxed{\Leftarrow}$: Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E. Pour tout e_i, $\exists\, k_i \in \mathbb{N}$, $u^{k_i}(e_i) = 0_E$.
Posons $k = \max(k_1, ..., k_n)$, qui existe car un nombre fini d'entiers admet un plus grand élément.
On a alors $u^k(e_i) = 0_E$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et par linéarité, $u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Conclusion : $\boxed{u \text{ est nilpotente.}}$
2. Ce résultat n'est pas vrai en dimension infinie avec par exemple $E = \mathbb{R}[X]$ et $u : P \longmapsto P'$.
3. On a vu dans la partie I que
$$(*) : \{0_E\} = \operatorname{Ker} u^0 \subset \operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} u^2 \subset ... \subset \operatorname{Ker} u^p = E$$
et que de plus, si l'une de ces inégalités est une égalité, alors la suite stationne à partir de là. Par conséquent, par minimalité de p tel que $\operatorname{Ker} u^p = \operatorname{Ker} u^{p+1}$, on en déduit que les inclusions de (*) sont toutes strictes.
4. Partons de $G_p \oplus \operatorname{Ker} u^{p-1} = E$.
Comme, $\operatorname{Ker} u^{p-1} = G_{p-1} \oplus \operatorname{Ker} u^{p-2}$, on a - par associativité de la somme directe - $G_p \oplus G_{p-1} \oplus \operatorname{Ker} u^{p-2}$ et ainsi de suite.
Comme, en fin de chaîne, on a $G_1 \oplus \operatorname{Ker} u^0 = \operatorname{Ker} u$ ce qui revient à $G_1 = \operatorname{Ker} u$, on obtient
$\boxed{E = G_1 \oplus G_2 \oplus ... \oplus G_p}$
5. Par le théorème de recollement, on obtient une base de E en recollant une base $\mathcal{B}_1$ de G_1, ..., une base $\mathcal{B}_p$ de G_p.
Les vecteurs de G_1 sont dans $\operatorname{Ker} u$ donc leurs image par u sont nulles.
Les vecteurs de G_2 sont dans $\operatorname{Ker} u^2$ mais pas dans $\operatorname{Ker} u$, leurs images par u sont donc dans $\operatorname{Ker} u$ et sont donc combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{B}_1$.
Les vecteurs de G_3 sont dans $\operatorname{Ker} u^3$ mais pas dans $\operatorname{Ker} u^2$, leurs images par u sont donc dans $\operatorname{Ker} u^2$ et sont donc combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{B}_2$, etc ...
Par conséquent, la matrice de u dans cette base est triangulaire supérieure stricte par blocs
$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & 0 & A_2 & \ddots & \\ \hline & & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline & & & 0 & A_{n-1} \\ \hline & & & & 0 \end{array}\right)$$
donc triangulaire supérieure stricte.
6. $\dim \operatorname{Ker} u = 1$.
D'après III.1) , $1 \leqslant \dim \operatorname{Ker} u^2 \leqslant 2$.
Donc $\dim \operatorname{Ker} u^2 = 1$ ou 2. Si $\dim \operatorname{Ker} u^2 = 1$ alors par égalité des dimensions et l'inclusion établie dans la partie I, on obtient $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$ puis $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^p = E$ ce qui est impossible (si $\dim E \geqslant 2$).
Donc $\dim \operatorname{Ker} u^2 = 2$.
D'après I.5.a), on a $\dim \operatorname{Ker} u^3 - \dim \operatorname{Ker} u^2 \leqslant \dim \operatorname{Ker} u^2 - \dim \operatorname{Ker} u = 1$.
Donc $\dim \operatorname{Ker} u^3 = 2$ ou 3. Si $\dim \operatorname{Ker} u^3 = 2$ alors, par le même raisonnement que précédemment, $\operatorname{Ker} u^2 = \operatorname{Ker} u^3$ et la suite stationne à partir de 2, ce qui contredit la nilpotence de u si $\dim E \geqslant 3$.
En itérant ce raisonnement, on obtient que $\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!], \dim \operatorname{Ker} u^k = k}$.

7. Si $\dim \operatorname{Ker} u = 1$, alors $\dim \operatorname{Ker} u^{n-1} = n-1$ et $\dim \operatorname{Ker} u^n = n = \dim E$ d'après la question précédente, ce qui prouve que u est nilpotente d'indice n.
Réciproquement, si u est nilpotente d'indice n, la strictitude des inclusions

$$\{0_E\} = \operatorname{Ker} u^0 \subset \operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} u^2 \subset ... \subset \operatorname{Ker} u^n = E$$

implique celle des dimensions. On a donc une suite de $n+1$ entiers strictement croissante qui prennent leurs valeurs dans $[\![0, n]\!]$, ce qui impose $\dim \operatorname{Ker} u^k = k$ et en particulier $\dim \operatorname{Ker} u = 1$.
En conclusion : $\boxed{p = n \Longleftrightarrow \dim \operatorname{Ker} u = 1}$.