

Mines - 2024 - Maths

Wassim Aliouane PCX2

9 Juillet 2024

Note attendue : 15-16

Note obtenue : 18

1 Sujet

Exercice 1, avec 15min de préparation :

- 1) Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$, non trigonalisable dans $\mathbb{R}$. Montrer que A diagonalisable dans $\mathbb{C}$.
- 2) Soit $A \in M_4(\mathbb{R})$. Montrer que l'une des conditions suivantes est vérifiée :
 - (i) A trigonalisable dans $\mathbb{R}$
 - (ii) A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$
 - (iii) A est semblable à une matrice par blocs de la forme $\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ où $(B, C) \in M_2(\mathbb{R})^2$

Exercice 2, sans préparation

On définit :

$$U_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt, V_n = U_{2n} + U_{2n+1}$$

Nature en fonction de α de $\sum U_n$? De $\sum V_n$?

2 Déroulé de l'oral

Exercice 1:

1) Il faut regarder le polynôme caractéristique. Cette question n'est pas dure, mais pénible à rédiger. Je me suis donc contenté de tout dire à l'oral, ça lui allait. $\chi_A = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)$. Impossible d'avoir $\alpha = \beta = \gamma$, sinon A serait trigonalisable sur $\mathbb{R}$. Si α est racine du polynôme, son conjugué l'est aussi. On a donc forcément le polynôme suivant, scindé à racines simples : $\chi_A = (X - \alpha)(X - \bar{\alpha})(X - \beta)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \notin \mathbb{R}$. D'où le résultat.

2) Je n'ai pas fini la question pendant la préparation. On suppose non(i) et non(ii). Montrons qu'on a (iii). Par un raisonnement analogue à q°1, on montre qu'on a nécessairement la forme suivante du polynôme caractéristique : $\chi_A = (X - a)^2(X - \bar{a})^2$, $a \notin \mathbb{R}$

$$\text{Lemme 1 : } \exists Z \in \mathbb{C}^4, \begin{cases} (A - aI_4)Z & \neq 0 \\ (A - aI_4)^2 Z & = 0 \end{cases} \text{ (on a donc aussi pour ce même } Z, \begin{cases} (A - \bar{a}I_4)\bar{Z} & \neq 0 \\ (A - \bar{a}I_4)^2 \bar{Z} & = 0 \end{cases})$$

Effectivement, $\text{Ker}((A - aI_4)^2) \subset \text{Ker}(A - aI_4)$, et l'inclusion est stricte, car le sous-espace propre associé à a est forcément de dimension 1 (sinon A serait diagonalisable).

Lemme 2 : $((A - aI_4)Z, (A - \bar{a}I_4)\bar{Z}, Z, \bar{Z}) = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une famille libre

On va noter $a = \beta + i\gamma$, avec nécessairement $\gamma \neq 0$, et on prend comme d'habitude $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{C}^4$ tel que $\sum_{i=1}^4 \lambda_i e_i = 0$

En remarquant que $(A - \bar{a}I_4)$ et $(A - aI_4)$ commutent, en multipliant à gauche par $(A - aI_4)(A - \bar{a}I_4)$ on se retrouve avec :

$$\lambda_2(A - aI_4)(A - \bar{a}I_4)Z + \lambda_4(A - aI_4)(A - \bar{a}I_4)\bar{Z} = 0$$

En remarquant que $\begin{cases} (A - \bar{a}I_4) &= (A - aI_4) + 2i\gamma I_4 \\ (A - aI_4) &= (A - \bar{a}I_4) - 2i\gamma I_4 \end{cases}$, on obtient :

$$2i\gamma\lambda_2(A - aI_4)Z = 2i\gamma\lambda_4(A - \bar{a}I_4)\bar{Z}$$

Comme $\gamma \neq 0$ et que $(A - aI_4)Z$ et $(A - \bar{a}I_4)\bar{Z}$ sont des vecteurs propres associés à respectivement a et $\bar{a}$, donc libres, on a que $\lambda_2 = \lambda_4 = 0$. En effectuant exactement la même chose une nouvelle fois, on a bien la liberté de la famille. Là il me demande la matrice de A dans cette base. Le calcul est pénible, je vous l'épargne, il est à base de $+aI_4 / -aI_4$, elle

est de la forme $\begin{pmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{a} & \bar{a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (plus trop sûr de ça).

Il faut maintenant trouver une base de $\mathbb{R}^4$ qui fonctionne et qui donnerait une matrice de la forme voulue. La base précédente peut s'écrire de la forme $(e, \bar{e}, f, \bar{f})$. Je propose alors de prendre $(\frac{e+\bar{e}}{2}, \frac{e-\bar{e}}{2i}, \frac{f+\bar{f}}{2}, \frac{f-\bar{f}}{2i})$. Il me demande de montrer que c'est une base, puis immédiatement après il me dit qu'il me fait finalement confiance pour ça, et qu'il faut continuer. Les calculs sont affreux pour trouver la matrice dans cette base, ça me prend pas mal de temps. Je ne finis pas, il me dit que j'étais pas loin, et que les vecteurs ne sont pas dans le bon ordre mais que c'est ça. On passe à l'exercice 2.

Exercice 2 :

Changement de variable classique + CSSA : $U_n = (-1)^n \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{(t+n\pi)^\alpha} dt$. Il faut alors $\alpha > 0$ (Rq : il me demande de bien expliciter la divergence pour $\alpha \leq 0$).

On a par ailleurs : $V_n = \frac{1}{(2n\pi)^\alpha} \int_0^\pi \sin(u) \left(\left(1 + \frac{u}{2n\pi}\right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{u+\pi}{2n\pi}\right)^{-\alpha} \right) du$. Si $\alpha = 0$, c'est bon. Sinon, on peut trouver un équivalent de V_n . Là il me dit de faire attention à la rigueur des DLs, on est dans une intégrale. Il me fait écrire : $(1+u)^{-\alpha} = 1 - \alpha u + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}u^2 + u^3 R(u)$ où R est bornée. (Il m'a demandé à quel ordre je voulais le faire, j'ai dit 3 car je pensais que des termes se simplifiaient, mais l'ordre 1 suffit.). On trouve : $V_n = \frac{1}{(2n\pi)^\alpha} \int_0^\pi \sin(u) \left(\frac{\alpha\pi}{2n\pi} + u^2 R(u) \right) du$ où R bornée. On a alors que V_n est équivalent à quelque chose en $O(\frac{1}{n^{\alpha+1}})$, on conclut par critère de Riemann.

Bilan : $\sum U_n$ converge si $\alpha > 0$ et $\sum V_n$ converge si $\alpha \geq 0$

3 Commentaire

Examineur que beaucoup ont trouvé insupportable, hautain. Pour ma part, je ne l'ai pas trouvé particulièrement désagréable. Il demande vite de passer à autre chose lorsqu'il comprend qu'on sait faire (un peu comme Mme David, pour ceux qui l'ont eu en khôlle). Il parle/explique aussi très vite. Je trouve que le premier exercice (la 2e question) est excessivement dur pour Mines-Ponts (par rapport à tout les exercices du concours que j'ai pu voir). Le trouver seul en 15min me semble assez compliqué, après je n'ai peut-être pas été assez bon, en tout cas il m'a aidé pour les calculs par moments. Le deuxième est une blague à côté, c'est du cours. Oral à Chimie ParisTech, c'était sympa.

Nom : MESSENGER Cristian

Concours : Mines

Épreuve : Maths

Note attendue : 19

Note obtenue : 20

Exercice 1 (avec préparation de 15 min):

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $(I_n - A)$ est inversible.

2) Soit $A \in \mathcal{I}_n(\mathbb{R})$, montrer que :

$$(\text{tr}(A))^2 \leq \text{rg}(A) \text{tr}(A^2)$$

Exercice 2 (sans préparation):

Soit $f_n: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^n + x^{n-1} + 2x - 1$$
 pour $n \in \mathbb{N}^*$,
 $n \geq 2$

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$

Montrer que f_n admet un unique point fixe x_n sur $\mathbb{R}^+$.

2) Montrer que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$

Déroulé: J'ai eu le temps de finir le premier exercice pendant la préparation, l'examinateur me laisse alors présenter ce que j'ai fait.

1) Je suppose par l'absurde que 1 est valeur propre de A.
On a alors $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ tel que $AX = X$

D'où: $X^T A^T = X^T = -X^T A$

$$\Rightarrow -X^T A X = X^T X = \|X\|^2$$

On: $AX = X \Rightarrow X^T A X = X^T X = \|X\|^2$

D'où: $\|X\| = 0$ absurde

Donc 1 n'est pas valeur propre de A ; donc $(I_n - A)$ inversible.

2) On note $r = \text{rg}(A)$; $\dim(\text{Ker}(A)) = n - r$

Comme A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ d'après le théorème spectral (il me demande bien le nom du théorème) alors 0 est valeur propre d'ordre $(n - r)$.

On note $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres non nulles de A.

On a donc: $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^r \lambda_i$ et $\text{Tr}(A^2) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^r \lambda_i^2$

On veut donc montrer que: $\left(\sum_{i=1}^r \lambda_i \right)^2 \leq r \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i^2 \right)$

Nom :

Concours :

Épreuve :

Note attendue :

Note obtenue :

En notant $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ on a alors d'après

l'inégalité de Cauchy - Schwarz :

$$(X^T Y)^2 = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^2 \leq \|X\|^2 \|Y\|^2 = n \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \right)$$

Étant donné qu'il est prévu environ 25 min par exercice et que cela ne fait que 10-15 min, l'examinateur cherche une question supplémentaire et dit : "Vous avez utilisé le théorème spectral, mais est-ce que une matrice de $S_n(\mathbb{C})$ serait aussi diagonalisable?"

Je réfléchis un peu, je n'ai pas de contre-exemple en tête mais je dis que si c'était le cas ce serait sans doute dans le cours car ce serait bien pratique.

Il rigole et me dit : "Effectivement, donc on va chercher un contre-exemple".

Je prends $n=2$; $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$

Je dis qu'on voudrait une valeur propre λ d'ordre 2 avec $A \neq \lambda I_2$.

Je calcule $X_A(x) = x^2 - x(a+b) + ab - c^2$

On veut donc $\Delta = (a+b)^2 - 4ab + 4c^2 = (a-b)^2 + 4c^2 = 0$

$$\Rightarrow c = \pm i \left(\frac{a-b}{2} \right)$$

On peut donc prendre $A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

Il me dit à la fin de retenir l'exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 2:

1) Je pose $g_n(x) = f_n(x) - x = x^n + x^{n-1} + x - 1$

$$g_n'(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + 1 > 0 \quad (x \in \mathbb{R}^+)$$

$$\underline{\text{On:}} \begin{cases} g_n(0) = -1 < 0 \\ g_n(1) = 2 > 0 \end{cases}$$

g_n est continue et strictement croissante donc admet bien un unique point d'annulation $x_n \in]0; 1[$.

2) Je cherche d'abord à montrer la croissance de $(x_n)_{n \geq 2}$.

En effet, si par l'absurde, pour $n \geq 2$, on a $x_{n+1} < x_n$ alors:

$$x_{n+1}^{n+1} < x_n^n \quad ; \quad x_{n+1}^n < x_n^{n-1} \quad ; \quad x_{n+1} < x_n$$

$$\underline{\text{On:}} \quad x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1}^n + x_{n+1} = 1 = x_n^n + x_n^{n-1} + x_n$$

On les inégalités donnent: $x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1}^n + x_{n+1} < x_n^n + x_n^{n-1} + x_n$
absurde.

ORAUX 2024

Nom :

Concours :

Épreuve :

Note attendue :

Note obtenue :

Donc $x_{n+1} \geq x_n$.

Donc $(x_n)_{n \geq 2}$ est croissante et majorée par 1

donc converge d'après le théorème de la limite monotone (il me demande bien le nom du théorème, j'ai eu du mal à le retrouver il me dit : "la fonction était MONOTONE" et là je retrouve je lui dis merci il me dit "Ah non non je n'ai rien dit j'ai simplement dit que la fonction était monotone").

On note l cette limite, $l \in]0; 1]$.

Si par l'absurde $l \in]0; 1[$ alors :

$$\forall n \geq 2; \quad 0 < x_n \leq l < 1$$

Donc par encadrement on obtient $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

et $x_n^{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. On a aussi $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$

On: $\forall n \geq 2; \quad x_n^n + x_n^{n-1} + x_n = 1$

Par continuité et passage à la limite on obtient

$$x_n^n + x_n^{n-1} + x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l < 1 \text{ absurde.}$$

Donc $l = 1$.

Il reste 5 min, il me demande comment on pourrait avoir un développement limité de la suite.

Je propose de poser $v_n = x_n - 1$ et d'essayer

d'injecter cela dans la relation $x_n^n + x_n^{n-1} + x_n = 1$

mais on n'était tous les deux pas très convaincus que ça aboutisse...

Candidat, session: Timoléon Rescan, 2024

Epreuve: Maths (aux Mines de Paris)

Classe: PCX2

Concours: Mines-Ponts

Note attendue: 15

Note obtenue: 17

Enoncé

Exercice 1 (avec préparation):

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 , $x_0 \in]a, b[$ et $y_0 > f(x_0)$ tels qu'il existe un cercle C de centre (x_0, y_0) passant par $(x_0, f(x_0))$ et qui soit toujours au dessus de f . Montrer que $f'(x_0) = 0$

Exercice 2:

Soit E un espace vectoriel, p_1 et p_2 deux projecteurs.

(i) Montrer que $p_1 + p_2$ est un projecteur si et seulement si $p_1 p_2 = p_2 p_1 = 0$

(ii) Montrer que $p_1 + p_2$ est une symétrie si et seulement si $p_1 + p_2 = Id$

Exercice 3:

Soient $p_1 < p_2$ des nombres premiers, $n > p_2$ et q un entier compris entre 1 et n . On note E_i l'événement " p_i divise q ". Montrer que E_1 et E_2 sont indépendants si et seulement si il existe k, k_1 des entiers naturels tels que $n = k p_1 p_2 + k_1 p_1$ avec $k_1 p_1 < p_2$

Déroulé et éléments de correction

18h, troisième oral de la journée, en ayant déjà deux semaines d'orales dans les jambes. Je ne suis pas dans une forme fantastique (logique). Alors quand l'oral débute avec 15 min de retard, autant dire que je commençais à en avoir marre d'attendre. Bon finalement je rentre quand sort le candidat avant moi (Karim). C'est un examinateur très souriant qui m'ouvre, avec le style de Mr. Morin. J'ai donc 15 min de préparation en solo dans la salle, puis mon oral (les avantages de passer en dernier je suppose).

Je suis un peu déstabilisé en voyant un exercice avec de la géométrie, mais les idées viennent assez vite: comparer un point du cercle avec f , et regarder la différence de ces termes lorsque l'on se rapproche de x_0 (donc raisonner avec ε). Même si le dessin n'est pas fondamental ici, il permet quand même de comprendre la situation, et donc de savoir comment attaquer le problème (donc faites des dessins). A cause d'une erreur de calcul, je ne trouve pas le résultat durant le temps de préparation.

Lors du passage au tableau, je corrige mon erreur (trouvée en fin de préparation), mais comme le résultat obtenu ne permet pas de conclure, il me faut un peu de temps pour penser à faire un DL de f pour obtenir une relation qui donne une information sur le signe de $f'(x_0)$ et pouvoir conclure.

On passe donc au 2e exercice, dans lequel je reconnais la question 1. Je la fais vite (avec un jeu d'acteur que j'espère bon). La deuxième question, je bloque un peu, sans trouver de sens facile. Il faut une question appuyée de l'examineur pour que je remarque que le sens retour est évident (ouais la fatigue ouais). Le sens direct se fait par des magouilles similaires à la question 1.

Sur le dernier exercice, je suis beaucoup plus guidé. J'ai vu des probas et des nombres premiers, mon cerveau a un peu arrêté de tourner. Par chance, l'une des idées importantes de l'exercice me vient directement mais formulée de la mauvaise manière et mal justifiée:

$$P(p_1|q \text{ et } p_2|q) = P(p_1 p_2|q)$$

L'examineur (qui ne laissait pas trop les silences durer) me fait montrer ça avec rigueur. Il me guide aussi sur la piste générale de résolution, ce qui me permet de finir l'exercice à la fin de l'oral:

Sens réciproque: exprimer les probabilités des différents événements pour conclure

Sens direct: On fait des divisions euclidiennes

$$n = k(p_1 p_2) + r \text{ et } r = k_1 p_1 + r_1 = k_2 p_2 + r_2$$

On exprime alors les probabilités des événements qui sont indépendants, et on obtient une relation qui fait apparaître que $r_1 = 0$, ce qui permet de conclure.

Bilan

Finir la journée sur un tel oral fait plaisir. Examineur sympa, qui guidait "suffisamment" en fin d'oral. C'est dommage que j'aie parsemé mon travail d'erreurs assez grossières: un DL mal fait, un théorème de Gauss mal connu, un tableau pas toujours propre ("vous écrivez mal, vous allez vous perdre" m'a-t-il sorti), et quelques erreurs de calcul. J'ai mis de l'énergie à ce que j'ai fait (pour compenser l'effet 18h) mais pas toujours de la bonne manière.

Nom, Prénom : DECRULIE Albane

Concours, Epreuve : Mines - Puits, Maths

Examinateur : femme plutôt âgée, parle doucement mais est

Note : (éventuellement) assez sympathique

A scanner de préférence sous forme PDF et à envoyer à pcetoile2@gmail.com.

Sinon envoyer à M. Fagebaume, Lycée Louis-Le-Grand, 123 rue St-Jacques, 75005 Paris

Merci de noter le maximum d'informations sur le déroulement à proprement parler de l'oral : questions de cours, réactions/remarques de l'examinateur, dialogues croustillants, indications données pendant le déroulement de l'oral, etc ...

EXO 1 (avec préparation) Analyse.

Soit $\alpha > 0$. Etudier la convergence de :

$$\int_0^{+\infty} 1 + \ln(2\operatorname{sh}(x^\alpha)) - 2\operatorname{sh}(\ln(x^\alpha + 1)) \, dx$$

↳ Pendant la préparation, j'ai appris la convergence en $+\infty$ et des pistes pour celle en 0.

• On commence par poser $f: x \mapsto 1 + \ln(2\operatorname{sh}(x^\alpha)) - 2\operatorname{sh}(\ln(x^\alpha + 1))$ fonction définie et $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ par th. généraux

• en $+\infty$: l'idée est d'abord de regarder si est le pbm
 → on voit ici que c'est une forme indéterminée pour la limite → on voit les DL (et vu la tête des fct, ça ne va pas être joli)

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(\ln(x^\alpha + 1)) &= \frac{1}{2} [e^{\ln(x^\alpha + 1)} - e^{-\ln(x^\alpha + 1)}] = \frac{1}{2} \left[x^\alpha + 1 - \frac{1}{x^\alpha + 1} \right] \\ &= \frac{x^{2\alpha} + 2x^\alpha}{2(x^\alpha + 1)} \sim_{+\infty} \frac{x^{2\alpha}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln(e^{x^\alpha} - e^{-x^\alpha}) &= \ln(e^{x^\alpha}(1 - e^{-2x^\alpha})) = \ln(e^{x^\alpha}) + \ln(1 - e^{-2x^\alpha}) \\ &= x^\alpha - e^{-2x^\alpha} + o(e^{-2x^\alpha}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 - x^\alpha + x^\alpha - e^{-2x^\alpha} + o(x^\alpha) = o(x^\alpha)$$

Ce qu'on peut donc dire → f intégrable en $+\infty$ pour $\alpha > 1$
 Si $0 < \alpha < 1 \rightarrow ?$

• L'examinatrice me voit bloquer, et me dit de passer en 0
en 0 : Ici le pbm est la divergence de $\ln(\operatorname{sh} x^\alpha)$ vers $-\infty$.

On reprend : $\text{sh}(\ln(x^\alpha + 1)) = \frac{x^{2\alpha} + 2x^\alpha}{2(1+x^\alpha)} \underset{0}{\sim} x^\alpha$

$$\begin{aligned}\ln(\text{sh}(x^\alpha)) &= \ln(e^{x^\alpha} - e^{-x^\alpha}) \\ &= \ln(e^{-x^\alpha} (e^{2x^\alpha} - 1)) \quad \text{terme dominant en 0} \\ &= -x^\alpha + \ln(e^{2x^\alpha} - 1) \quad \text{et } e^{2x^\alpha} \underset{0}{=} 1 + 2x^\alpha + o(x^\alpha) \\ \Rightarrow \ln(\text{sh}(x^\alpha)) &= -x^\alpha + \ln(2x^\alpha + o(x^\alpha))\end{aligned}$$

↳ Convergence de $\ln$ en 0 ? Croissances comparées et comparaison avec $\int$ de Riemann entre 0 et 1

L'examinatrice me dit qu'on va passer à l'exo suivant.

EXO 2 : Algèbre

Soient E, F, G trois K -ev de dimension finie.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$. On pose $w = v \circ u$.

tg w est un isomorphisme $\Leftrightarrow$ (i) v est surjective
(ii) u est injective
(iii) $\text{Ker } v \oplus \text{Im } u = F$

Je commence par le sens indirect et m'embrouille un peu avec le th. du rang (entre E et F)

↳ Je passe donc au sens direct, quitte à revenir à l'autre $\Rightarrow w$ isomorphisme

• Soit $x \in \text{Ker}(u)$. Alors $u(x) = 0_F \Rightarrow \underline{v(u(x))} = 0_G \Rightarrow x = 0_E$

• Soit $y \in G$. Alors $\exists x \in E$ tg $w(x) = y$
 $\Rightarrow \exists x \in E$, tg $\underline{v(u(x))} = y$

$\Rightarrow u$ injective et v surjective. $E \cap \text{Im}(u)$

• Somme directe : Soit $x \in \text{Ker}(v) \cap \text{Im}(u)$. Alors $\begin{cases} v(x) = 0_G \\ \exists y \in E, u(y) = x \end{cases}$
 $\Rightarrow w(y) = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0$.

↳ L'oral s'est arrêté là-dessus.

Conseil : Ayez tjrs en tête où votre censeur et pièce d'identité sont, ça vous évitera de refaire un aller-retour à l'ENSTA et d'attendre 1h devant la salle que l'oral se termine pour les récupérer...

Oral de mathématiques CCMP 2024

Exercice 1

$$\text{Soit } F : x \mapsto \int_0^\infty e^{-xt} \frac{sh(t)}{t} dt$$

1. Domaine de définition
2. Limite en l'infini
3. Donner une expression simplifiée de $F(x)$

Convergence : Inutile de se fatiguer comme je l'ai fait avec le cas $t = 0$, pour ce théorème on cherche seulement la convergence sur $\mathbf{R}_+^*$.

$$\forall t \in \mathbf{R}_+^*, e^{-xt} \frac{sh(t)}{t} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

Exercice 1 : Correction

Question 1

En $+\infty$: Je commence par

$$e^{-xt} \frac{sh(t)}{t} \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^{t(1-x)}}{t}$$

donc

$$\int_{42}^\infty \dots dt \text{ converge ssi } x \in]1; \infty]$$

En $t = 0$: L'examinatrice me rappelle qu'il y a un problème en $t = 0$. Elle a raison, c'est un faux problème de convergence :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-xt} \frac{sh(t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$$

Mais elle m'a reproché d'écrire :

$$\frac{sh(t)}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1 + t + \frac{t^2}{2} - (1 - t + \frac{t^2}{2})}{2t}$$

au lieu de

$$\frac{sh(t)}{t} \underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{o(t^2) + 1 + t + \frac{t^2}{2} - (1 - t + \frac{t^2}{2})}{2t}$$

Conclusion : le domaine de définition est $D =]1; +\infty]$

Question 2

On s'attend à tomber sur 0 en utilisant le théorème de convergence dominée.

Domination : Soit $a > 1$. Pour $x > a$, on a

$$\left| e^{-xt} \frac{sh(t)}{t} \right| \leq e^{-at} \frac{sh(t)}{t} \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^{t(1-a)}}{2t} \underset{t \rightarrow \infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\textbf{Conclusion} : F(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

Question 3

Comme ça ressemble énormément à l'une des méthodes pour calculer *Dirichlet* (ici c'est un "sinus cardinal hyperbolique" au lieu de *sinc*), on dérive F , le t se simplifie et on a l'expression de F' en + de la condition initiale $F(+\infty) = 0$.

Domination :

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-xt} \frac{sh(t)}{t} \right) \right| = e^{-xt} sh(t) \leq e^{-at} sh(t)$$

qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ Donc par théorème de dérivation des intégrales à paramètres et Formule de *Leibniz* : $F'(x) = \int_0^\infty -e^{-xt} sh(t) dt$

La Dame contrecarre ma tentative de faire 2 *IPP* successives. Selon ses plans :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_0^\infty \frac{e^{t(-x-1)}}{2} - \frac{e^{t(-x+1)}}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{-1-x} \right) \end{aligned}$$

$$\textbf{Conclusion} : \forall x \in]1; \infty], F(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right) = \operatorname{artanh}(x)$$

Exercice 2

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalisable. Soit $B = A^3 + A + I_n$. Montrer que A est un polynôme en B . Que dire si $A \in M_n(\mathbb{C})$?

Correction exercice 2

Pour ce deuxième exercice je trouve que l'examinatrice m'a beaucoup orienté pour qu'on finisse l'exercice dans les temps.

Je remarque d'abord (ça a pris + de temps qu'il n'y paraît) que les 2 matrices sont diagonalisables et même codiagonalisables. Par la suite l'examinatrice me demande comment je sais que A est

diagonalisable, c'est donc une situation cocace. Elle m'oriente ensuite vers l'étude de matrices diagonales : on peut par multiplication par les matrices de passage se ramener au cas A diagonale. On note $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $P = X^3 + X + 1$ tel que $B = P(A)$. On cherche maintenant un polynôme $F \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $A = F(B)$. C'est-à-dire tel que

$$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \text{diag}(F(\mu_1), \dots, F(\mu_n))$$

$\forall i \in [1; n], \mu_i = P(\lambda_i)$. On me souffle à l'oreille l'interpolation polynomiale. Pour que l'existence de F soit garantie, il faut que P soit injectif sur $\mathbb{R}$ ce qui est le cas car $P' > 0$. Malheureusement ce n'est pas le cas sur $\mathbb{C}$ car $P(0) = P(i) = P(-i)$.

PC*2**Compte rendu d'oral****Concours 2021**

Nom, Prénom : HYS Sakula

Concours, Epreuve : Mines - Ponts

Examineur : homme, 40aine, pas méchant mais a l'air un peu saoulé...

Note : (éventuellement)

A scanner de préférence sous forme PDF et à envoyer à pcetoile2@gmail.com.

Sinon envoyer à M. Fagebaume, Lycée Louis-Le-Grand, 123 rue St-Jacques, 75005 Paris

Merci de noter le maximum d'informations sur le déroulement à proprement parler de l'oral : questions de cours, réactions/remarques de l'examineur, dialogues croustillants, indications données pendant le déroulement de l'oral, etc ...

2 exos (+ un 3^e si on a le temps (mais j'ai trop traîné))

Ex 1 :

1) $P \in \mathbb{C}[X]$. Mq P unitaire, ttes racines $|z|=1$

$$\Leftrightarrow \forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |z| - 1$$

1/4

2) $E = \{P \in \mathbb{C}_n[X], P \text{ unitaire}, P(z)=0 \Rightarrow |z|=1\}$

mq E une partie fermée de $\mathbb{C}_n[X]$. Est-elle bornée?

(il y avait une erreur d'énoncé : mq partie de $\mathbb{R}_n[X]$... ça aurait pas été évident !)

Ex 2 :

F, G sev de dim finie de E . Mq $\exists 1 \leq r \leq p \leq n$ tq $(e_1, \dots, e_n) \in E^n$

vérifie :

- $(e_1, \dots, e_r)$ base de $F \cap G$

- $(e_1, \dots, e_p)$ base de F

- $(e_1, \dots, e_r, e_{p+1}, \dots, e_n)$ base de G

- $(e_1, \dots, e_n)$ base de $F + G$

En déduire Grassmann.

Οι ελπίδες των μορφωμένων ανδρών είναι καλύτερη από τον πλούτο της αδαείας.
Le Spoir des hommes instruits vaut mieux que la richesse des ignorants. (Démocrite d'Abdère, -460 -370)

Déroulé

- on me dit avant l'oral que l'examineur "défonce" la gent masculine mais est gentil avec la gent féminine...
- quel plaisir de passer entre Anaëlle LE BERRE et Léa GAONAC'H ♥
- examinateur à la recherche de mots-clés :
essaie de me faire dire "on est ds $\mathbb{Q}$ donc le polynôme est scindé"

"base car en dim finie" (que j'avais ± dit...)

Ex 2 (dans l'ordre qu'on veut)

Sans encombres, et là arrive la liberté de $(e_1, \dots, e_n)$

$$(\underbrace{e_1, \dots, e_r}_{\in F_n G}, \underbrace{e_{r+1}, \dots, e_p}_{\in F}, \underbrace{e_{p+1}, \dots, e_n}_{\in G})$$

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\neq F_n G} & \text{---} & \boxed{\neq F_n G} \\ & \downarrow & \end{array}$$

OK mais une CL peut $\in F_n G$ car $C_E(F_n G)$ pas un ser...

→ liberté pas évidente

Je l'ai mal écouté donc il me l'a répété 3x pdt l'exo $n=0$

Bref on exprime $\sum_{p+1}^n \lambda_k e_k$ ds $F_n G$

puis | liberté de la base de F
G

Ex 1

Lancée sur $P = \sum a_k X^k$, j'ai fait peu de choses pdt la préparation...

Q: inégalité triangulaire pour $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$? (la 2^e)

→ gros gros indices, que je n'ai pas capté

$$1) P = \prod (X - e^{i\theta_k})$$

⇒ évident avec la 2^e inégalité triangulaire
(et pourtant je me suis embrouillée)

⊖ Par l'absurde : $P(z)=0$ et $|z| \neq 1$

→ ça marche bien mais on me dit qu'on peut le faire directement : $P(z)=0 \Rightarrow$ absurde sauf si $|z|=1$
(ça revient au même ... Ça doit pas être un gars absurde)

2) Q : reformuler la fermitude

$$\rightarrow \|P_k - P\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

"Les normes sont éqv blabla" "On peut écrire sous normes"

What?! Je comprends pas, il abandonne, je fixe $\|P\| = \max_k |a_k|$

→ il est content (OK...)

"Explicitiez encore +"

→ je dégaine les ε ? 

$$\max_j |a_{kj} - a_j| \leq \varepsilon$$

"Donc $|a_{kj} - a_j| \rightarrow 0 \forall j$! Il y a pas de norme là !"

J'ai rien dit mais pour moi on s'est pas débarassé de la norme...

Puis : z racine P_k : $|P_k(z) - P(z)| \leq \underbrace{\sum |a_{kj} - a_j|}_{\rightarrow 0} \underbrace{|z|^\delta}_{=1}$

$$\Rightarrow P(z)=0 \quad \text{ccl : } E \text{ fermé}$$

(pq j'ai galéré ? quelle honte...)

→ Bornitude ?

Les qq dernières minutes, le candidat suivant arrive (prévoir des boules Quies pour la préparation)

Je tente un "a priori", c'est faux, il faut un contre-exemple"

"Allez-y"

Je vois pas trop, 1 min + tard, "Bon en fait c'est borné, il reste 2 min, essayez de le montrer"

Gros blanc. Aucune idée. J'écris $\sum a_k X^k = \prod (X - e^{i\theta_k})$

(sur la bonne voie!) Blanc... surtout dans ma tête. Finalement:

"Relation sur les coefficients et les racines?" → à part a_0 et a_{n-1} ...

Il me fait faire $|a_{n-1}| \leq n$ ici n fixé donc ouf! 4/4

L'oral se termine, il me dit "Au programme de MP, il y a la relation coefficients - racines" (ou qd c'est ça)

$$\begin{aligned} \rightarrow a_{n-k} &= (-1)^k \underbrace{\sigma_k}_{\substack{\text{somme des} \\ \text{produits de} \\ \text{k racines}}} \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} \end{aligned}$$

mais en gros on pouvait rmq que a_k polynôme en les racines et on majore grossièrement par n

⚠ au vocabulaire et formulation

- m'a reprise de façon insistante qd j'ai dit "on fixe un entier r " (certes c'est la dim de $F_n G \dots$)
- au lieu de "on veut majorer a_k ", j'ai montré $P = \sum a_k X^k$ et dit qu'on veut le majorer... "Non, on majore pas un polynôme b!" (en + on pourrait avec une norme $\geq$)

ccl : • Tout est largement faisable, mais on titille sur des détails

- Examineur pas complètement absent, mais je doute qq fois de son écoute...
- C'est la crise! Brosse de tableau = gant en laine x)
- Examineur qui lâche des m*rde... p*taïn... qd le feutre s'est désintégré x)



note attendue: 11

note obtenue: 13