ENS - 2024 - Maths

Wassim Aliouane PCX2

Juillet 2024

Note attendue : 15-16
Note obtenue : 1p

1 Sujet

Exercice 1 :

1) Montrer que :

$$\exists K \in \mathbb{R} | \forall f \in C^1([-1,1],\mathbb{R}), f^2(0) \leq K \int_{-1}^{1} (f^2(x) + f'^2(x))\, \mathrm{d}x$$

2) Montrer que ce n'est plus le cas avec $\int_{-1}^{1}(f^2(x) + f'^2(x))x^2\, \mathrm{d}x$
3) Montrer qu'il en est de même avec $\int_{-1}^{1}(f^2(x) + f'^2(x))x\, \mathrm{d}x$

Exercice 2 :

1) Trouver le nombre moyen de points fixes d'une permutation de $\mathfrak{S}_n$
2) Probabilité de tirer une permutation sans points fixes ?

2 Déroulé de l'oral/ Indications

Dernier rapport que j'écris, pas le temps de faire un corrigé complet, donc je donne juste des indications.

1) - Ecrire $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\, \mathrm{d}t$. J'ai commencé par un cas plus simple (pas obligé) : f s'annule en $a \in [-1,1]$
- Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour conclure rapidement dans ce cas. Pour le cas général, c'est pareil avec un terme en plus. Finalement on trouve que $K \geq \frac{1}{2}$ fonctionne (je pense, je ne m'en souviens plus).

2) Pour trouver un contre-exemple qui marche, il faut voir la différence que l'on a ici. Si l'on avait eu x^2+1 à la place de x^2 dans l'intégrale, on se serait ramené à la question précédante. Enfaite, si l'on avait eu n'importe quelle fonction g strictement positive continue, ce K existerait toujours (il suffit de majorer par le minimum de cette fonction et se ramener q°1). Ce qui change ici, c'est l'annulation de $x \mapsto x^2$ en 0. Il nous faut donc trouver une fonction f qui "explose" en 0, tout en étant définie en 0. Si on trouve une suite de fonctions qui converge simplement vers une fonction qui diverge en 0, c'est bon. Après avoir expliqué ça, je propose d'abord $f_n(x) = \frac{1}{x+\frac{1}{n}}$, puis après une légère discussion sur la puissance du x à mettre, je pose $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+\frac{1}{n}}$. Je vous laisse faire le calcul, ça marche, il faut faire tendre n vers l'infini.

3) Même idée ici. J'ai tenté de changer la puissance du x au dénominateur, visiblement ça ne marche pas (l'examinateur a fait de tête et de manière super rapide le calcul de l'intégrale pour un x^α pour me montrer que ça ne marchera jamais, c'était assez impressionant). On discute un peu, il faut aller chercher du côté des logarithmes. Je finis par proposer ça : $f_n(x) = \ln(-\ln(\frac{|x|}{2} + \frac{1}{n}))$ (ne me demandez pas comment, je ne m'en souviens plus, mais c'était après des dessins/discussions, et de l'aide). Encore une fois je ne fais pas le calcul ici (c'est long et je me suis trompé 2 fois), mais ça marche.

Deuxième exercice : 1) Question pas insurmontable, se fait en une ligne. Réponse : 1.

2) Je lui dis que je l'ai déjà fait (je ne pensais pas qu'on pouvait donner ça à l'oral de l'ENS vu comme c'est classique). Il me demande comment faire (poser les ensembles $\Omega_i = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \,|\sigma(i) = i\}$, formule du crible puis passer au complémentaire...). Il me demande de le refaire rapidement, l'oral se termine quelques minutes plus tard, j'ai à peine le temps de finir.

3 Commentaire

Meilleur oral de maths des 4 concours : une discussion avec un examinateur bienveillant et à l'écoute. Je suis très content d'être tombé sur un vrai exercice inconnu (pour le premier en tout cas), et non pas sur une suite d'exercices plutôt classiques, pour la plupart déjà abordés en td, comme j'ai pu le voir à peu près dans la moitié des retours de cette année de l'ENS (d'ailleurs c'est super bizarre ça je trouve...). Je pense que ça aurait pu être vraiment bien si je savais dériver des composées et des quotients sans faire trop de fautes.

Candidat, session: Timoléon Rescan, 2024 **Classe:** PCX2
Epreuve: Maths UL **Concours:** ENS

Note attendue: 10-11
Note obtenue: 13

Enoncé

Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}_+^*$ *telle que, pour tout* x *réel*:

$F_0(x) = 1$

$F'_{n+1}(x) = e^x\sqrt{F_n(x)}$

Trouver $\lim_{n\to+\infty} F_n(x)$, *pour tout* x *réel*

Déroulé et éléments de correction

Premier oral de mes concours, lundi 8h. Pour être à l'heure à Saclay, je me suis levé à 6h. Et j'ai bien fait, parce que je n'arrive pas très en avance à cause de problèmes de transport. Après avoir galéré à trouver la salle (n'hésitez pas à demander à n'importe qui, des gens peuvent toujours vous aider quand vous êtes perdus), j'arrive, j'ai quelques minutes pour me préparer.

J'ai un peu stressé en voyant un exercice d'analyse arriver, c'est quand même pas ce que je préfère. Bon je me lance, je fais un théorème fondamental de l'analyse, pour exprimer F_{n+1}. Après ça,pas de grande réussite, je tente les premières valeurs, pour chercher un peu l'évolution des F_n à x fixé.

Le reste de l'oral est relativement répétitif. J'ai beau avoir quelques idées, je n'avance quand même pas beaucoup, donc l'examinateur (très réactif, jeune, sympa, qui sort "oui c'est ça" quand on part dans une direction intéressante) me propose une piste. Je montre ce qu'il me demande, propose comment avancer, ça ne marche pas etc.

À x fixé, F_n est croissante, et il reste plus qu'à montrer qu'elle est majorée ou non. Pour cela, on peut supposer qu'elle admette une limite F, et résoudre notre équation

$$F'(x) = e^x\sqrt{F(x)}$$

Évidemment, c'est non linéaire, je me dis qu'il y a pas de solution évidente (sans passer par les DSE), jusqu'à ce que l'examinateur me dise que si (eh oui, divisez par $\sqrt{F(x)}$) vous verrez). Et cette fonction (on le montre) majore ainsi tous les F_n.

On sait donc que les F_n convergent simplement vers une fonction G, qui par intuition doit être F. Il faudra donc prouver la convergence uniforme, pour montrer que G est C^1 et conclure. Pour cela, on raisonne de proche en proche: pour x<a assez petit, on a bien convergence uniforme (en montrant que $F - F_n \leq (Ca)^n$), et normalement on peut conclure au moins sur $\mathbb{R}_+$ (l'oral s'est arrêté quand j'avais montré cette majoration).

Bilan

Examinateur très sympa, la discussion est agréable. Je suis un peu déçu, j'ai l'impression de n'avoir rien réussi par moi même, et je n'ai pas vu certaines choses qui paraissent assez évidentes avec du recul. Je regrette de n'avoir pas eu le temps (ou l'idée) de "mettre le cerveau en route" avant l'oral, je me sentais brumeux et ça ne m'a pas aidé.

PC*2 **Compte rendu d'oral** **Concours 2024**

Nom, Prénom : FAURE, Sakura
Concours, Epreuve : maths ENS UL
Examinateur : Jeune homme, (~25 ans), gentil et dynamique.
Note : (éventuellement) (Il m'a fait quelques blagues :))

A scanner de préférence sous forme PDF et à envoyer à pcetoile2@gmail.com.
Sinon envoyer à M. Fagebaume , Lycée Louis-Le-Grand, 123 rue St-Jacques, 75005 Paris

Merci de noter le maximum d'informations sur le déroulement à proprement parler de l'oral : questions de cours, réactions/remarques de l'examinateur, dialogues croustillants, indications données pendant le déroulement de l'oral, etc ...

Exercice : (écrit au tableau par l'examinateur)

On pose $f \left| \begin{array}{l} [0,1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \sum_{k=1}^{N} a_k \sin(2k\pi t) \end{array} \right.$ où $a_k \in \mathbb{R}\ \forall k \in [\![1,N]\!]$ et $a_N \neq 0$

soit N_j le nombre de zéro (compté avec multiplicité) de $f^{(j)}$ (dérivée j-ième de f) sur $[0,1[$

(i) Mq $(N_j)_{j\geq 1}$ est croissante

(ii) Mq $N_j \xrightarrow[j\to+\infty]{} 2N$

- Naturellement, je commence par calculer la dérivée j-ième de f qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$. soit $j \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1[$

j impaire : $f^{(j)}(t) = \sum_{k=1}^{N} a_k (2k\pi)^j (-1)^{\frac{j-1}{2}} \cos(2k\pi t)$

j paire : $f^{(j)}(t) = \sum_{k=1}^{N} a_k (2k\pi)^j (-1)^{\frac{j}{2}} \sin(2k\pi t)$

- Je commence à expliquer que si on connait les zéros de $f^{(j+1)}$ et le signe de $f^{(j+1)}$ sur chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$ où $(x_k)_{k\in[\![1,N_{j+1}]\!]}$, on peut s'intéresser aux variations de $f^{(j)}$ ...

→ En fait, c'est beaucoup trop compliqué puisqu'il est impossible d'avoir une idée de la forme des racines ou du signe de $f^{(j+1)}$

- L'examinateur m'invite à plutôt considérer les zéros de $f^{(j)}$ et de déterminer ceux de $f^{(j+1)}$ (Beaucoup plus facile en effet.)

1^{e} cas : les $(x_k)_{k\in[\![1,N_j]\!]}$ (zéros de $f^{(j)}$) sont distincts (ie la multiplicité de chaque zéro est de 1)

	0	x_1		x_2	----	x_k		x_{k+1}	---	x_{N_j}	1
$f^{(j)}$		0		0		0		0		0	
$f^{(j+1)}$			0				0				

→ Par Rolle appliqué à $]x_k, x_{k+1}[$ $\forall k \in [\![1, N_j - 1]\!]$
On trouve ainsi $N_j - 1$ zéros pour $f^{(j+1)}$

→ manque plus que 1 zéro !

- Je suggère que le zéro restant se trouve probablement entre 0 et x_1 car je regarde $f^{(j)}$ pour j paire ... mais en fait pour j impaire $f(0) = 0$ donc x_1 peut être 0.

- Je m'intéresse alors à $[x_{N_j}, 1[$. L'examinateur me fait remarquer que f est 1-périodique donc j'en déduis que $f^{(j)}(1+x_1) = 0$ donc $\exists \alpha \in]x_{N_j}, 1+x_1[$ tq $f^{(j+1)}(\alpha) = 0$

sauf que x_{N_j} $\quad 1 \quad$ $1+x_1$

α

— Je dis qu'il faut montrer que α est à gauche de 1 mais il me répond que ce n'est pas nécessaire ... Je réfléchis...

→ si $\alpha \in]1, 1+x_1[$ $\quad f(\alpha) = 0 = f(\alpha - 1)$ or $\alpha - 1 \in]0, x_1[$
donc on a bien un nouveau 0 !

(En suivant le rapport, je me rends compte qu'on a supposé $x_1 \neq 0$. Si $x_1 = 0$, $\alpha \in]x_{N_j}, 1[$ donc on est à gauche de 1) et c'est bon.

→ si $x \in]x_{N_j}, 1[$, c'est bon !

- On a donc $N_{j+1} \geq N_j$ d'où $(N_j)_{j\in\mathbb{N}^*} \nearrow$

2^e cas : les $(x_k)_{k\in[\![1,N_j]\!]}$ ne sont pas distincts ...

→ A l'oral, j'explique que ce n'est pas 1 pb puisque si $(x_1 - x_i)$ sont les racines distinctes et $(\alpha_1 - \alpha_i)$ leur multiplicité :

si x_k et x_{k+1} sont des zéros de $f^{(j)}$:

$$\begin{array}{ccc} x_k & & x_{k+1} \\ \downarrow & & \downarrow \text{ Rolle} \\ x_k & < \alpha < & x_{k+1} \\ \text{de mult.} & & \text{de mult} \\ \alpha_k - 1 & & \alpha_{k+1} - 1 \end{array}$$

alors $f^{(j+1)}$ admet $\alpha_k - 1 + \alpha_{k+1} - 1 + 1 = \alpha_k + \alpha_{k+1} - 1$ zéros sur cet intervalle

soit au total $\sum_{k=1}^{N} \alpha_k - 1 = N_j - 1$ zéros distincts pour $f^{(j)}$ (donc on est dans la m̂ situation que le 1^e cas)

→ c'est en écrivant mon rapport que je me rends compte que parler de multiplicité n'a aucun sens puisque f n'est pas un polynôme... C'est l'examinateur qui avait bien insisté au début sur ce point, et qui m'a suggéré de considérer les $(x_k)_{k\in[\![1,N_j]\!]}$ distincts dans un premier temps... Dans le feu de l'action, je n'ai pas tilté. J'espère que ça ne me portera pas préjudice.

(ii) Mq $N_j \xrightarrow[j\to+\infty]{} 2N$

→ ça se corse, j'essaie de trouver pourquoi la limite est 2N.

En fait (pour j paire p.ex) :

$$\frac{f^{(j)}(t)}{(2N\pi)^j} = \sum_{k=1}^{N} a_k \frac{(2k\pi)^j}{(2N\pi)^j} (-1)^{\frac{j}{2}} \sin(2k\pi t)$$

$$= \underbrace{a_N}_{\neq 0} (-1)^{\frac{j}{2}} \sin(2N\pi t) + \sum_{k=0}^{N-1} a_k \underbrace{\frac{(2k\pi)^j}{(2N\pi)^j}}_{\xrightarrow[j\to+\infty]{} 0} (-1)^{\frac{j}{2}} \sin(2k\pi t)$$

→ APCR, le terme "dominant" est le 1^e.

↳ c'est à lui que l'on doit s'intéresser.

Mais bon, savoir que APCR $a_N \sin(2N\pi t) = \varepsilon$ ← arbitrairement petit
ne m'aide pas, d'autant plus que $\varepsilon(\underline{\underline{t}})$.

→ Il me suggère alors de plutôt regarder les t tels que
$\sin(2N\pi t) = \pm 1$

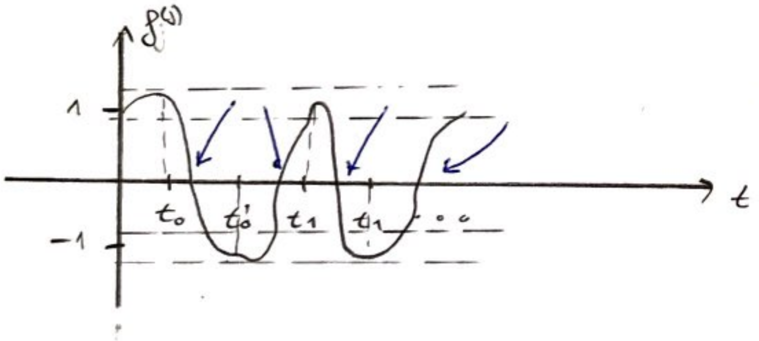
→ je comprends pas de suite pourquoi
mais je m'exécute.

→ $\sin(2N\pi t_k) = 1$ $\quad 2N\pi t_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\Rightarrow \| t_k = \frac{1}{4N} + \frac{k}{N} = \frac{4k+1}{4N} \| \in [0,1[$ si $k \in [\![0, N-1]\!]$

→ $\sin(2N\pi t_k') = -1$ $\Rightarrow \| t_k' = \frac{3}{4N} + \frac{k}{N} = \frac{4k+3}{4N} \| \in [0,1[$ si $k \in [\![0, N-1]\!]$

→ En ces valeurs, pour j assez grand, • $f^{(j)}(t_k)$ est arbitrairement proche de 1
• $f^{(j)}(t_k')$ ——————— de -1.



(FAITES DES SCHÉMAS !!)

→ On comprend alors assez bien qu'on va pouvoir trouver au moins $2N-1$ zéros pour $f^{(j)}$ par Rolle entre t_k et t_k', et t_k' et t_{k+1}.

→ Pour le dernier, on fait comme précédemment et on applique Rolle entre t_N' et $1+t_1$ (cf (i))

→ On a donc au moins $2N$ zéros APCR.

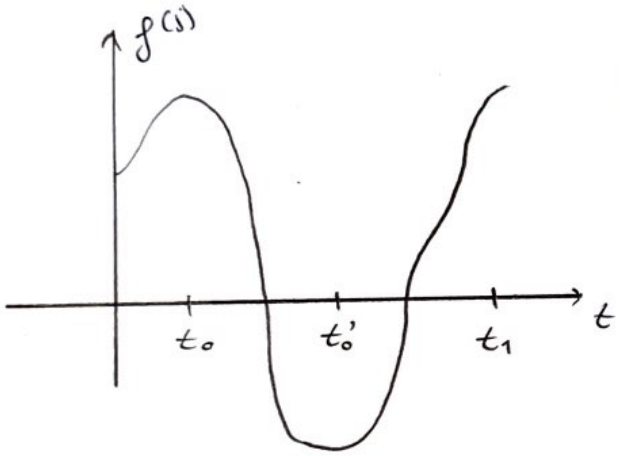
→ Reste plus qu'à montrer qu'il y en a pas plus.
Il ne reste plus beaucoup de temps (oral de 45 min) et il me demande si j'ai des pistes. (bof bof) Je propose un raisonnement par l'absurde mais sans savoir quelle absurdité exhiber...

Il me demande la valeur de $\cos(2N\pi t)$ pour $t = t_k$ et $t = t_k'$
Ça vaut 0.

L'idée est que $f^{(j+1)}(t) \underset{APCR}{=} a_N (2N\pi)^{j+1} (-1)^{\frac{j}{2}} \cos(2N\pi t) + \underbrace{\varepsilon(t)}_{\text{petit}}$

(j paire toujours)

"en gros", comme sur $[t_k, t_k']$ et $[t_k', t_{k+1}]$, $\cos(2N\pi t)$ ne change pas de signe, $f^{(j+1)}(t)$ non plus (j'insiste sur le "en gros") Donc $f^{(j)}$ est "globalement" croissante ou décroissante sur ces intervalles ce qui signifie qu'elle ne s'annule qu'une fois sur chaque intervalle.



(j assez grand)

(schémas !!)

bon, encore faut il le formaliser...

FIN DE L'ORAL

CCL : → j'y allais très stressée (1e oral d'une longue série) mais j'ai été agréablement surprise.

→ pour le coup de la multiplicité, il s'agirait d'être peut-être plus réactive...

→ faites des dessins, surtout en analyse, parce certains exercices ne nécessitent pas toujours l'utilisation de gros théorèmes (ici, on a utilisé que Rolle) mais une bonne intuition.

→ très guidé (j'ai trouvé) pour un oral d'ENS.

PC*2	**Compte rendu d'oral**	**Concours 2017**

Nom, Prénom : LE LAY Grégoire
Concours : ENS
Epreuve : Maths (UL)
Examinateur : Il avait une attitude "Fagebaumienne" ♡
Note : (éventuellement)

A scanner de préférence sous forme PDF et à envoyer à pcetoile2@gmail.com.
Sinon envoyer à M. Fagebaume , Lycée Louis-Le-Grand, 123 rue St-Jacques, 75005 Paris

Exercice : Soit un polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec les a_k complexes.

- Calculer, pour $j \in \mathbb{Z}$, $\int_0^{2\pi} e^{ijt} P(e^{it})\,dt$
- Soit $M = \max_{|z|=1} |P(z)|$. Montrer que $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $|a_k| \leq M$
- Montrer que $|a_n| + |a_0| \leq M$
- A-t-on $|a_i| + |a_j| \leq M$ $\forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2$?

} Sans indications, j'ai trouvé ça difficile.

Éléments de réponse :

- $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $I_{-k} = 2\pi a_k$, sinon $I_{j \neq k} = 0$
- $2\pi |a_k| = |I_{-k}| \leq \int_0^{2\pi} |P(e^{it})|\,dt \leq 2\pi M \Rightarrow |a_k| \leq M$
- Pas d'indication, j'ai cherché quelques minutes. L'ambiance était lourde, la salle sombre. Nous étions 2 dans un amphi de 150 places. Très oppressant. Je ne savais pas si j'étais stupide ou bien si c'était une question difficile. Mais au bout de quelques minutes...

... Libération ! Une indication : On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, $z \in \mathbb{C}$

et on va calculer $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P(z\omega^k)$.

On trouve $a_0 + z^n a_n$, d'où $|a_0 + z^n a_n| \leqslant M$

or on veut $|a_0| + |a_n| \leqslant M$: Il faut le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire, les deux nombres "alignés". On choisit donc $z = e^{i\varphi}$ avec φ qui va bien et c'est ok

Dernière question (de la mort qui tue - elle a une bonne tête de dernière question celle-là...) : Est-ce vrai pour tous i et j ?

Ma réponse : c'est vrai que $|a_0| + |a_j| \leqslant M$ pour $j > \frac{n}{2}$

(on adapte la méthode : $\omega = e^{\frac{2i\pi}{j}}$; calcul de $\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j} (P(z\omega^k)))$

À part ça j'ai fait quelques conjectures, dit quelques trivialités (genre "c'est vrai si tous les a_k ont le même argument", pas avec ce genre de remarques qu'on remonte une note mais il faut bien parler...)

Puis l'oral s'est terminé.

(1)

PC*2 **Compte rendu d'oral** **Concours 2023**

Nom, Prénom : PAPADACCI Elsa
Concours, Epreuve : ENS, Oral maths (feuille 1)
Examinateur : jeune, sympathique, donne des indications régulières
Note : (éventuellement) 19

A scanner de préférence sous forme PDF et à envoyer à pcetoile2@gmail.com.
Sinon envoyer à M. Fagebaume, Lycée Louis-Le-Grand, 123 rue St-Jacques, 75005 Paris

Merci de noter le maximum d'informations sur le déroulement à proprement parler de l'oral : questions de cours, réactions/remarques de l'examinateur, dialogues croustillants, indications données pendant le déroulement de l'oral, etc ...

Oral de 40 minutes. 10 min au début pour réfléchir sans avoir à expliquer ce que je fais.

$\boxed{1^{er} \text{ exo :}}$ On prend $k \in \mathbb{N}^*$, $f \in C^0([0,1], \mathbb{R})$, $(f_n)_n \in C^k([0,1], \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$. On suppose : $\exists C > 0$,

$$\begin{cases} f_n \xrightarrow{CVS} f \\ \|f_n^{(k)}\|_\infty \leqslant C \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Montrer que : $f_n \xrightarrow{CVU} f$.

Je commence par retranscrire les éléments de l'énoncé. Ma première idée est de travailler par l'absurde : si on n'a pas CVU, alors : $\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant N, \exists x_n \in [0,1], |f_n(x_n) - f(x_n)| \geqslant \varepsilon$.

J'ai l'idée d'utiliser le th des accroissements finis pour obtenir une contradiction : Soit $n \in \mathbb{N}$. pour $x \in]0,1]$, on dispose de $y \in]0,1[$ tq $f^{(k)}(y) = \dfrac{f^{(k-1)}(x) - f^{(k-1)}(0)}{x} \in [-C, C]$.

On voit alors qu'on peut trouver un $C_1 > 0$ tq $\|f_n^{(k-1)}\|_\infty \leqslant C_1$

(puisque $x \in]0,1]$). Cela indique qu'on peut se ramener plus simplement au cas $k=1$.

L'examinateur me confirme que la stratégie est bonne mais ajoute que le raisonnement par l'absurde ne lui semble pas nécessaire. On part donc sur un raisonnement direct en considérant $k=1$.

On a : $$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \ \|f_n'\|_\infty \leqslant C \\ \forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}, \ |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\infty]{} 0. \end{cases}$$

On cherche à obtenir : $\underbrace{\forall x \in [0,1],}_{\forall n \in \mathbb{N},} \ |f_n(x) - f(x)| \leqslant u_n$ avec $u_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$ et u_n indép de x.

On fixe $\varepsilon > 0$; on veut donc établir qu'APCR, $\forall x \in [0,1], \ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$.

L'examinateur me propose de commencer par raisonner sur un intervalle $[t, t+\delta]$ avec $t \in [0,1]$ et $\delta \in \mathbb{R}^+$ fixés (tq $[t,t+\delta] \subset [0,1]$). On prend $x \in [t,t+\delta]$; soit $n \in \mathbb{N}$.

Par TAF, on obtient : $|f_n(x) - f_n(t)| \leqslant C(x-t) \leqslant C\delta$.

En faisant tendre $n \to +\infty$, on a aussi : $|f(x) - f(t)| \leqslant C\delta$.

On combine ces deux inégalités pour obtenir :

$$-2C\delta + \big(f_n(t) - f(t)\big) \leqslant f_n(x) - f(x) \leqslant 2C\delta + \big(f_n(t) - f(t)\big)$$

Donc : $|f_n(x) - f(x)| \leqslant 2C\delta + |f_n(t) - f(t)|$.

Or on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geqslant N, \ |f_n(t) - f(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$; donc en prenant $\delta = \frac{\varepsilon}{4C} > 0$, on a :

$\forall n \geqslant N, \ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$, et ce quel que soit x. $\square$

②

PC*2 **Compte rendu d'oral** **Concours 2023**

Nom, Prénom : PAPADACCI Elsa
Concours, Epreuve : ENS, Oral maths (feuille 2)
Examinateur :
Note : (éventuellement)

A scanner de préférence sous forme PDF et à envoyer à pcetoile2@gmail.com.
Sinon envoyer à M. Fagebaume , Lycée Louis-Le-Grand, 123 rue St-Jacques, 75005 Paris

Merci de noter le maximum d'informations sur le déroulement à proprement parler de l'oral : questions de cours, réactions/remarques de l'examinateur, dialogues croustillants, indications données pendant le déroulement de l'oral, etc ...

$\boxed{2^e \text{ exo :}}$ Etudier la convergence de $\sum_{n\geq 0} \left[\sin(2\pi n!e)\right]^\alpha$ en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ma première idée est de commencer par m'assurer que les termes de la suite ne vont pas trop souvent atteindre (-1) ou 1, ce qui pourrait faire diverger grossièrement la série. Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n!e \notin \mathbb{Q}$, donc on aura bien $\sin(2\pi n!e) \in]-1, 1[$
$\rightarrow$ OK sur ce point.

Il faut ensuite voir si $\sin(2\pi n!e) \xrightarrow[n\infty]{} 0$. On va chercher à déterminer un équivalent. On veut donc écrire :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $2\pi n!e = 2\pi(k_n + a_n)$ avec $k_n \in \mathbb{N}$ pour tout n et $a_n \in [0,1]$, dans l'idéal $a_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

Il me faut un peu de temps et quelques indications de l'examinateur pour penser à écrire $e = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}$; ensuite, on a :

$$n!e = \underbrace{\sum_{k\leq n} \frac{n!}{k!}}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{\sum_{k>n} \frac{n!}{k!}}_{a_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n+1}}.$$

On en déduit : $2\pi n!e - 2\pi k_n \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{2\pi}{n+1}$.

Il ne reste plus assez de temps pour finir proprement, mais je vois qu'on peut en déduire $\sin(2\pi n!e) \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{2\pi}{n+1}$, ce qui permet de conclure ; l'examinateur me le confirme.

PC*2	**Compte rendu d'oral**	**Concours 2023**

Nom, Prénom : CHAMOON inès
Concours, Epreuve : ENS
Examinateur : homme assez jeune, parlait peu, mais disait "oui!" parfois
Note : (éventuellement) 15

A scanner de préférence sous forme PDF et à envoyer à pcetoile2@gmail.com.
Sinon envoyer à M. Fagebaume , Lycée Louis-Le-Grand, 123 rue St-Jacques, 75005 Paris

Merci de noter le maximum d'informations sur le déroulement à proprement parler de l'oral : questions de cours, réactions/remarques de l'examinateur, dialogues croustillants, indications données pendant le déroulement de l'oral, etc ...

EXO 1 Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$

Soit $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (t,x) \mapsto f(t,x) \end{array}\right.$ vérifiant $\boxed{\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}$ $\star$ et tq $f(0,x) = P(x)$

1) Mq il existe une solution polynomiale à l'équa diff $\star$ (polynôme en $\underline{x}$)

2) Soit f une solution polynomiale en x de $\star$ tq $f(0,x) = P(x)$ et P SARS
Mq $\exists \varepsilon > 0$ tq $\forall t \in [0, \varepsilon]$, f SARS

ANALYSE

1) La solution est de forme $\sum_{i=0}^{m} a_i(t) x^i$

On injecte dans $\star$, $\sum_{i=0}^{m} a_i'(t) x^i = \sum_{i=2}^{m} a_i(t) i(i-1) x^{i-2} = \sum_{i=0}^{m-2} a_{i+2}(t)(i+2)(i+1) x^i$

Par unicité de la décompo dans la base canonique :

$\begin{cases} a_n'(t) = 0 \\ a_{n+1}'(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_n(t) = a_n(0) \ \forall t \\ a_{n-1}(t) = a_{n-1}(0) \ \forall t \end{cases}$ et ($a_n(0)$ et $a_{n-1}(0)$ fixés par $f(0,x) = P(x)$)

et $\forall i \in [\![0, n-2]\!]$, $a_i'(t) = (i+1)(i+2) a_{i+2}(t)$

Il me dit de mq une solution à cette équation existe bien. Je bute, j'essaye d'itérer en utilisant $a_{i+2}'(t) = (\dots)$ mais ça ne donne pas grand chose.

Puis je pense à intégrer :

$$a_i(t) - a_i(0) = \int_0^t a_i'(u)\,du = \int_0^t (i+1)(i+2) a_{i+2}(u)\,du$$

$$\Rightarrow \forall i \in [\![0, n-2]\!],\ a_i(t) = a_i(0) + \left(\int_0^t a_{i+2}(u)\,du\right)(i+1)(i+2)$$

Il me demande d'exprimer a_{m-2} par ex :

$$a_{n-2}(t) = a_{n-2}(0) + \int_0^t a_n(u)\,du\,(n-1)n$$
$$= a_{n-2}(0) + t a_n(0)(n-1)n$$

J'explique que de proche en proche, on pourra calculer l'expression des a_i. ça lui convient.

SYNTHESE : pas demandée

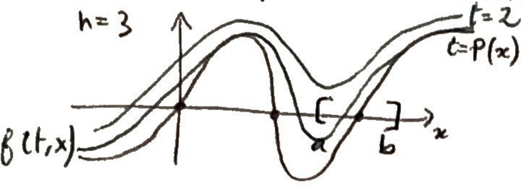
2) En gros, on utilise la continuité de f par rapport à t

$$f(t,x) \xrightarrow[t \to 0]{} f(0,x) = P(x)$$

$\Leftrightarrow \quad \forall M \in \mathbb{R}_+^*, \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+, \ |t| \leq \varepsilon \Rightarrow |f(t,x) - P(x)| \leq M$

Puis il faut justifier que $f(t,x) \xrightarrow[t\to 0]{}$ polynôme SARS $\Rightarrow$ $f(t,x)$ SARS pour $|t| \leq \varepsilon$

Il me dit de faire un dessin :



Puis j'applique le TVI

Soit $[a,b]$ tq P s'annule sur cet intervalle

$f(t,x) \xrightarrow[\substack{x\to a\\ t\to 0}]{} P(a) > 0$ par ex, Donc pour t suffisamment petit, $f(t,a)>0$ et $f(t,b)<0$

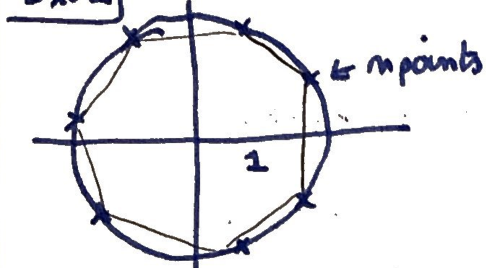
$f(t,x) \xrightarrow[\substack{x\to b\\ t\to 0}]{} P(b) < 0$

$\Rightarrow$ f s'annule sur $]a,b[$ (f C^0)

En faisant de ~~m~~ sur n intervalles contenant les n racines de P (y compris en se plaçant sur des intervalles de forme $]-\infty, x]$ et $[x,+\infty[$) on mq f est SARS si $t\to 0$

Il ne me demande pas de démontrer plus formellement.

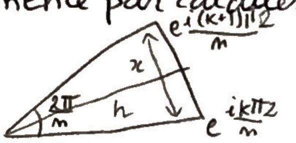
EXO 2



mq le polygône formé par ces n points est d'aire maximale lorsque les points sont espacés régulièrement

Lorsque les points sont espacés régulièrement = racines n-e de l'unité

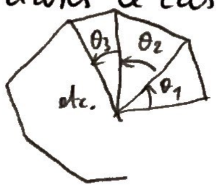
Je commence par calculer $\mathcal{A}_{max}$ en découpant le polygône en triangles :



$\mathcal{A} = \frac{xh}{2}$ (j'ai creusé dans les bas fonds de ma mémoire pour retrouver ça)

$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ d'où $\boxed{\mathcal{A}_{tot} = \frac{n}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$

Puis dans le cas quelconque :



$\boxed{\Sigma\theta_i = 2\pi}$

et $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sin(\theta_i)$

J'essaye plusieurs majorations mais elles sont toutes trop brutales, je ne sais pas trop quoi faire.

Il dit : « INDICATION, concavité »

J'essaye d'utiliser $\sin(x) \leq x$ mais ça donne encore une majoration + gde que $\mathcal{A}_{tot}$. (en plus je me me souvenais plus de l'inégalité alors j'ai écrit $\sin(x) \leq \frac{\pi}{2} - x$ mais de toutes façons ça me fct pas)

Il répète : « INDICATION, concavité, Jensen »

__Jensen__ : pour f concave, et $\Sigma\lambda_i = 1$, $f(\Sigma\lambda_i x_i) \geq \Sigma\lambda_i f(x_i)$

Je propose $\lambda_i = \frac{1}{n}$ puis $\sin\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\theta_i}{n}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin(\theta_i)$ (c'est trop beau)

L'oral se finit là-dessus.

ORAUX 2023 - Maths 1

Centrale Supélec

Ludovic CAI PCX2

Énoncé

Soit $\forall x \in]-1;+\infty[, f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t-1}{\ln(t)} t^{-(x+3)}$.

1/Montrer que f est bien définie.

2/Calculer la limite en $+\infty$ de f.

3/Montrer que f est C^1, en déduire ses variations.

Déroulé et éléments de correction

J'ai voulu directement utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètre (TCIP pour les intimes) pour montrer que f est bien définie et pouvoir directement appliquer le théorème de convergence dominée (TCD) car les hypothèses sont sensiblement les mêmes.

Toutefois il m'interrompt lorsque je réalise mon hypothèse de domination (locale ici car sinon cela ne fonctionne pas) et me demande ce que je fais. Je lui explique et il me demande d'effacer pour montrer de façon "classique" que l'intégrale est bien définie. Je lui explique que ça revient au même mais il veut absolument (il a haussé le ton) que je refasse. Se créé alors une certaine tension mais je m'exécute. Le reste se déroule sans problème avec un léger manque de temps pour étudier les variations (merci de m'avoir fait réécrire tout un tableau).

1/On a $\forall x \in]-1;+\infty[, \frac{t-1}{\ln(t)} t^{-(x+3)} \underset{t \to 1}{\sim} 1$ et $\frac{t-1}{\ln(t)} t^{-(x+3)} \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{x+2} \ln t} = o(\frac{1}{t^{x+2}})$ avec $x+2 > 1$ donc on a la bonne définition par faux problème de convergence et par critère de Riemann. ($t \to \frac{t-1}{\ln(t)} t^{-(x+3)}$ est continue pour tout $x \in]-1;+\infty[$)

2/En appliquant directement le TCD (en utilisant une hypothèse de domination locale sur l'intervalle $[a;+\infty[$ avec $a \in]-1;+\infty[$ on a $f(x) \underset{t \to +\infty}{\to} 0$

3/ On applique le théorème de dérivation C^1 et on étudie la dérivée obtenue.

Conclusion

C'est un exercice classique très proche de ce qu'on peut trouver dans les TDs, il faut visiblement faire toutes les questions dans l'ordre de façon scolaire sinon l'examinateur aime pas. L'oral durant 30 mins, il faut aller assez vite pour terminer.

ORAUX 2023 - Maths 2

Centrale Supélec

Ludovic CAI PCX2

Énoncé

On dispose d'une application de $\mathbb{R}_n[X], \varphi_n(P) = n^2 XP - ((2n-1)X+1)(X-1)P' + X(X-1)^2 P''$

1/Montrer que φ est linéaire, calculer $\varphi_n(1)$ et montrer que $\forall i \in [\![1,n]\!], \varphi_n(X^i) = (n-i)^2 X^{i+1} + 2i(n-i)X^i + i^2 X^{i-1}$.

2/Montrer que $\varphi_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$, et calculer sa représentation matricielle dans la base canonique.

3/*Python* Calculer la matrice de φ_2. Est-elle diagonalisable ? Conjecturer sur les valeurs propres de φ_2.

4/Vérifier la conjecture.

5/Conjecturer sur les valeurs propres de module maximal.

6/Montrer que $(X-1)^n$ est vecteur propre de φ_n.

7/Montrer que $\varphi_{n+1}((X-1)P) = (X-1)(\varphi_n(P) - P)$, en déduire que si P est vecteur propre de φ_n alors $(X-1)P$ est vecteur propre de φ_{n+1}.
8/Montrer que $\Pi_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 X^i$ est vecteur propre de φ_n.
9/Montrer que $n^2 - j(j-n)$ est valeur propre $\forall j \in [\![0; n]\!]$. Vérifier la conjecture de la question 5.
10/Question non traitée dont j'ai oublié l'énoncé.

Déroulé et éléments de correction

Un énoncé d'une page, avec 30 mins de préparation. Les premières questions sont longues et calculatoire mais se font rapidement. Le python ici n'était pas dur il suffisait d'exécuter une fonction déjà implémentée. Il ne faut pas se décourager face à la taille des lignes de calculs.

Conclusion

L'examinateur n'a pas été très bavard, mais m'a tout de même aidé à finir mes calculs lorsque ces derniers devenaient extrêmement longs.

ORAUX 2023

Mines-Pont

Ludovic CAI PCX2

Énoncé

Exercice 1

Soit A un ensemble de n éléments distincts de $\mathbb{R}$, on pose $B = A + A = \{a + a' : a, a' \in A\}$.
Montrer que $2n - 1 \leq card(B) \leq \dfrac{n(n+1)}{2}$. et généraliser à $B = kA = A + A + \cdots + A$ (k fois)

Exercice 2

Soit a_n une suite de réels positifs dont la série converge. Montrer que la série de terme général $\dfrac{a_n^x}{n}$ converge $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

Déroulé et éléments de correction

Exercice 1

Préparation de 15 mins, j'ai étudié le cas où $card(B) = 2n - 1$ qui se fait lorsque $A = [\![0; n-1]\!]$. Puis j'ai classé les éléments de A par ordre croissant, $A = \{a_1, \cdots a_n\}, a_1 < \cdots < a_n$ puis j'ai placé dans un tableau les combinaisons $a+a'$ des éléments de B qui donne un tableau triangulaire supérieur. On a $a_1+a_1 < a_1+a_2 < \cdots < a_1+a_n < a_2+a_n < \cdots < a_n+a_n$, d'où $card(B) \geq 2n - 1$.

Pour la majoration j'ai expliqué qu'on avait au maximum $\dfrac{n(n+1)}{2}$ éléments distincts dans B et qu'on avait directement la majoration. **Mais** l'examinateur me dit que ce n'est pas suffisant. Je le regarde alors incrédule car je ne vois pas comment ça pourrait être autrement. Je cherche alors sans grand succès une meilleure démonstration pendant 15 bonnes minutes (très long sachant que l'exercice 1 dure 25/30 minutes). Il me dit alors à la fin d'un air exaspéré que je fais des choses trop compliquées et qu'il suffit de voir que c'est "triangulaire supérieur" pour avoir directement la majoration, chose que j'ai dite 15 minutes avant. Je fronce les sourcils et lui fais remarquer que c'est exactement ce que j'ai dit, il bégaye et essaye de se justifier en me disant que c'était pas clair alors que j'avais littéralement écrit les éléments de B en montrant que c'est triangulaire. Comment dire qu'il ne m'écoutait absolument pas ...

Exercice 2

Pour $x \geq 1$ la convergence se fait directement. Pour le reste je cherche à montrer que $a_n \underset{+\infty}{=} o(\dfrac{1}{n})$, sauf que je me rend compte qu'il manque une hypothèse de monotonie de a_n donc ça n'aboutit pas. Il me dit alors de poser des ensembles $I = \{n : a_n \geq \dfrac{1}{n}\}$ et $J = \{n : a_n \leq \dfrac{1}{n}\}$. Et de majorer la somme partielle.

Conclusion

Examinateur avec un accent assez marqué qui n'avait vraisemblablement pas envie de me faire passer un oral un 13 juillet avant le déjeuner. Il faut se préparer mentalement au fait que les examinateurs/examinatrices ne sont parfois pas les plus attentifs à ce qu'on dit ou écrit.

ORAUX 2023

Polytechnique

Ludovic CAI PCX2

Énoncé

On dispose de n pièces équilibrées. Les tirages sont supposés indépendants.
À l'étape 1, on lance les n pièces et on obtient X_1 piles, on garde X_1 pièces.
À l'étape 2, on lance les X_1 pièces et on obtient X_2 piles, on garde X_2 pièces.
On continue jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de piles.
Déterminer la fonction génératrice de X_2 puis celle de X_k

Déroulé et élément de correction

On connait la loi de X_1 qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$ donc $G_{X_1}(t) = (\frac{t+1}{2})^n$.
Je propose d'utiliser la formule des probabilités totales pour avoir les probabilités de X_2 et donc avoir sa fonction génératrice par théorème de transfert : $\mathbb{P}(X_2 = i) = \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(X_2 = i \cap X_1 = j)$.
Après développement on aurait $\mathbb{P}(X_2 = i) = \sum_{j=i}^{n} \frac{1}{2^j}\frac{1}{2^n}\binom{j}{i}\binom{n}{j}$.
D'où $G_{X_2}(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X_2 = i)t^i = \sum_{0 \le i \le j \le n} \frac{1}{2^j}\frac{1}{2^n}\binom{j}{i}\binom{n}{j}t^i = \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{2^j}\binom{n}{j}\sum_{i=0}^{j} t^i\binom{j}{i} = \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{n}(\frac{t+1}{2})^j\binom{n}{j} = (\frac{t+3}{4})^n$.
(qui est le bon résultat)
Il aurait été agréable que l'oral se déroule comme cela mais l'examinateur m'a demander de m'intéresser directement à $E(t^{X_2})$ en décomposant X_2 suivant les résultats de X_1.

J'écris $X_2 = \sum_{j=1}^{X_1} Y_j$ où $Y_j \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$ iid.
Il me dit alors d'écrire ceci

$$\begin{aligned}
E(t^{X_2}) &= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(\sum_{j=1}^{X_1} Y_j = i)t^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X_1 = i \cap \sum_{j=1}^{X_1} Y_j = i)t^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X_1 = i)\mathbb{P}(\sum_{j=1}^{X_1} Y_j = i)t^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\frac{1}{2^n}\frac{1}{2^i}t^i = (\frac{t+2}{4})^n
\end{aligned}$$

On trouve évidemment un résultat final faux car le passage de la première ligne à la deuxième est fausse car il aurait fallu écrire $X_1 \ge i$. Or j'ai beau eu débattre avec l'examinateur, il voulait absolument que j'écrive $X_1 = i$ en me disant que c'était bon. L'oral étant à 14h, il revenait de sa pause déjeuner, il devait probablement avoir le fameux coup de sommeil dû à la digestion pour ne pas réaliser ce qu'il me disait ... (du moins j'espère que c'est ça)
On vérifie en plus que si on prend $X_1 \ge i$ on retombe sur le calcul fait avec la formule des probabilités totales.

Conclusion

Si vous sentez que l'examinateur s'endort ne vous fiez pas entièrement aux indications qu'il vous donne surtout si la logique y est absente.

ORAUX 2023

ENS (UL)

Ludovic CAI PCX2

Énoncé Exercice 1

On dispose d'un jeu classique de 52 cartes, déterminer le nombre de tirages moyen avant de tirer un as.

Exercice 2

Soit $A, B \in S_n^+(\mathbb{R})$ tels que $tr((A+sI_n)^{-1}) = tr((B+sI_n)^{-1}), \forall s \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que A est semblable à B.

Déroulement et éléments de correction

Exercice 1

J'ai posé $X =$"nombre de tirage avant d'avoir un as". On veut alors $E(X)$.

Je décide de commencer par calculer $P(X=k), \forall k \in [\![1;48]\!]$, mais cela mène à des calculs trop volumineux donc l'examinateur me dit de penser à autre chose.

En fait ici X est à valeur entière donc on peut utiliser la relation $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{52} \mathbb{P}(X \geq k)$.

Il se trouve également que $\mathbb{P}(X \geq k)$ se calcule directement, en effet c'est $\mathbb{P}(X \geq k) = \dfrac{\binom{52-k}{4}}{\binom{52}{4}}$, qui se comprend assez naturellement car on pioche k cartes et il faut répartir les as dans les cartes restantes.

On a alors $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{52} \dfrac{\binom{52-k}{4}}{\binom{52}{4}} = \dfrac{1}{\binom{52}{4}} \displaystyle\sum_{k=0}^{52} \binom{k}{4}$. En utilisant la relation de Pascal, $\binom{k}{i} = \binom{k+1}{i+1} - \binom{k}{i+1}$, on a $E(X) = \dfrac{53}{5}$.

L'examinateur m'a ensuite demandé comment est-ce qu'on aurait pu retrouver directement cette valeur. Il s'agit en fait de penser aux longueurs moyennes des intervalles de cartes séparant les as dans le jeu de carte. En effet il on reprend l'exercice avec 1 as on trouve une espérance de $\dfrac{53}{2}$, puis si on prend 2 as on a $\dfrac{53}{3}$, qui permet donc de bien se rendre compte du phénomène.

Exercice 2

Il s'agit au départ de diagonaliser A et B dans une base de vecteur propre (théorème spectral) et ensuite on a l'inégalité suivante : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i + s} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\beta_i + s}$ où les α_i et β_i sont respectivement les valeurs propres de A et B.

Ensuite j'ai pataugé un peu, il fallait en fait penser à réaliser un DL lorsque s tend vers $+\infty$.

En effet on a bien $\dfrac{1}{\alpha_i + s} = \dfrac{1}{s} \dfrac{1}{\frac{\alpha_i}{s} + 1}$ où on peut réaliser un développement limité car $\dfrac{\alpha_i}{s}$ tend vers 0.

L'oral s'est terminé là, l'examinateur m'a dit qu'ensuite c'était de l'identification par rapport aux puissances issues du DL (sûrement identique à ce que l'on fait avec les polynômes).

Conclusion

Un oral assez court (45 minutes) et qui passe plus vite qu'on ne le pense. L'examinateur fut très agréable et donnait des indications (de façon détournées) lorsqu'il le fallait.

PC*2	**Compte rendu d'oral**	**Concours 2021**

Nom, Prénom : HYS Sakula
Concours, Epreuve : Maths ENS (à Lyon)
Examinateur : homme asset jeune (début 40aine), très gentil, brun cheveux courts
Note : (éventuellement)

A scanner de préférence sous forme PDF et à envoyer à pcetoile2@gmail.com.
Sinon envoyer à M. Fagebaume , Lycée Louis-Le-Grand, 123 rue St-Jacques, 75005 Paris

Merci de noter le maximum d'informations sur le déroulement à proprement parler de l'oral : questions de cours, réactions/remarques de l'examinateur, dialogues croustillants, indications données pendant le déroulement de l'oral, etc ...

Exo : $\boxed{1/2}$

· $GL_n(\mathbb{Z}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}), \det M = \pm 1\}$

· $\mathbb{Z}$ - similitude : $\exists Q \in GL_n(\mathbb{Z}),\ A = QBQ^{-1}$

$A \simeq B \Rightarrow A$ et B $\mathbb{Z}$ - semblables ?

Déroulé :

Que d'aventures .. Ils sont doués sur le fléchage... Je me retrouve devant la mauvaise salle, il y a bcp de retard, c'est bizarre puisque je suis la 1e, donc je bouge un peu

→ j'arrive 30 min en retard devant la bonne salle

Ils sont très compréhensifs, j'ai 3 choix :

- décaler tout le monde → ça se fait pas...
- m'éliminer (qd un candidat a trop de retard)
- me reporter en fin de journée

↳ c'était vraiment sympa de leur part

(c'était la journée des pb je crois , Saclay avait "laissé 1 msg vocal" à un autre candidat et changé son emploi du temps sans confirmat° (le pauvre))

BREF (durée = 45 min)

1e idée : à partir de $A = PBP^{-1}$, faire un changement de base tq $B = RBR^{-1}$ et $PR \in GL_n(\mathbb{Z})$

Tout d'abord, l'implicat° me paraît fausse mais j'ai une mauvaise intuit° mathématique donc je me fais pas confiance ^-^

J'essaie de trouver un motif : on essaie des cas simples :

A diagonalisable, trigonalisable ?

« Ou même A diagonale »

Ah... mais là c'est trop simple, pensais-je.

En effet, on peut essayer un cas encore + simple ô, dis-je.

$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ ... qu'en faire ? En + je maîtrise bof les changements de base...

« Par ex. on prend $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ » (là il me balance en fait tout plein d'indices pour m'amener à avoir un contre-exemple)

$A \simeq B$? $\to B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (c'est utile à savoir, j'ai dû le retrouver ><)

→ donc je trouve P aussi

→ donc je cherche Q tq $PQ \in GL_n(\mathbb{Z})$

- what mais c'est compliqué ?
- bah je sais pas, un produit de 3 matrices c'est + compliqué...

Il me dit + explicitement de chercher directement $Q \in GL_n(\mathbb{Z})$ dans $A = QBQ^{-1}$

Je me souviens pas de $Q^{-1} = \frac{1}{\det Q}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ (mauvaise impress°)

On fait le produit, on résout : $a = \varepsilon_1 b = \pm b$

$d = \varepsilon_2 c = \pm c$

$\Rightarrow 1 = \underbrace{bc}_{\in \mathbb{Z}} \underbrace{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}_{\in \{-2, 0, 2\}}$

→ impossible

Et c'est la fin.

<u>note attendue</u> : 8 sans compter que j'ai rallongé sa journée

<u>note obtenue</u> : 12 (adorable jusqu'au bout ♡)