

Centrale Maths-Info

BENALI Amine

Juillet 2024

1 Sujet

On définit :

$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \forall p \in \mathbb{N}^*, C_p(A) = \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{p}{k} (A^T)^k A^{p-k}$$

On dit que A est p-symétrique ssi $C_p(A) = 0$

- 1) Déterminer les matrices 1-symétriques
- 2) Soit $N \in M_n(\mathbb{R})$ nilpotente, quel est son spectre ? Déterminer les matrices nilpotentes 1-symétriques.
- 3) Soit r l'indice de nilpotence de $N \in M_n(\mathbb{R})$, montrer que $r \leq n$ puis calculer $C_{2n}(\mathbb{R})$
- 4) Coder une fonction indice(N) renvoyant r
- 5) Coder une fonction psym(N) qui renvoie (*indice(N)*, p_N) avec p_N le plus petit entier tel que $C_{p_N}(N) = 0$. Conjecturer que $p_N = \alpha r + \beta$ avec (α, β) à trouver.
- 6) Montrer que si A est p-sym, alors A est p+1-sym
- 7) On note $m = \lfloor \frac{p_N - \beta}{\alpha} \rfloor$, on suppose $N^m \neq 0$
 - a) Montrer que $\exists X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $N^m X \neq 0$ et $\forall k > m, N^k X = 0$
 - b) j'ai oublié
 - c) En déduire la conjecture

J'ai perdu énormément de temps sur les questions 4) et 5) à cause d'une erreur bête dans mon code, je m'étais donc arrêté là pour la préparation.

2 Déroulé

J'avance rapidement sur les 2 premières questions, mais trop rapidement sur la question 2 puisque je ne montre qu'une matrice à diagonale nulle est nilpotente qu'après qu'il me dise que je n'avais pas fini mon raisonnement.

J'avais oublié comment montrer la question 3 durant la préparation, mais je l'ai retrouvée sur le moment au tableau sans problème.

Vient le moment du code avec 2 questions dans lesquelles je fais la même erreur de neuille stupide, c'est à dire écrire une boucle while avec une condition

sur N en considérant N comme un entier alors qu'il s'agit d'une matrice. Je n'ai pas réussi à m'en rendre compte seul. Ensuite, d'après le correcteur, mon code était bon, mais `psym` ne fonctionnait toujours pas et ni le correcteur ni moi avons trouvé la cause. Il me donne donc les valeurs de α et β . Ces deux questions m'ont vraiment fait perdre un temps considérable.

La question 6) est résolue facilement, mais l'examineur étant dans ses pensées (possiblement à cause du code précédent), il a cru voir une faute dans l'écriture de ma formule de pascal, m'a demandé de refaire le triangle pour aboutir à la formule que j'avais bien initialement écrite, et qui était la bonne.

La 7)a) m'a pris un peu de temps, puis l'oral était fini.

3 Commentaire

L'examineur était jeune et plutôt sympathique, ce qui avait légèrement calmé mon appréhension pour ce premier oral. Ce qui m'a principalement pénalisé est sûrement les erreurs de codes et ma précipitation.

Centrale - 2024 - Maths-info

Wassim Aliouane PCX2

Juillet 2024

Note attendue : 13-14,

Note obtenue : 8

1 Sujet

$A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique si :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, a_{i,j} \geq 0, \sum_{k=1}^n a_{i,k} = 1$$

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ stochastique.

- 1) Montrer que 1 est valeur propre de A et de A^T . Montrer que si $\lambda \in sp(A)$, alors $|\lambda| \leq 1$
 - 2) Soit $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Trouver une CNS pour avoir $|\sum_{k=1}^n z_k| = \sum_{k=1}^n |z_k|$.
 - 3) Soit $\lambda \in sp(A)$, avec $|\lambda| = 1$. Montrer que l'on a nécessairement $\lambda = 1$ (question fausse, il manque des hypothèses mais c'était donné comme ça).
 - 4) Sachant que `rd.randint((1, 1000, n))` renvoie une liste de n entiers aléatoires entre 1 et 1000, écrire une fonction `ligne(n)` qui donne une liste de taille n de coefficients positifs dont la somme vaut 1.
 - 5) Une certaine fonction (je ne sais plus laquelle) donne les valeurs propres de A avec multiplicité. Ecrire une fonction `geneint(n)` renvoyant 10 matrices stochastiques de taille n aléatoires. Vérifier que 1 est bien valeur propre de 10 matrices stochastiques générées par cette fonction (j'ai pris $n = 4$). Conjecturer la dimension du sous-espace propre associé à 1.
 - 6) `A.dot(B)` donne le produit matriciel de A par B . Pour A stochastique de taille 2, afficher A^{20} , A^{30} , et conjecturer la limite de A^n .
 - 7) Soit V un vecteur propre associé à 1 pour A^T . Calculer $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{j,i} |v_j| - \sum_{k=1}^n v_k$. En déduire que les coefficients de V sont tous non nuls, et que $|V|$ est un vecteur propre associé à 1 pour A^T .
 - 8) Si A et B stochastiques, que dire de AB ? (bizarre de poser la question ici...).
 - 9) A l'aide de 7), démontrer la conjecture Q5)
- Fin de ma préparation, il restait encore 3 questions que je n'ai pas eu le temps de faire, car j'ai passé au moins 7-8min sur les 30 de préparation sur Q3).

2 Déroulé

Je dois avouer que je m'y attendais un petit peu, vu comme je me suis UN PEU emporté pendant cette oral. Ça ne m'était jamais arrivé. Une de mes premières épreuves de Centrale, quelques jours après avoir vu mes notes de l'X, donc j'étais TRES tendu.

Q1° On prend $U = (1, 1, \dots, 1)^T$, on montre facilement que $AU = U$, donc 1 est bien valeur propre de A , et donc de A^T . Question : "Vous pouvez détailler le calcul ? Pourquoi c'est aussi une vp de A^T ? - Car $sp(A) = sp(A^T)$? - Ecoutez, si vous ne justifiez pas ce que vous faites je ne peux pas mettre de points moi hein, quelle propriété vous permet de justifier ça ?" Là j'ai compris que ça allait vite m'énerver. "Le déterminant d'une matrice est égale à celui de sa transposée ? - Oui, voilà ! Maintenant faites le calcul" (Ok...)

Pour $\lambda \in sp(A)$, on prend $X = (x_1, \dots, x_n)^T \in E_\lambda(A)$. Comme $X \neq 0$, on a forcément l'existence de $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $|x_{i_0}| = \max\{|x_i|, i \in \{1, \dots, n\}\} > 0$, donc :

$$|\lambda| = \left| \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} \frac{x_j}{x_{i_0}} \right| \leq \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} \left| \frac{x_j}{x_{i_0}} \right| \leq \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} = 1$$

Q2° CNS proposée : "Les z_i sont sur une même demi-droite d'origine 0 - Ce n'est pas ce que je veux - Comment ça ? (???) - Ce n'est pas exactement ce que je recherche - Vous préférez que je dise qu'ils ont même argument ? - Oui c'est mieux" (...). Je propose de noter r_i et θ_i leurs modules et arguments. On a :

$$|\sum_{k=1}^n z_k|^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} r_i r_j \cos(\theta_i - \theta_j)$$

Donc on a forcément $\theta_1 = \dots = \theta_n[2\pi]$. Lui : "Votre méthode n'est pas bonne, et votre égalité est fausse". Je fais le détail, il en a rien à faire. "Vous me dites que j'écris des choses fausses, alors que c'est juste - Je n'ai pas fait comme ça (il voulait que je fasse une récurrence) - Ce n'est pas parce que vous n'avez pas fait comme ça que c'est forcément faux ce que j'écris, c'est pas un QCM à réponse unique là. Mais si vous voulez je peux la faire la récurrence" (je n'aurais vraiment pas dû dire ça...). Il me fait tout écrire, initialisation, cas $n = 2$, hérédité. Il m'a posé beaucoup de questions nulles pendant l'hérédité, il voulait tout les détails, et cherchait, je pense, à me faire perdre un maximum de temps. Déjà 20min sur les 30 écoulées et il me reste 7 questions à présenter...

3) Je suppose $|\lambda| = 1$. En utilisant les mêmes notations que Q1) :

$$|\lambda| - a_{i_0, i_0} \leq |\lambda - a_{i_0, i_0}| = |\sum_{j \neq i_0} a_{i_0, j} \frac{x_j}{x_{i_0}}| \leq \sum_{j \neq i_0} a_{i_0, j} |\frac{x_j}{x_{i_0}}| \leq \sum_{j \neq i_0} a_{i_0, j} = 1 - a_{i_0, i_0}$$

Toutes les inégalités sont donc des égalités. (Rq : l'indication de la question précédente sur la CNS ne sert à rien pour cette question, mais permet de montrer un autre résultat, qui est que toute valeur propre de module 1 est forcément racine de l'unité. C'est pour ça que j'ai perdu pas mal de temps pendant la préparation, l'exercice n'a pas vraiment de logique, et je cherchais un lien entre les questions...) Alors $1 - a_{i_0, i_0} = |\lambda - a_{i_0, i_0}|$. Géométriquement, on voit bien que $\lambda = 1$, si $a_{i_0, i_0} \neq 0$. Rq : l'exercice est faux, si cette condition n'est pas réalisée, la propriété à démontrer est fausse (cex : anti-diagonale de taille 2). Il me dit que oui, pour cette question les coefficients sont tous strictement positifs. Rq 2 : Il me fait faire des dessins nuls au tableaux pour, j'imagine, encore me faire perdre du temps

Il ne reste même pas 5min. "On passe au python montrez-moi ce que vous avez fait" Pour la fonction ligne(n), j'ai fait quelque-chose d'assez bizarre... J'ai généré un nombre aléatoire entre 0 et 1, puis un nombre entre 0 et 1-ce premier nombre etc. Puis j'ai pris le n -ème nombre comme 1-(somme des autres nombres). Bref, bizarre mais ça marche (même si je pense qu'on a pas une loi uniforme dans ce cas, mais comme le but de l'exercice n'était pas de faire des probas mais de générer des matrices stochastiques...). Là il me fait comprendre que ça fonctionne en tapant juste :

```
a=rd.randint(1,1000,n)
return a/np.sum(a)
```

(Oui c'est vrai). On est question 4), j'ai préparé jusqu'à la 9). Je finis en lui disant que je n'ai pas présenté tout ce que j'avais. Il me demande mes brouillons pour "voir", sauf que je ne fais pas de brouillons (et puis bizarre de demander ça ? On est à un oral non ?)... Du coup je lui dis ce que je voulais faire, et je lance tout mes programmes pour lui montrer ce que j'ai. Je ne sais pas s'il m'a écouté, mais il a dit qu'il allait "prendre ça en compte" (il ne l'a pas fait visiblement).

3 Commentaire

Examineur assez insupportable, qui n'a visiblement aucune conscience professionnelle : son exercice était facile, je savais le faire, il savait que je savais faire, et il a quand-même décidé de me donner cette note. J'avoue que je n'aurais pas dû répondre comme je l'ai fait, mais j'avais vraiment envie de me pendre depuis 3-4j. Bilan : rien à faire, j'aurais eu centrale même s'il m'avait mis 0.

ORAUX 2024

Nom : MESSAGER Cristian

Concours : Centrale

Épreuve : Maths - info

Note attendue : 17

Note obtenue : 15

L'examinateur m'installe à la table de préparation où j'ai un ordinateur avec Pyzo et un classeur avec le poly de M. Houkari avec les fonctions python sur les polynômes, les matrices ...

L'énoncé est très long (10 questions), je ne me souviens plus de la fin mais voici jusqu'où je suis allé (j'avais fait 5 questions pendant la préparation) :

Soit $p \in \mathbb{N}^*_{\geq 2}$. On définit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+p} = u_{n+p-1} + \dots + u_n \quad \text{et} \quad U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix}$$

$$\text{On pose } P = X^p - \sum_{i=0}^{p-1} X^i$$

1) Trouver A une matrice telle que $U_{n+1} = A U_n$ et en déduire U_n en fonction de A, n et U_0 .

J'ai trouvé $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \\ 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$ et donc $U_n = A^n U_0$

2) Montrer que $\chi_A(x) = P$

Je propose de développer suivant la dernière ligne, il semble étonné et me demande ma démarche ensuite. Je commence à expliquer qu'on a successivement des matrices triangulaires par blocs dont les déterminants se calculent facilement. Il me demande si ça a abouti je dis de mon ton le plus convaincu "Oui !" (en réalité j'espérais que oui car sur mon brouillon j'en'avais fait que le début pour ne pas perdre de temps, mais je sais que je l'avais fait pendant l'année). Il me dit d'y aller et ouf ça marche. Mais je pense qu'il attendait une autre méthode, et bien que ça soit juste j'ai perdu du temps à devoir lui expliquer.

3) Un code python est écrit sur le sujet, on me demande de le taper à l'ordinateur (je n'avais rien à compléter).

4) Exécuter le programme. Que peut-on conjecturer sur le nombre de racines de P ?
Y a-t-il une racine de module nettement supérieur? (oui)

Nom :

Concours :

Épreuve :

Note attendue :

Note obtenue :

Le programme affichait les racines de P et leur module.
On peut conjecturer que P est scindé à racines simples.

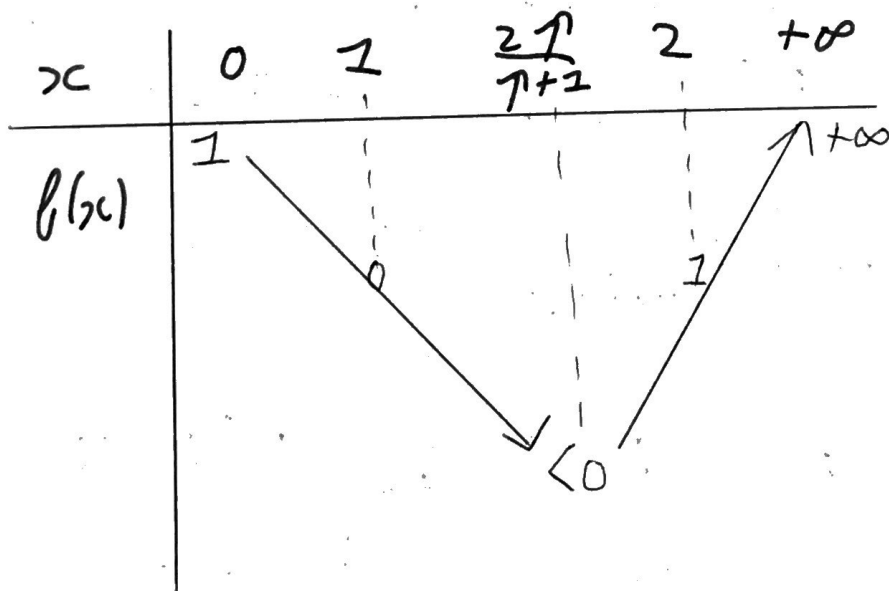
5) En posant $T(X) = (X-1)P(X)$; montrer que P admet une unique racine réelle positive et que cette racine est dans $]1; 2[$.

L'intérêt du facteur $(X-1)$ est d'utiliser la "somme géométrique" de $P(X)$. On obtient :

$$T(X) = X^p(X-1) - (X^p - 1) = X^{p+1} - 2X^p + 1$$

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ \begin{cases} x \mapsto x^{p+1} - 2x^p + 1 \end{cases}$$

$$; f'(x) = (p+1)x^p - 2px^{p-1} \\ = x^{p-1}((p+1)x - 2p)$$



On en déduit bien par continuité et stricte monotonie l'existence et l'unicité de la racine.

6) Montrer que P est scindé à racines simples. Qu'en déduire sur A ?

Je ne vois pas trop comment partir, il me dit de réfléchir à ce qu'est une racine d'ordre 2 ou plus. Je dis que cette racine est racine de P et de P' et il me dit oui. On les racines de T' sont faciles à calculer!

Donc si par l'absurde T a une racine α d'ordre 2 ou plus alors α racine de T' donc $\alpha \in \{0; \frac{2T}{T+1}\}$ absurde car ces valeurs n'annulent pas T d'après le tableau de variations.

Donc T est scindé à racines simples donc P aussi.

Donc on a aussi que A est diagonalisable.

7) Je me suis arrêté pendant cette question, il fallait il me semble exprimer u_n en fonction notamment des racines de P .

Il me reste peu de temps, il me dit "Si on décompose U_0 sur une base de vecteurs propres de A ça donne quoi?"

$$U_0 = \sum_{i=1}^p \mu_i v_i \quad \text{avec } (v_i)_{1 \leq i \leq p} \text{ cette base}$$

$$U_n = A^n U_0 = \sum_{i=1}^p \mu_i A^n v_i = \sum_{i=1}^p \mu_i \lambda_i^n v_i$$

Je m'arrête là. Il n'y avait donc quasiment rien en informatique (y compris sur la fin rien de plus).

Candidat, session: Timoléon Rescan, 2024

Classe: PCX2

Epreuve: Maths Info

Concours: Centrale

Note attendue: 14

Note obtenue: 17

Enoncé

Il est demandé de charger les modules de numpy sur l'algèbre linéaire, ainsi qu'une fonction *mat* déjà programmée, qui à un entier n renvoie la matrice de φ_n dans la base canonique.

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'application φ_n , tel que pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$

$$\varphi_n(P) = n^2XP - [(2n - 1)X + 1](X - 1)P' + X(X - 1)^2P''$$

1/Mq φ_n est linéaire, calculer $\varphi_n(1)$

Montrer que $\forall i \in [1, n]$, $\varphi_n(X^i) = (n - i)^2X^{i+1} + 2i(n - i)X^i + i^2X^{i-1}$

2/Montrer que φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Représenter la matrice de φ_n dans la base canonique.

3/A l'aide de python et des fonctions *mat* et *eigvalues*, représenter la matrice de φ_2 et conjecturer les valeurs propres de φ_2 .

4/ Démontrer la conjecture. φ_2 est elle diagonalisable?

5/Observer les valeurs propres de φ_n émettre une conjecture sur la diagonalisabilité de φ_n et la valeur maximale du module des valeurs propres de φ_n .

6/ Montrer que $(X - 1)^n$ est vecteur propre de φ_n , et en donner la valeur associée.

7/ On admet que $\varphi_{n+1}((X - 1)P) = (X - 1)(\varphi_n(P) - P)$

Montrer que si P est vecteur propre de φ_n , alors $(X-1)P$ est vecteur propre de φ_{n+1}

8/Montrer que $\Pi_n = \sum_{i=0}^n \left(\frac{n!}{i!(n-i)!}\right)^2 X^i$ est vecteur propre de φ_n

9/ Montrer par récurrence que les valeurs propres de φ_n sont $-n+j(j+1)$ pour j un entier entre 0 et n . En déduire une démonstration de la conjecture question 5.

10/ a) On considère la suite de polynômes (Q_k) définie (je crois) par:

$$Q_0 = X^n \text{ et } Q_{k+1} = \frac{1}{2^n} \varphi_n(Q_k)$$

Montrer que la suite des polynômes converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction qui est aussi polynomiale.

b) Dernière question du sujet, mais j'en ai oublié le but :/

Déroulé et éléments de résolution

Le temps de préparation se fait dans la même salle que la présentation, donc ayez des bouchons d'oreille avec vous :)

Dans le temps de préparation, j'ai eu le temps d'aborder une grande partie des questions, parce que j'ai voulu m'épargner les calculs lourds (q2,q8). Il n'y avait pas tant de python, donc j'essayais surtout de réfléchir à ce que je devais faire pour chaque question.

Lors de l'oral, je trouve qu'il est facile de se perdre. On a des feuilles, le sujet, on nous demande de passer du tableau à l'ordi, puis de revenir au tableau... Limiter le nombre de pages sur lesquelles on écrit paraît être une bonne idée.

L'oral s'enchaîne assez vite. Après avoir hésité un peu sur la question 2 au tableau (j'ai fait une erreur de calcul), j'avance sur ce que j'ai développé. Arrivé au python, l'examineur me fait développer un peu ce qu'on peut dire autour: avec une fonction autre que celle demandée, on obtient aussi les coefficients de certains vecteurs propres (qui vont servir dans la suite) et il me fait trouver les valeurs propres par produit matriciel (j'étais passé par le polynôme caractéristique, c'était plus rapide je pense).

Sur le reste du développement, j'essaie d'aller assez vite parce que je sais l'oral court. L'examineur m'arrête parfois pour vérifier ce que je fais, et me demande d'écrire certains calculs dont j'annonce le résultat (il a dit au début de l'oral que cette manière lui convenait, pas besoin de tout écrire). Lorsque le temps vient à manquer, il me demande comment j'aurais fait pour finir la question. On s'est donc arrêté sur la question 9, après qu'il m'ait épargné les calculs (lourds) de la 8.

Bilan

Un oral de 30 min, ça passe particulièrement vite. J'ai pas fait trop de fautes (hormis une ou deux étourderies en calculs) et le sujet n'est pas trop compliqué mais assez long. L'examineur était assez neutre, mais assez vif. La partie python était minime (4 lignes de calcul).

PC*2

Compte rendu d'oral

Concours 2021

Nom, Prénom : PHOLICHITH Richard

Concours, Epreuve : Centrale - Maths 2

Examineur : La cinquantaine . Léger accent . Yeux vifs et gentils . Presque chauve .

Note : (éventuellement)

A scanner de préférence sous forme PDF et à envoyer à pcetoile2@gmail.com.

Sinon envoyer à M. Fagebaume , Lycée Louis-Le-Grand, 123 rue St-Jacques, 75005 Paris

Merci de noter le maximum d'informations sur le déroulement à proprement parler de l'oral : questions de cours, réactions/remarques de l'examineur, dialogues croustillants, indications données pendant le déroulement de la colle, etc ...

Les échanges seront encadrés entre crochets en pointille : [] .

Notations : n_k : reste de la division euclidienne de n par k .

$$A_{n,p} = \{ k \in \mathbb{N}; n \mathbb{N} \mid p n_k \geq k \}$$

$$|A_{n,p}| = \text{card}(A_{n,p}) .$$

$\mathbb{P}$ probabilité uniforme sur $\mathbb{N}; n \mathbb{N}$.

1) Éléments de l'ensemble $A_{20,3}$?

↳ # mon code :

$K = []$

for k in range(1, 21) :

 if $3 * (20 \% k) \geq k$:

$K.append([k, 3 * (20 \% k)])$

print(K) # J'ai associé à chaque k le couple $(k, p n_k)$

pour vérifier que je ne me suis pas trompé .

Οι ελπίδες των μορφωμένων ανδρών είναι καλύτερη από τον πλούτο της αδαίας.
Le Spoir des hommes instruits vaut mieux que la richesse des ignorants. (Démocrite d'Abdère, -460 -370)

$$A_{20,3} = \{3, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

2) Soit $p \geq 2$. Soit $f_k: t \mapsto t^{pk} - t^{pk+p-1}$ pour tout $k \geq 1$.

(a) Convergence simple de $\sum_{k \geq 1} f_k$ sur $]0;1[$.

↳ sommes partielles

(b) Convergence de $I_p = \int_0^1 \frac{t^p(1-t^{p-1})}{1-t^p} dt$.

↳ $f(t) = \frac{t^p(1-t^{p-1})}{1-t^p}$ est continue sur $[0;1]$.

En 1, faux problème de convergence.

(c) Calculer $\int_{[0;1]} f_k$ pour $k \geq 1$. Montrer que $I_p = \sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{pk+1} - \frac{1}{pk+p} \right)$

↳ $\int_{[0;1]} f_k = \frac{1}{pk+1} - \frac{1}{pk+p}$. ET TITATSUIQ.

Je pensais appliquer un TITATSUS mais
 $\sum_{k \geq 1} f_k = \frac{t^p(1-t^{p-1})}{1-t^p}$ n'a été démontré que pour $t \in]0;1[$.
Donc j'ai demandé s'il était possible de montrer l'égalité sur $[0;1]$ pour appliquer le TITATSUS mais l'examineur m'a répondu que TITATSUIQ existe ... heureusement qu'il se faisait bien.

3) Soit $\sigma_p: x \mapsto [px] - p[x]$.

Tracer σ_2 et σ_3 .

Commenter la périodicité et les valeurs prises. Conjecturer.

Démontrer la conjecture.

↳ σ_p est 1-périodique.

Entre 0 et 1, il y a p paliers régulièrement espacés comme des marches, avec une hauteur de marche de $\frac{1}{p-1}$.

4) Soit $F_p(t) = \sigma_p\left(\frac{1}{t}\right)$ et $\Phi_p(t) = 1 - \frac{1}{(p-1)!} \prod_{k=1}^{p-1} (k - F_p(t))$

(a) Coder $a(n, p)$ et $\text{somme}(n, p)$ qui renvoient respectivement $|A_{n,p}|$ et $\sum_{k=1}^n \Phi_p\left(\frac{k}{n}\right)$.

↳ # mon code :

```
import numpy as np
```

```
def a(n, p):
```

```
    K = []
```

```
    for k in range(1, n+1):
```

```
        if p*(n%k) >= k:
```

```
            K.append([k, p*(n%k)])
```

```
    return len(K)
```

```
def somme(n, p):
```

```
    S = 0
```

```
    for k in range(1, n+1):
```

```
        P = 1
```

```
        for j in range(1, p):
```

```
            P *= (j - (np.floor(p*(n/k)) - p*np.floor(n/k))) / j
```

```
        Phi = 1 - P
```

```
        S += Phi
```

```
    return S
```

(b) Faire tourner le code pour $1 \leq n \leq 20$ avec $1 < p < n$ en affichant a et somme . Conjecturer.

↳ $a(n, p) = \text{somme}(n, p)$.

code :

```
for n in range(1, 21):
```

```
    for p in range(2, n):
```

```
        print(a(n, p), somme(n, p))
```

[...] (Je n'ai pas traité la fin)...

Il y avait un truc avec pI_p .

Puis quelque chose mettant en jeu P , $\frac{|A_{n,P}|}{n}$ et la limite tendait vers pI_p .

On démontrait également la conjecture faite à la question 4)(b).

Rapport d'oral des concours

Kilian Rouge

PC₂^{*}

Centrale

Épreuve

Oral	Maths 2
Date	5 juillet 2019
Lieu	Centrale Breguet
Examineur	Homme d'une cinquantaine d'années
Remarques	

Exercice

On note $\mathcal{P}_r$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur à r

1. Montrer que l'application $\Delta_r : P \rightarrow P(X+1) - P(X)$ est un endomorphisme de $\mathcal{P}_r$. Déterminer son image et son noyau
2. Montrer que l'application $\Delta : P \rightarrow P(X+1) - P(X)$ est un endomorphisme surjectif de $\mathcal{P}$. Montrer que sa restriction à $\mathcal{E}$, l'ensemble des polynômes s'annulant en 0 est un isomorphisme. On note $\mathcal{N}$, l'application réciproque

3. Écrire une fonction PYTHON récursive donnant $N_n = \frac{1}{n!} \prod_{i=0}^{n-1} (X - i)$

4. Écrire une fonction PYTHON donnant Δ_r

5. Montrer que $(N_n)_{n \in \llbracket 0, r \rrbracket}$ est une base de $\mathcal{P}_r$

6. Écrire une fonction PYTHON calculant $\Delta_r^n(X^n) - N_n$ pour $n \in \llbracket 1, 9 \rrbracket$, conjecturer

7. Écrire une fonction PYTHON qui pour un polynôme Q à coefficients aléatoires donne $(\Delta_r^0(Q) - \Delta_r^d(Q))$

8. *Autres questions jusqu'à 12 (2 autres questions Python)*

- Pendant la préparation je pense traiter correctement les questions 1 à 7
- Lorsque je passe au tableau je me place dans la base des polynômes d'Hilbert en vue de déterminer la matrice de Δ_r dans cette base et d'en déduire noyau et image. L'examineur est casse-pieds, pour montrer que c'est un endomorphisme, je me contente de montrer que le degré diminue mais il refuse ma justification d'endomorphisme et m'oblige à montrer aussi que c'est une application linéaire
- Mon idée de passer par les polynômes de Hilbert s'avère être plus compliquée que prévu si bien qu'il m'invite à considérer autre chose. Je me place dans la base canonique pour déterminer le noyau mais il m'engueule en me disant de ne pas considérer de base
- Finalement je montre en évaluant successivement en les entiers qu'un polynôme non constant possède une infinité de racines et donc que le noyau est constitué des polynômes constants. Il trouve la démo pas suffisamment rigoureuse et je lui indique qu'il faudrait formaliser par une récurrence

Exercice

- Pour l'image je trouve la réponse assez évidente mais il m'oblige à montrer que $\mathcal{P}_{r-1}$ convient
Je lui indique que j'ai montré au début que le degré diminuait
Il me dit de le remonter
- Je lui dis que les coefs de plus haut degré s'annulent $\Rightarrow$ Je ne vois pas !
- Je lui écris l'expression dans la base canonique $\sum a_k(X+1)^k - a_k X^k \Rightarrow$ Je ne comprends pas !
- Je développe avec le binôme $\Rightarrow$ Je ne vois pas !
- Je simplifie les termes de plus haut degré $\Rightarrow$ OK
- Une vraie perte de temps, et là erreur, je commence à m'énerver un peu parce que j'ai l'impression que l'oral tourne en rond et qu'il me fait redémontrer des trucs évidents*
- Il reste cinq minutes, l'examineur s'en rend compte et va voir ce que j'ai fait sur l'ordi
- Il me propose de passer à la question 2
J'essaye de traiter rapidement les questions pour au moins survoler toutes les questions que j'ai traitées
- Il m'arrête, me dit qu'il ne comprend pas, je commence à lui expliquer
- Il m'arrête pour me dire que le temps est écoulé

Sur 7 questions que j'ai regardées, 1 a été regardée avec l'examineur
Je finis mes oraux sur un échec total avec un examinateur qui cherche plus à enfoncer l'élève que lui faire montre son potentiel
Mine de rien, sûrement à cause de la fatigue, j'ai fait beaucoup d'erreurs qui font que en plus d'avoir perdu un temps fou j'étais tout sauf convaincant

Note attendue	4-5
Note obtenue	8

Un conseil pour les générations futures : ne jamais paraître énervé face au correcteur