PC*2 **DM 1 : Polynômes et Algèbre Linéaire** **A rendre pour le 25 septembre 2024**

Exercice : Théorème de Fermat pour les polynômes

Soient $A, B, C \in \mathbb{C}[X]$ tels que $A + B = C$. On suppose que A, B, C n'ont aucune racine commune et que l'un des trois polynômes est de degré > 0. On pose $D = A'B - AB'$.

1. Soit z une racine de ABC de multiplicité n. Montrer que z est racine de D de multiplicité $\geqslant n - 1$.
2. On note μ le nombre de racines distinctes de ABC.
   (a) Montrer que $\mu \geqslant \deg(A) + \deg(B) + \deg(C) - \deg(D)$.
   (b) Montrer que $\mu > \max\{\deg(A), \deg(B), \deg(C)\}$.
3. En déduire **le théorème de Fermat** pour les polynômes :
   L'équation $A^n + B^n = C^n$ n'a pas de solution dans $\mathbb{C}[X]$ si $n \geqslant 3$ sauf si il existe un polynôme P et trois complexes α, β, γ tels que $A = \alpha P, B = \beta P$ et $C = \gamma P$ avec $\alpha^n + \beta^n = \gamma^n$.

Problème

Soit E un $\mathbb{K}$ e.v. de dimension n.

I Soit f un endomorphisme nilpotent de E dont le noyau est de dimension 1.

1) Soit F un sev de E stable par f et distinct de $\{0_E\}$. Montrer que $\dim f(F) = \dim F - 1$.

2) En déduire que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\dim \operatorname{Im} f^k = n - k$ et $\dim \operatorname{Ker} f^k = k$

3) Déterminer tous les sev stables par f.

II Soient $f_1, ..., f_n$, n formes linéaires formant une famille libre.

1) Montrer que $f_1, ..., f_n$ est une base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

2) Montrer que $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ x & \longmapsto & \Big(f_1(x), ..., f_n(x)\Big) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

3) En déduire que $\operatorname{Ker} f_1 \cap ... \cap \operatorname{Ker} f_n = \{0_E\}$.

4) Soit F un sev de E et H un hyperplan de E. Montrer que $\dim F \cap H \geqslant \dim F - 1$.

5) Montrer que si $g_1, ..., g_k$ sont k formes linéaires formant une famille libre, alors $\dim\Big(\operatorname{Ker} g_1 \cap ... \cap \operatorname{Ker} g_k\Big) = n - k$

III Matrices magiques :

Définition : On définit les formes linéaires $f_1, \ldots, f_n$ et $g_1, \ldots, g_n$ suivantes sur $M_n(\mathbb{R})$:
- Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, et tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, $f_i(A)$ est la somme des coefficients de la ligne i.
Autrement dit, $f_i(A) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}$ et $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $g_j(A) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{k,j}$.

Définition : On dit qu'une matrice A est *semi-magique* si $f_1(A) = \cdots = f_n(A) = g_1(A) = \cdots = g_n(A)$. On notera $\mathcal{SM}$ l'ensemble des matrices semi-magiques.

Définition : On définit deux forme linéaires "trace" et "anti-trace" sur $M_n(\mathbb{R})$, qu'on notera resp. Tr et ATr comme suit : pour tout $A \in M_n(\mathbb{K}), \operatorname{Tr}(A) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{k,k}$ et $\operatorname{ATr}(A) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{k,n+1-k}$.

Définition : On dit qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est *magique* si, et seulement si, $f_1(A) = \cdots = f_n(A) = g_1(A) = \cdots = g_n(A) = \operatorname{Tr}(A) = \operatorname{ATr}(A)$. On notera $\mathcal{MG}$ l'ensemble des matrices magiques.

1) Cas particulier $n = 3$.

a) Déterminer toutes les matrices magiques antisymétriques dans $M_3(\mathbb{R})$.

b) Déterminer toutes les matrices magiques symétriques de trace nulle dans $M_3(\mathbb{R})$.

c) Déduire la forme de toutes les matrices magiques symétriques dans $M_3(\mathbb{R})$.

d) Quelle est la dimension de l'e.v. des matrices magiques pour $n = 3$?

2) Cas général :

a) Montrer que les formes linéaires $(f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n)$ sont liées.

b) Montrer que la famille de formes linéaires $(f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_{n-1})$ est libre.

c) En déduire la dimension de l'e.v. des matrices A telles que $f_1(A) = \cdots = f_n(A) = g_1(A) = \cdots = g_n(A) = 0$

d) En déduire la dimension de l'e.v. des matrices semi-magiques .

3) Déterminer la dimension de l'espace des matrices magiques de taille n.