PC $\overset{\star}{2}$ Devoir de Maths à rendre pour le 25 septembre

Noyaux et Images itérés

Soit E un $\mathbb{K}$ e.v. et soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Partie I : Généralités

1. Montrer que la suite des s.e.v. $\mathrm{Ker}(u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion et que la suite des s.e.v. $\mathrm{Im}(u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.
2. Donner des exemples où ces suites sont strictement monotones.
3. Montrer que si $\exists p \in \mathbb{N}$, tel que $\mathrm{Im}(\,u^p\,) = \mathrm{Im}(\,u^{p+1}\,)$ alors la suite des images est constante à partir de ce rang. L'espace auquel elle est égale s'appelle *le coeur de* f , on le note I .
4. Montrer que si $\exists p \in \mathbb{N}$, tel que $\mathrm{Ker}(\,u^p\,) = \mathrm{Ker}(\,u^{p+1}\,)$ alors la suite des noyaux est constante à partir de ce rang. L'espace auquel elle est égale s'appelle *le nilespace de* f, on le note N.
5. On suppose que le noyau de u est de dimension finie.
   (a) Montrer que la suite de terme général $\Big(\dim(\mathrm{Ker}\, u^{n+1}) - \dim(\mathrm{Ker}\, u^n)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (b) En déduire qu'il existe des entiers a, b, N tels que $\forall n \geqslant N$, $\dim(\mathrm{Ker}\, u^n) = an + b$.
   (c) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, donner un exemple avec $\dim(\mathrm{Ker}\, u^n) \sim np$ quand n tend vers l'infini.

Partie II : Cas de la dimension finie :

On suppose que E est de dimension finie.

1. Montrer que les suites des noyaux et des images sont toujours stationnaires, et ce à partir d'un même rang r, (appelé *indice* de f). Montrer que le coeur et le nilespace sont supplémentaires.
2. On pose $n = \dim E$. Montrer que $r \leqslant n$.
3. Montrer que N et I sont stables par u.
4. Montrer que $u_{|N}^{|N}$ est nilpotent et que $u_{|I}^{|I}$ est bijectif.
5. Réciproquement, on suppose que $E = F \oplus G$, F et G sont stables par u, que $u_{|F}^{|F}$ est nilpotent et que $u_{|G}^{|G}$ est bijectif. Montrer que $F = N$ et que $G = I$.

Partie III : Applications 1

Soit E un $\mathbb{K}$ e.v. de dimension n et soit $u \in \mathcal{L}(E)$

1. Montrer que $\dim \mathrm{Ker}\, u \leqslant \dim \mathrm{Ker}\, u^2 \leqslant 2 \dim \mathrm{Ker}\, u$.
2. On suppose dans cette question que $\mathrm{Im}\, u^2 = \mathrm{Ker}\, u^3$. Montrer alors que $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Ker}\, u^4$.

Partie IV : Applications à un endomorphisme nilpotent

Soit E un $\mathbb{K}$ e.v. de dimension n et soit $u \in \mathcal{L}(E)$

1. Montrer que u est nilpotente si et seulement si $\forall x \in E, \exists k \in \mathbb{N},\ u^k(x) = 0_E$.
2. Ce résultat est-il vrai en dimension infinie ?
3. On suppose dans la suite que u est nilpotente. Soit p l'indice de nilpotence de u, montrer que
$$\{0_E\} = \mathrm{Ker}\, u^0 \subset \mathrm{Ker}\, u \subset \mathrm{Ker}\, u^2 \subset ... \subset \mathrm{Ker}\, u^p = E$$
et que ces inclusions sont strictes.
4. Soit pour $i \in [\![1, p]\!]$, G_i un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, u^{i-1}$ dans $\mathrm{Ker}\, u^i$, montrer que
$$E = G_1 \oplus G_2 \oplus ... \oplus G_p$$
5. En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle, la matrice de u est triangulaire supérieure stricte.
6. On suppose dans cette question que $\dim \mathrm{Ker}\, u = 1$.
   Montrer alors que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\dim \mathrm{Ker}\, u^k = k$.
7. En déduire que $p = n \iff \dim \mathrm{Ker}\, u = 1$.