PC*2

SPOIR

Révisions écrits 2025

Pour vous, ces énoncés, délicats et subtils,

réunis tous ensemble, en cette douce compil' .

Mines Ponts 2019 PC Maths 2

Etude d'une série de fonctions

Le sujet est consacré à l'étude de quelques propriétés de dérivabilité de la fonction $R : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ définie par

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2} \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

Notations

— On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel x.

— Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ une famille de nombres complexes indexée par l'ensemble $\mathbf{Z}$ des entiers relatifs. Dans le cas où les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 1} u_{-n}$ sont toutes deux convergentes, on pose

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} u_{-n}.$$

I Préliminaires

On établit dans cette partie quelques résultats utiles dans la suite du problème.

1. Montrer que la fonction R est bien définie et qu'elle est continue sur $\mathbf{R}$.

2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2} \, \mathrm{d}x$ est convergente.

Dans la suite du problème, on **admet** que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2} \, \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction continue par morceaux et intégrable. On pose

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} \, \mathrm{d}t \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

3. Montrer que la fonction $\widehat{f}$ est bien définie, et continue sur $\mathbf{R}$.

II Etude de la dérivabilité de R en 0

Dans cette partie, on considère une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, continue et telle qu'il existe un réel $C > 0$ tel que

$$|f(t)| \leq \frac{C}{t^2+1} \text{ pour tout } t \in \mathbf{R}.$$

On pose

$$S(h) = h \sum_{n=0}^{\infty} f(nh) \text{ pour tout } h > 0.$$

4. Justifier l'existence de $S(h)$ pour tout $h > 0$.

On fixe $h > 0$, et on considère la fonction

$$\begin{aligned} \phi_h \,:\, \mathbf{R}_+ &\longrightarrow \mathbf{C} \\ t &\longmapsto f\left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right). \end{aligned}$$

5. Montrer que
$$S(h) = \int_0^{+\infty} \phi_h(t) \, \mathrm{d}t.$$
6. Montrer que, pour tous $h \in]0,1]$ et $t \in [1, +\infty[$, on a
$$|\phi_h(t)| \leq \frac{C}{1+(t-1)^2}.$$
7. En déduire que
$$S(h) \to \int_0^{+\infty} f(t) \, \mathrm{d}t \text{ quand } h \to 0.$$
8. En déduire un équivalent de $R(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs strictement positives. La fonction R est-elle dérivable en 0 ?

III Formule sommatoire de Poisson

Dans cette partie, on note $C_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{C}$. Si u est un élément de $C_{2\pi}$, on pose

$$c_p(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t) e^{-ipt} \, \mathrm{d}t \text{ pour tout } p \in \mathbf{Z}.$$

On **admet** le résultat suivant, que l'on pourra utiliser sans démonstration dans toute cette partie : si u et v sont deux éléments de $C_{2\pi}$ qui vérifient $c_p(u) = c_p(v)$ pour tout $p \in \mathbf{Z}$, alors $u = v$.

On considère une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, continue et telle qu'il existe des réels strictement positifs C_1 et C_2 tels que

$$|f(t)| \leq \frac{C_1}{t^2+1} \text{ pour tout } t \in \mathbf{R} \text{ et } |\widehat{f}(x)| \leq \frac{C_2}{x^2+1} \text{ pour tout } x \in \mathbf{R},$$

où la fonction $\widehat{f}$ a été définie à la question 3. On pose également

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(x + 2n\pi) \text{ et } G(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \widehat{f}(n) e^{inx} \text{ pour } x \in \mathbf{R}.$$

9. Montrer que la fonction F est bien définie, 2π-périodique et continue sur $\mathbf{R}$.

10. Montrer que la fonction G est bien définie, 2π-périodique et continue sur $\mathbf{R}$.

11. Montrer que $G = 2\pi F$.

En particulier, on a $G(0) = 2\pi F(0)$, soit :

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \widehat{f}(n) = 2\pi \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(2n\pi),$$

12. Montrer que, pour tout réel strictement positif a, on a

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} f(na) = \frac{1}{a} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{a}\right).$$

Cette égalité constitue la *formule sommatoire de Poisson.*

IV Etude de la dérivabilité de R en π

On considère la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{it^2} - 1}{t^2} \text{ si } t \neq 0 \\ \\ i \text{ si } t = 0. \end{cases}$$

13. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$. On pourra utiliser un développement en série entière.

14. Etablir que $f'(t) \to 0$ quand $t \to \pm\infty$, et que $f''(t) = -4e^{it^2} + O(t^{-2})$ quand $t \to \pm\infty$.

15. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix^2}\, \mathrm{d}x$ est convergente.

16. Montrer que $\widehat{f}(x) = O(x^{-2})$ quand $x \to \pm\infty$.

On pose à présent

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in^2 x}}{n^2} \text{ pour } x \in \mathbf{R}.$$

17. En utilisant la formule sommatoire de Poisson, montrer qu'il existe des nombres complexes a et b tels que

    $F(x) = F(0) + a\sqrt{x} + bx + O(x^{3/2})$ quand $x \to 0$ par valeurs strictement positives.

    Préciser la valeur de b, et exprimer a en fonction de I (l'intégrale I a été définie à la question 15).

18. Exprimer, pour $x \in \mathbf{R}$, $F(\pi + x)$ en fonction de $F(4x)$ et de $F(x)$.

19. Déduire de ce qui précède que la fonction R est dérivable en π, et préciser la valeur de $R'(\pi)$.

Fin du problème

ÉCOLE POLYTECHNIQUE – ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2018 **FILIÈRE PC**

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – (XEULC)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation de calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Toute affirmation doit être clairement et complètement justifiée.

⋆ ⋆ ⋆

Ce sujet s'intéresse aux matrices carrées de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1 ou à -1, et en particulier à la différence maximale entre le nombre de 1 et le nombre de -1 que l'on peut obtenir, si l'on s'autorise à multiplier certaines lignes et colonnes d'une telle matrice par -1.

La partie I s'intéresse à quelques cas particuliers. La partie II montre que pour certaines matrices, cette différence maximale est beaucoup plus petite que n^2. La partie III propose au contraire un minorant à cette différence maximale. La partie IV propose une démonstration de la formule de Stirling utilisée dans la partie III, et rappelée ci-dessous. Enfin, la partie V s'intéresse à la différence *minimale* entre le nombre de 1 et le nombre de -1.

Les quatre premières parties sont largement indépendantes.

Rappels

La formule de Stirling énonce un équivalent à $n!$, à savoir

$$n! \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n .$$

On admet par ailleurs la valeur de l'intégrale de Gauss

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi}\,.$$

Notations

Pour n et k entiers strictement positifs, on notera $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles à n lignes et k colonnes. On notera également $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n. On notera ${}^tM$ la transposée d'une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$. On identifiera l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ à l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes à n coordonnées. En particulier, l'espace vectoriel des nombres réels est identifié à $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

On étend les notations précédentes aux parties de $\mathbb{R}$: si K est une partie de $\mathbb{R}$, on notera par exemple $\mathcal{M}_{n,k}(K)$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ constituée des matrices dont tous les coefficients sont à valeurs dans K. Le sujet s'intéressera tout particulièrement à $\mathcal{M}_n(\{-1,1\})$, l'ensemble des matrices carrées de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1 ou à -1. Si $A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$, on notera

$$\begin{aligned} S(A) &:= \left\{{}^tXAY \mid (X,Y) \in (\{-1,1\}^n)^2\right\}, \\ M(A) &:= \max S(A). \end{aligned}$$

Pour $n \geqslant 1$, on notera également

$$\underline{M}(n) := \min\left\{M(A), A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})\right\}.$$

Dans tout le sujet, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé sur lequel seront définies les différentes variables aléatoires intervenant dans les parties II et III. On admettra que toutes les variables aléatoires introduites peuvent bien être construites sur cet espace. On notera $\mathbb{P}(E)$ la probabilité d'un événement $E \subset \Omega$, et $\mathbb{E}[X]$ l'espérance d'une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs réelles.

Partie I

1. Quel est le cardinal de $\mathcal{M}_n(\{-1,1\})$? Cet ensemble est-il un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
2. Montrer que pour toute matrice A dans $\mathcal{M}_n(\{-1,1\})$, l'ensemble $S(A)$ est inclus dans $\{-n^2, \ldots, n^2\}$. Montrer que l'inclusion est stricte (on pourra penser à un argument de parité), et montrer que $S(A)$ est un ensemble symétrique, au sens où un entier k est dans $S(A)$ si et seulement si $-k$ est dans $S(A)$.
3. Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\{-1,1\})$. On suppose qu'il existe des matrices diagonales C et D ne contenant que des 1 et des -1 sur la diagonale, telles que $B = CAD$. Montrer que $S(A) = S(B)$.
4. Dans cette question seulement, on suppose $n = 2$, et on note

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Calculer $S(I)$ et $S(J)$, et en déduire $S(A)$ pour tout $A \in \mathcal{M}_2(\{-1,1\})$.
5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$. Montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes :
   (a) $n^2 \in S(A)$.
   (b) Il existe X et Y dans $\{-1,1\}^n$ tels que $A = X\,{}^tY$.
   (c) A est une matrice de rang 1.
6. En déduire la proportion, parmi les matrices de $\mathcal{M}_n(\{-1,1\})$, des matrices A qui vérifient $n^2 \in S(A)$.

Partie II

Soit k un entier strictement positif et $U_1, \dots, U_k$ une suite de k variables aléatoires à valeurs dans $\{-1,1\}$, indépendantes et de loi uniforme. On note également

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} U_i.$$

1. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\varphi(\lambda) = \ln\left(\mathbb{E}[e^{\lambda U_1}]\right)$. Établir que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(\lambda) \leqslant \frac{\lambda^2}{2}.$$

2. Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $\lambda > 0$, on a l'inégalité

$$\mathbb{P}(S_k \geqslant t) \leqslant \exp(k\varphi(\lambda) - \lambda t).$$

3. En déduire l'inégalité de Hoeffding pour S_k : pour tout $t > 0$, on a

$$\mathbb{P}(S_k \geqslant t) \leqslant \exp\left(-\frac{t^2}{2k}\right).$$

On introduit maintenant une variable aléatoire uniforme $C : \Omega \to \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$. Pour $\omega \in \Omega$, on note $C_{i,j}(\omega)$ les coefficients de la matrice $C(\omega)$.

4. Soient $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$ deux vecteurs quelconques dans $\{-1,1\}^n$. Montrer que $(x_i y_j C_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une famille de n^2 variables aléatoires à valeurs dans $\{-1,1\}$, indépendantes et de loi uniforme.
5. Montrer que pour tout $t \geqslant 0$, on a

$$\mathbb{P}(M(C) \geqslant tn^{3/2}) \leqslant \exp\left(-\left(\frac{t^2}{2} - 2\ln 2\right) n\right).$$

6. On rappelle la notation $\underline{M}(n) = \min\left\{M(A) \mid A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})\right\}$. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\underline{M}(n) \leqslant 2\sqrt{\ln 2}\; n^{3/2}.$$

Indication : on pourra commencer par montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une matrice A dans $\mathcal{M}_n(\{-1,1\})$ telle que

$$M(A) \leqslant \left(2\sqrt{\ln 2} + \varepsilon\right) n^{3/2}.$$

Partie III

Dans cette partie, on établit un minorant non trivial pour $\underline{M}(n)$.

1. Pour $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$ et $Y = (y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \{-1,1\}^n$, on note

$$g_A(Y) = \max\left\{{}^t X A Y \mid X \in \{-1,1\}^n\right\}.$$

Montrer que la fonction g_A peut se réécrire

$$g_A(Y) = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} y_j \right|.$$

2. On introduit maintenant une variable aléatoire uniforme $Z : \Omega \to \{-1,1\}^n$. Pour $\omega \in \Omega$, on note $Z_i(\omega)$ les coordonnées de $Z(\omega)$. Montrer que pour tout $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$, on a

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\}, \qquad \mathbb{E}\left[\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} Z_j\right|\right] = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |n-2k|,$$

où $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial. En déduire

$$\mathbb{E}\left[g_A(Z)\right] = \frac{n}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |n-2k|.$$

3. (a) Montrer que pour $m \in \{0,\ldots,n-1\}$, on a

$$\sum_{k=0}^{m} (n-2k) \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{m}.$$

(b) En déduire que pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$,

$$\mathbb{E}\left[g_A(Z)\right] = \frac{n^2}{2^{n-1}} \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor},$$

où $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ désigne la partie entière de $\frac{n}{2}$.

4. (a) Montrer que

$$\underline{M}(n) \geqslant \frac{n^2}{2^{n-1}} \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

(b) Montrer ensuite, à l'aide de la formule de Stirling rappelée en préambule, que ce minorant est équivalent à Cn^{α} quand n tend vers l'infini, pour des constantes C et $\alpha > 0$ que l'on explicitera. Comparer au majorant de $\underline{M}(n)$ obtenu à la question 6 de la partie II.

Partie IV

Dans cette partie, on établit la formule de Stirling à l'aide d'une étude d'intégrales.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx.$$

Déterminer par récurrence I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que pour $n \geqslant 1$, on a

$$I_n = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-x\sqrt{n}} dx.$$

3. Soit U l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$U := \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0 \text{ et } x > -t\},$$

et soit f la fonction définie sur U par

$$f(t,x) = t^2 \ln(1 + \frac{x}{t}) - tx.$$

(a) Montrer que pour $(t,x) \in U$, on a

$$x \leqslant 0 \quad \Rightarrow \quad f(t,x) \leqslant -\frac{x^2}{2}.$$

(b) Pour $x > 0$, montrer que l'on a

$$\forall t \geqslant 1, \qquad f(t,x) \leqslant f(1,x).$$

Pour cela, on pourra commencer par écrire $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ sous la forme $tF(x/t)$ pour une certaine fonction F que l'on étudiera.

4. Déduire des questions précédentes la formule de Stirling.

Partie V

Dans cette dernière partie, on fixe $A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$ et on note

$$m(A) := \min(S(A) \cap \mathbb{N}).$$

1. Pour $Y \in \{-1,1\}^n$, montrer que l'on a

$$\min\left\{\left|{}^tXAY\right| \mid X \in \{-1,1\}^n\right\} \leqslant n$$

et en déduire $m(A) \leqslant n$.

2. En s'inspirant de la question précédente et des méthodes développées dans les parties II et III, montrer que l'on a également

$$m(A) \leqslant \sqrt{2n\ln(2n)}.$$

Centrale 2016 - PSI 1

Dans tout ce problème, n est un entier supérieur ou égal à 2 et l'on note :

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ;
- $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
- $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n ;
- $\mathcal{X}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont dans $\{0,1\}$;
- $\mathcal{Y}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont dans $[0,1]$;
- $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont dans $\{0,1\}$ et ne contenant qu'un seul coefficient non nul par ligne et par colonne ;
- ${}^tM$ ou M^T la transposée d'une matrice M.

Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{X}_3 \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \exp(-1) & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \in \mathcal{Y}_2 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_3$$

Ce problème aborde l'étude de matrices à coefficients dans $\{0,1\}$ à travers plusieurs thématiques indépendantes les unes des autres. Les deux premières parties étudient quelques propriétés algébriques et topologiques des ensembles $\mathcal{X}_n$ et $\mathcal{Y}_n$ définis ci-dessus. La partie 3 étudie le cas particulier des matrices de permutation. La partie 4 étudie deux modalités de génération aléatoire de matrices à coefficients dans $\{0,1\}$.

1 Généralités

1.A. Propriétés élémentaires

1.A.1 Justifier que $\mathcal{X}_n$ est un ensemble fini et déterminer son cardinal.

1.A.2 Démontrer que pour tout $M \in \mathcal{Y}_n$, $\det(M) \leq n!$ et qu'il n'y a pas égalité.

1.A.3 Démontrer que $\mathcal{Y}_n$ est une partie convexe et compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1.A.4 Soit $M \in \mathcal{Y}_n$ et λ une valeur propre complexe de M. Montrer que $|\lambda| \leq n$ et donner un exemple explicite où l'on a l'égalité.

1.B. Etude de $\mathcal{X}'_n = \mathcal{X}_n \cap GL_n(\mathbb{R})$

1.B.1 Faire la liste des éléments de $\mathcal{X}'_2$. Préciser (en justifiant) ceux qui sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$.

1.B.2 Démontrer que $\mathcal{X}'_2$ engendre l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Est-ce que, pour $n \geq 2$, $\mathcal{X}'_n$ engendre l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

2 Deux problèmes d'optimisation

2.A. Etude de la distance à $\mathcal{Y}_n$

Pour tout $(M, N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, on note

$$(M|N) = \mathrm{Tr}(M^T N)$$

2.A.1 Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Expliciter $(M|N)$ en fonction des coefficients de M et N.
On notera $\|M\|$ la norme euclidienne associée.

2.A.2 On fixe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, prouver qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{Y}_n$ telle que :

$$\forall N \in \mathcal{Y}_n,\ \|A - M\| \leq \|A - N\|$$

2.A.3 Justifier l'unicité de la matrice M ci-dessus et expliciter ses coefficients en fonction de ceux de A.

2.B. Maximisation du déterminant sur $\mathcal{X}_n$ et $\mathcal{Y}_n$

2.B.1 Justifier que le déterminant possède un maximum sur $\mathcal{X}_n$ (noté x_n) et un maximum sur $\mathcal{Y}_n$ (noté y_n).

2.B.2 Démontrer que la suite $(y_k)_{k\geq 2}$ est croissante.

2.B.3 Soit $J \in \mathcal{X}_n$ la matrice dont tous les coefficients valent 1. On pose $M = J - I_n$. Calculer $\det(M)$ et en déduire que $\lim\limits_{k\to+\infty} y_k = +\infty$.

2.B.4 Soit $N = (n_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{Y}_n$. Fixons $1 \leq i, j \leq n$ et supposons que $n_{i,j} \in]0, 1[$. Démontrer qu'en remplaçant $n_{i,j}$ soit par 0 soit par 1, on peut obtenir une matrice N' de $\mathcal{Y}_n$ telle que $\det(N) \leq \det(N')$. En déduire que $x_n = y_n$.

3 Matrices de permutations

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et on note $(e_1, \ldots, e_n)$ sa base canonique.
On note S_n l'ensemble des bijections de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ dans lui même (appelées *permutations*).
Pour tout $\sigma \in S_n$, on note P_σ la matrice de $\mathcal{P}_n$ dont le coefficient ligne i, colonne j vaut 1 si $i = \sigma(j)$ et 0 sinon. On dit que P_σ est la *matrice de permutation* associée à σ.
On note u_σ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à P_σ.

3.A. Description de $\mathcal{P}_n$

3.A.1 Donner deux définitions d'une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^n$ et démontrer leur équivalence.

3.A.2 Démontrer que si $M \in O_n(\mathbb{R})$, alors son déterminant vaut 1 ou -1. Que penser de la réciproque ?

3.A.3 Démontrer que $\mathcal{P}_n = \mathcal{X}_n \cap O_n(\mathbb{R})$ et déterminer son cardinal.

3.B. Quelques propriétés des éléments de $\mathcal{P}_n$

3.B.1 Soient $\sigma, \sigma' \in S_n$. Démontrer que $P_\sigma P_{\sigma'} = P_{\sigma\circ\sigma'}$.
Justifier que l'application $k \in \mathbb{Z} \mapsto \sigma^k \in S_n$ n'est pas injective. En déduire qu'il existe un entier $N \geq 1$ tel que $\sigma^N = \mathrm{Id}_{\{1,\dots,n\}}$ (application identité de $\{1, \dots, n\}$).

3.B.2 Démontrer que tous les éléments de $\mathcal{P}_n$ sont diagonalisables sur $\mathbb{C}$.

3.B.3 Déterminer les vecteurs propres communs à tous les éléments de $\mathcal{P}_n$ dans les cas $n = 2$ et $n = 3$.

3.B.4 On se propose de démontrer que les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ stables par tous les u_σ, $\sigma \in S_n$, sont $\{0\}$, $\mathbb{R}^n$, la droite D engendrée par $e_1 + \cdots + e_n$ et l'hyperplan H orthogonal à D.

(a) Vérifier que ces quatre sous-espaces vectoriels sont stables par tous les u_σ.

(b) Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, non contenu dans D et stable par tous les u_σ. Démontrer qu'il existe un couple $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ avec $i \neq j$ tel que $e_i - e_j \in V$, puis que les $n - 1$ vecteurs $e_k - e_j$ ($k \in \{1, \dots, n\}$, $k \neq j$) appartiennent à V.

(c) Conclure.

3.C. Une caractérisation des éléments de $\mathcal{P}_n$

On se donne une matrice M de $GL_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont des entiers naturels et telle que l'ensemble formé par tous les coefficients de toutes les puissances successives de M est fini.
Démontrer que M^{-1} est à coefficients dans $\mathbb{N}$ et en déduire que M est une matrice de permutation.
Que dire de la réciproque ?

4 Matrices aléatoires de $\mathcal{X}_n$

4.A. Génération par une colonne aléatoire

Soit $p \in]0, 1[$. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p.

4.A.1 Calculer la probabilité que $X_1, \dots, X_n$ soient égales.

4.A.2 Quelle est la loi de $S = X_1 + \cdots + X_n$? On attend une démonstration du résultat annoncé.

4.A.3 Soient $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Donner la loi de la variable aléatoire $X_{i,j} = X_i \times X_j$.

4.A.4 i $\omega \in \Omega$, on introduit la matrice colonne

$$U(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ \vdots \\ X_n(\omega) \end{pmatrix}$$

et la matrice $M(\omega) = U(\omega)U(\omega)^T$. L'application $M \ : \ \omega \in \Omega \mapsto M(\omega)$ est ainsi une variable aléatoire.

(a) Si $\omega \in \Omega$, justifier que $M(\omega) \in \mathcal{X}_n$.

(b) Si $\omega \in \Omega$, justifier que $\mathrm{Tr}(M(\omega)) \in \{0, \dots, n\}$, que $M(\omega)$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et que $\mathrm{rg}(M(\omega)) \leq 1$.

(c) Si $\omega \in \Omega$, justifier que $M(\omega)$ est une matrice de projection orthogonale si et seulement si $S(\omega) \in \{0, 1\}$.

4.A.5 Donner la loi, l'espérance et la variance des variables aléatoires $\mathrm{Tr}(M)$ et $\mathrm{rg}(M)$.

4.A.6 Exprimer M^k en fonction de S et M. Quelle est la probabiité pour que la suite de matrices $(M^k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit convergente ? Montrer que, dans ce cas, la limite est une matrice de projection.

4.A.7 Quelle est la probabilité que M admette deux valeurs propres distinctes ?

4.B. Génération par remplissage aléatoire

Soit $p \in]0,1[$. On part de la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notée M_0. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on construit la matrice M_{k+1} à partir de M_k de la manière suivante

- on parcourt en une vague la matrice et chaque coefficient nul est changé en 1 avec la probabilité p ;
- chaque action sur un coefficient est indépendante de ce qui se passe sur les autres et des vagues précédentes.

Les M_k sont donc des variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{X}_n$ et l'on considère qu'elles sont définies sur un espace probabilisé commun $(\Omega, \mathcal{A}, PP)$. Voici un exemple de réalisation de cette évolution pour $n = 2$

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour $k \geq 1$, le nombre de modifications réalisées lors de la k-ième vague est noté N_k. Dans l'exemple ci-dessus : $N_1 = 2$, $N_2 = 0$, $N_3 = 1$, $N_4 = 1$, $N_5 = 0$.
On s'intéresse au plus petit indice k pour lequel la matrice M_k ne comporte que des 1 ; on dit alors qu'elle est *totalement remplie*. Dans l'exemple précédent, ce premier indice vaut 4.
On note $q = 1 - p$ et $m = n^2$.

4.B.1 Dans toute cette question on utilise le langage Python. `M` désigne une matrice carrée d'ordre n. Ses lignes et colonnes sont numérotées de 0 à $n-1$. L'expression `M[i,j]` permet d'accéder à l'élément situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j et `len(M)` donne l'ordre de la matrice `M`.

(a) Ecrire une fonction `Somme(M)` qui renvoie la somme des coefficients de la matrice `M`.

(b) Ecrire une fonction `Bernoulli(p)` qui renvoie 1 avec la probabilité p et 0 avec la probabilité $1-p$. On pourra utiliser l'expression `random()` qui renvoie un réel de l'intervalle $[0, 1[$ selon la loi uniforme.

(c) A l'aide de la fonction précédente, écrire une fonction `Modifie(M,p)` qui modifie aléatoirement la matrice `M` selon le principe décrit plus haut.

(d) Ecrire une fonction `Simulation(n,p)` qui renvoie le plus petit entier k tel que M_k est totalement remplie à partir d'un remplissage aléatoire de la matrice nulle d'ordre n (qui peut être obtenue par `zeros((n,n))`). Il n'est pas demandé de mémoriser les M_k.

4.B.2 Donner la loi de N_1, puis la loi conditionnelle de N_2 sachant $(N_1 = i)$ pour i dans un ensemble à préciser. N_1 et N_2 sont-elles indépendantes ?

4.B.3 Soient $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Le plus petit entier $k \geq 1$ tel que le coefficient ligne i, colonne j de M_k vaut 1 est noté $T_{i,j}$ (dans l'exemple ci-dessus, $T_{1,1} = 1$ et $T_{1,2} = 3$). Donner la loi de $T_{i,j}$.

4.B.4 Pour un entier $k \geq 1$, donner la valeur de $\mathbb{P}(T_{i,j} \geq k)$.

4.B.5 Soient $r \geq 1$ un entier et $S_r = N_1 + \cdots + N_r$. Que représente S_r ? Donner sa loi (on pourra utiliser la question précédente).

4.B.6 On note N le plus petit indice k pour lequel la matrice M_k est totalement remplie.

(a) Proposer une démarche pour approcher l'espérance de N à l'aide d'une simulation informatique utilisant les fonctions précédentes.

(b) Donner une expression de la valeur exacte de cette espérance faisant intervenir q et m.

ECOLES NORMALES SUPERIEURES
ECOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS D'ADMISSION 2024

LUNDI 15 AVRIL 2024
08h00 - 12h00

FILIERE PSI - Epreuve n° 1

MATHEMATIQUES (XUSR)

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

Aucun document n'est autorisé
Aucune calculatrice n'est autorisée

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Notations

Dans tout le texte, on adopte les notations suivantes :

- Pour tous entiers naturels m, n, on note $[\![m; n]\!]$ l'ensemble des entiers naturels k vérifiant $m \leqslant k \leqslant n$.
- Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $n! = 1 \times 2 \times ... \times n$ la factorielle de n. On convient que $0! = 1$.
- Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ ayant n lignes et m colonnes. Si $A \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $(i, j) \in [\![1; n]\!] \times [\![1; m]\!]$, on note $[A]_{i,j}$ le coefficient de A appartenant à la i-ème ligne et à la j-ème colonne. La matrice transposée de A est notée ${}^tA \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et sa matrice conjuguée est notée $\overline{A} \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. Les coefficients de $\overline{A}$ sont donnés par
$$\forall (i, j) \in [\![1; n]\!] \times [\![1; m]\!],\ [\overline{A}]_{i,j} = \overline{[A]_{i,j}}.$$
On pose $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, et on note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et 0_n la matrice nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Le déterminant d'une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sera noté $\det(A)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note A^k la puissance k-ème de A et on convient que $A^0 = I_n$.
Quand $n = 1$, on identifie la matrice $A \in \mathscr{M}_1(\mathbb{K})$ à son unique coefficient $[A]_{1,1} \in \mathbb{K}$.
- Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $\mathbb{K}[X]$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Si $P \in \mathbb{K}[X]$, on note $\deg(P)$ le degré de P. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P^{(k)}$ désigne la dérivée k-ème de P. On convient que $P^{(0)} = P$. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on désigne par $\mathbb{K}_n[X]$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de degré inférieur ou égal à n.
- Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Toutes les variables aléatoires de cet énoncé sont définies sur cet espace.

Dans toute la suite de cet énoncé, $n \geqslant 2$ désigne un entier naturel. Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\mathrm{Spec}(A)$ l'ensemble des valeurs propres complexes de A et on pose
$$\varrho(A) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathrm{Spec}(A)\}.$$
On note $\mathscr{V}(A)$ l'ensemble
$$\mathscr{V}(A) = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid P \neq 0_{\mathbb{C}[X]} \text{ et } P(A) = 0_n\}.$$
(c'est-à-dire l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ non nuls et annulateurs de A).

Pour toute suite $u = (u_k)_{k\geqslant 0}$ de nombres complexes, on adopte les notations suivantes

- on note $R_u \in [0, +\infty]$ le rayon de convergence de la série entière $\sum u_k z^k$ et D_u son disque ouvert de convergence défini par
$$D_u = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R_u\}.$$
- pour tout $z \in D_u$, on note $U(z)$ (avec U lettre majuscule) la somme
$$U(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k z^k.$$

— On convient que $u^{(0)} = u$ et on note $u^{(1)}$ la suite définie par
$$\forall k \in \mathbb{N},\ u_k^{(1)} = (k+1)u_{k+1},$$
Plus généralement pour tout entier naturel $m \geqslant 0$, on pose
$$u^{(m+1)} = (u^{(m)})^{(1)}.$$
Pour tout $m \geqslant 0$ et tout $z \in D_{u^{(m)}}$ on pose
$$U^{(m)}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k^{(m)} z^k.$$

— Si $v = (v_k)_{k\geqslant 0}$ est une autre suite de nombres complexes, on note $u + v$ la suite $(u_k + v_k)_{k\geqslant 0}$ et $u \star v$ la suite $(w_k)_{k\geqslant 0}$ de terme général donné par
$$w_k = \sum_{i=0}^{k} u_i v_{k-i} \text{ pour tout } k \geqslant 0.$$

On dit qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est *compatible avec* u si
$$\varrho(A) < R_u.$$
On note $\mathbb{M}_n(u)$ l'ensemble de toutes les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ compatibles avec u :
$$\mathbb{M}_n(u) = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \mid \varrho(A) < R_u\}.$$

Les parties III et IV de cet énoncé sont majoritairement indépendantes.

Partie I : préliminaires

Soit $u = (u_k)_{k \geqslant 0}$ une suite de nombres complexes.

(1) Donner une condition nécessaire et suffisante sur R_u pour que $\mathbb{M}_n(u) = \emptyset$ et donner un exemple de u pour laquelle on a cette égalité.

(2) Montrer que $\mathbb{M}_n(u) \neq \{0_n\}$.

(3) Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes

(i) $R_u = +\infty$,

(ii) $\mathbb{M}_n(u) = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$,

(iii) $\mathbb{M}_n(u) \neq \emptyset$ et $\forall A \in \mathbb{M}_n(u)$, $\forall B \in \mathbb{M}_n(u)$, $A + B \in \mathbb{M}_n(u)$,

et donner un exemple de suite u vérifiant ces trois assertions et telle que $u_k \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(4) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence des deux assertions suivantes

(i) $A \in \mathbb{M}_n(v)$ pour toute suite $v = (v_k)_{k \geqslant 0}$ de $\mathbb{C}$ vérifiant $R_v > 0$.

(ii) A est nilpotente (c'est-à-dire il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0_n$).

(5) Montrer que pour tout entier $m \geqslant 0$, on a

$$D_{u^{(m)}} = D_u.$$

(6) Soit $v = (v_k)_{k \geqslant 0}$ une autre suite de nombres complexes. Montrer que

$$\mathbb{M}_n(u) \cap \mathbb{M}_n(v) \subset \mathbb{M}_n(u + v) \cap \mathbb{M}_n(u \star v).$$

(7) On suppose dans cette question que $0 < R_u \leqslant 1$. Soient $A \in \mathbb{M}_n(u)$ et $B \in \mathbb{M}_n(u)$ deux matrices symétriques telle que $AB = BA$. Montrer que $AB \in \mathbb{M}_n(u)$.

Partie II : fonctions de matrices

Soit $u = (u_k)_{k \geqslant 0}$ une suite de $\mathbb{C}$ telle que $\mathbb{M}_n(u) \neq \emptyset$. Soit $A \in \mathbb{M}_n(u)$.

(8) Montrer que $\mathscr{V}(A)$ est non vide.

(9) Soit

$$m = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \exists P \in \mathscr{V}(A) \text{ avec } \deg(P) = k\}.$$

Montrer qu'il existe un et un seul polynôme $p \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant les trois conditions

(i) $p \in \mathscr{V}(A)$,

(ii) $\deg(p) = m$,

(iii) p unitaire.

On note désormais φ_A ce polynôme.

(10) Soit $P \in \mathscr{V}(A)$. Montrer que φ_A divise P.

(11) Montrer que les racines de φ_A dans $\mathbb{C}$ sont exactement les valeurs propres de A.

(12) Montrer que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ alors φ_A est à coefficients réels (c'est-à-dire $\varphi_A \in \mathbb{R}[X]$).

On note désormais $\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell$ les valeurs propres de A, avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$. On note $m_1 \geqslant 1, \cdots, m_\ell \geqslant 1$ les multiplicités de $\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell$ respectivement en tant que racines de φ_A. Ainsi on a

$$\varphi_A(X) = (X - \lambda_1)^{m_1} \cdots (X - \lambda_\ell)^{m_\ell}$$

avec

$$m = m_1 + \cdots + m_\ell \,.$$

(13) Montrer que l'application

$$T \;:\; P \in \mathbb{C}_{m-1}[X] \mapsto (P(\lambda_1), P'(\lambda_1), \cdots, P^{(m_1-1)}(\lambda_1), \cdots, P(\lambda_\ell), P'(\lambda_\ell), \cdots, P^{(m_\ell-1)}(\lambda_\ell)) \in \mathbb{C}^m$$

est un isomorphisme et en déduire qu'il existe un et un seul polynôme $Q \in \mathbb{C}_{m-1}[X]$ tel que

$$\forall i \in [\![1;\ell]\!],\ \forall k \in [\![0; m_i - 1]\!],\ Q^{(k)}(\lambda_i) = U^{(k)}(\lambda_i).$$

Dans toute la suite, on pose

$$u(A) = Q(A)\,.$$

(14) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $u(A) = P(A)$ si et seulement si

$$\forall i \in [\![1;\ell]\!],\ \forall k \in [\![0; m_i - 1]\!],\ P^{(k)}(\lambda_i) = U^{(k)}(\lambda_i).$$

(15) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $|\alpha| < R_u$. Montrer que

$$u(\alpha I_n) = U(\alpha) I_n.$$

(16) On suppose dans cette question uniquement que $n = 2$. Déterminer $u(A)$ dans le cas suivant :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{pmatrix},$$

où α, β et γ sont des réels fixés avec $\alpha \neq \beta$ et $\{\alpha, \beta\} \subset D_u$. On exprimera les coefficients de $u(A)$ en fonction α, β et γ, $U(\alpha)$ et $U(\beta)$.

(17) Soit $B \in \mathbb{M}_n(u)$.

(a) Montrer qu'il existe un polynôme $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$u(A) = R(A) \text{ et } u(B) = R(B).$$

(b) On suppose que $AB \in \mathbb{M}_n(u)$ et $BA \in \mathbb{M}_n(u)$. Montrer que

$$Au(BA) = u(AB)A.$$

(18) Soit $v = (v_k)_{k \geqslant 0}$ une autre suite de $\mathbb{C}$ telle que $A \in \mathbb{M}_n(v)$. On suppose dans cette question uniquement que les valeurs $\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell$ sont réelles. Montrer que

$$(u \star v)(A) = u(A)v(A)$$

(après avoir justifié que $A \in \mathbb{M}_n(u \star v)$).

Partie III : cas de matrices diagonalisables

Soit $u = (u_k)_{k\geqslant 0}$ une suite de $\mathbb{C}$ telle que $\mathbb{M}_n(u) \neq \emptyset$. Soit $A \in \mathbb{M}_n(u)$. On suppose dans toute cette partie que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et on note $\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell$ ses valeurs propres avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$.

(19) Montrer que

$$\varphi_A(X) = (X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_\ell).$$

(20) Pour tout $k \in [\![1;\ell]\!]$ on définit le polynôme :

$$Q_k^A(X) = \prod_{j=1, j\neq k}^{\ell} \frac{X-\lambda_j}{\lambda_k - \lambda_j}$$

(on notera que les polynômes Q_k^A dépendent de la matrice A).

(a) Montrer que

$$u(A) = \sum_{k=1}^{\ell} U(\lambda_k) Q_k^A(A)\,.$$

(b) Montrer que pour tout $k \in [\![1;\ell]\!]$, $Q_k^A(A)$ est une projection dont on précisera l'image et le noyau.

(c) En déduire que

$$\sum_{k=1}^{\ell} Q_k^A(A) = I_n.$$

(21) Soit $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible. Montrer que

$$u(BAB^{-1}) = Bu(A)B^{-1}.$$

(22) Soit $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonale et $S \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible telles que $A = SDS^{-1}$.

(a) Montrer que $u(D)$ est diagonale et que

$$\forall i \in [\![1;n]\!],\ [u(D)]_{i,i} = U([D]_{i,i}).$$

(b) En déduire une expression de $u(A)$.

Partie IV : application à des cas particuliers

Dans cette partie, on suppose que $n \geqslant 4$. Soit $u = (u_k)_{k\geqslant 0}$ une suite de $\mathbb{C}$ vérifiant la condition $(C^\star)$ suivante :

$$R_u > 1 \qquad (C^\star)$$

(23) Soit $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice donnée par

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer le polynôme φ_H dans ce cas.

(b) Soit $A = H + \alpha I_n$ où $\alpha \in \mathbb{C}$ est tel que $|\alpha| < R_u$. Montrer que

$$u(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{U^{(k)}(\alpha)}{k!} H^k$$

et en déduire que

$$u(A) = \begin{pmatrix} U(\alpha) & \frac{U^{(1)}(\alpha)}{1!} & \frac{U^{(2)}(\alpha)}{2!} & \cdots & \frac{U^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!} \\ 0 & U(\alpha) & \frac{U^{(1)}(\alpha)}{1!} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{U^{(2)}(\alpha)}{2!} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{U^{(1)}(\alpha)}{1!} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & U(\alpha) \end{pmatrix}.$$

(24) Soit $G \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice définie par

$$G = Y\,{}^tZ$$

où $Y, Z \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sont deux vecteurs colonnes tels que ${}^tY\,Y = {}^tZ\,Z = 1$.

(a) Montrer que G est de rang 1 et donner son image.

(b) Montrer que 0 et ${}^tZ\,Y$ sont les seules valeurs propres de G.

(c) En déduire que $G \in \mathbb{M}_n(u)$.

(d) Déterminer φ_G quand ${}^tZ\,Y \neq 0$.

(e) En déduire que si ${}^tZ\,Y \neq 0$ alors

$$u(G) = U(0)I_n + \frac{U({}^tZ\,Y) - U(0)}{{}^tZ\,Y} G.$$

(f) Déterminer une expression simple de $u(G)$ quand ${}^tZ\,Y = 0$.

(25) Soit $F \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice définie par

$$[F]_{k,j} = \frac{1}{\sqrt{n}} \omega^{(k-1)(j-1)} \text{ pour tout } (k,j) \in [\![1;n]\!]^2,$$

où

$$\omega = e^{-2\pi i/n}$$

(ici i désigne le nombre complexe usuel vérifiant $i^2 = -1$).

(a) Montrer que F est inversible et que $F^{-1} = \overline{F}$.

(b) Montrer que $F^2 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

(c) En déduire que $F^4 = I_n$ et que $F \in \mathbb{M}_n(u)$.

(d) En déduire que

$$\begin{aligned} u(F) &= \frac{1}{4}\left(U(1)(F + I_n) - U(-1)(F - I_n)\right)(F^2 + I_n) \\ &\quad + \frac{i}{4}\left(U(i)(F + iI_n) - U(-i)(F - iI_n)\right)(F^2 - I_n). \end{aligned}$$

(26) On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = \mathbb{P}(X = k)$ où X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

(a) On suppose que X suit une loi binomiale de paramètres (N, p). Vérifier que u satisfait la condition $(C^\star)$ et trouver une expression simple de $u(A)$ pour tout $A \in \mathbb{M}_n(u)$.

(b) On suppose que X suit un loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Vérifier que u satisfait la condition $(C^{\star})$ et montrer que

$$u(A) = p(I_n - (1-p)A)^{-1}A$$

pour toute matrice $A \in \mathbb{M}_n(u)$ diagonalisable.

X PC 2019

Les quatre parties sont indépendantes entre elles.

Dans l'ensemble du sujet, pour répondre à une question, on pourra admettre les résultats des questions précédentes.

Notations

Dans l'ensemble du sujet m et n désignent des entiers strictement positifs. L'ensemble $\mathbb{C}$ désigne le corps des nombres complexes. Le module d'un nombre complexe z est noté $|z|$ et son conjugué est noté $\overline{z}$. On note $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$ le disque unité fermé, et $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

On note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices à m lignes et à n colonnes à coefficients dans $\mathbb{C}$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices à n lignes et à n colonnes à coefficients dans $\mathbb{C}$. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La matrice transposée d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ est notée $A^\intercal$. Si $A = (a_{i,j})_{\substack{0\leqslant i\leqslant m-1\\0\leqslant j\leqslant n-1}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, on note $\overline{A}^\intercal \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ la matrice $(\overline{a_{j,i}})_{\substack{0\leqslant i\leqslant n-1\\0\leqslant j\leqslant m-1}}$.

On dit qu'une matrice $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est *unitaire* si

$$U\overline{U}^\intercal = \overline{U}^\intercal U = \mathrm{I}_n\,.$$

Les coefficients d'un vecteur $x \in \mathbb{C}^n$ sont notés $x_0, \ldots, x_{n-1}$. Un vecteur $x \in \mathbb{C}^n$ sera vu comme un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Pour tous $x \in \mathbb{C}^n$ et $y \in \mathbb{C}^n$, la matrice $x^\intercal y \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ est identifiée au nombre complexe $\sum_{i=0}^{n-1} x_i y_i$. Nous munissons $\mathbb{C}^n$ de la norme $\|\ \|_2$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \qquad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=0}^{n-1} |x_i|^2\right)^{1/2}.$$

Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, on note

$$\|A\| = \sup_{\substack{x\in\mathbb{C}^n\\ \|x\|_2=1}} \|Ax\|_2\,.$$

Par convention, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $A^0 = \mathrm{I}_n$.

Dans tout le sujet, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé sur lequel seront définies les différentes variables aléatoires du sujet. On admettra que toutes les variables aléatoires introduites peuvent bien être construites sur cet espace. On notera $\mathbb{P}(A)$ la probabilité d'un événement $A \subset \Omega$ et $\mathbb{E}[\mathbf{X}]$ l'espérance d'une variable aléatoire $\mathbf{X}$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs réelles.

* * *

Préliminaires

Les résultats démontrés ici seront utiles dans la première partie.

1. Lorsque $x \in \mathbb{C}^n$, vérifier que $\|x\|_2^2 = \overline{x}^\intercal x$.

2. Soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice unitaire. Montrer que $\|Ux\|_2 = \|x\|_2$ pour tout $x \in \mathbb{C}^n$.

3. Si $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $d_0, \ldots, d_{n-1}$, montrer que $\|D\| = \max_{0\leqslant i\leqslant n-1} |d_i|$.

4. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe une matrice unitaire $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $B = UAU^{-1}$. Montrer que $\|A\| = \|B\|$.

Première partie

Le but de cette partie est de démontrer le résultat suivant.

Théorème 1. Soit $f \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme. Alors

$$\sup_{z\in\overline{\mathbb{D}}} |f(z)| = \sup_{z\in\mathbb{S}} |f(z)|.$$

Pour cela, on admet le résultat suivant, qui pourra être utilisé sans démonstration.

A) Si $M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ est une matrice unitaire, il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, dont tous les coefficients diagonaux ont module 1, et une matrice unitaire $U \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ telles que $M = UDU^{-1}$.

Pour démontrer le **Théorème 1**, on fixe un polynôme $f \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 1$. On considère un nombre complexe $z \in \overline{\mathbb{D}}$ et on définit les matrices $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ et $P \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{C})$ par

$$M = \begin{pmatrix} z & 0 \ 0 \ \cdots \ 0 & \sqrt{1-|z|^2} \\ \sqrt{1-|z|^2} & 0 \ 0 \ \cdots \ 0 & -\overline{z} \\ 0 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & 0 \ 0 \ \cdots \ 0 & \sqrt{1-|z|^2} \\ \sqrt{1-|z|^2} & 0 \ 0 \ \cdots \ 0 & -\overline{z} \\ 0 & & 0 \\ \vdots & \mathrm{I}_{n-1} & \vdots \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5. Montrer que M est une matrice unitaire.

6. Montrer que $z^k = P^\intercal M^k P$ pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant n$.

7. Montrer que $|f(z)| \leqslant \|f(M)\|$.

8. Démontrer le **Théorème 1**.

Deuxième partie

Le but de cette partie est de démontrer l'énoncé suivant (on pourra utiliser le **Théorème 1**).

Théorème 2. Soit $n \geqslant 1$ un entier et $A(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$ un polynôme non nul tel que $a_k \in \{-1,0,1\}$ pour tout $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Alors pour tout entier $L \geqslant 1$ on a

$$\sup_{\theta\in[-\frac{\pi}{L},\frac{\pi}{L}]} |A(e^{i\theta})| \geqslant \frac{1}{n^{L-1}}.$$

Pour démontrer ce résultat, on fixe un entier $n \geqslant 1$ et $A(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$ un polynôme tel que $a_k \in \{-1,0,1\}$ pour tout $0 \leqslant k \leqslant n-1$. On fixe également un entier $L \geqslant 1$.

9. Si $z \in \mathbb{C}$ vérifie $|z| = 1$, montrer que $|A(z)| \leqslant n$.

10. On suppose dans cette question que $a_0 = 1$, et on pose, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$F(z) = \prod_{j=0}^{L-1} A\left(ze^{\frac{2i\pi j}{L}}\right).$$

a. Montrer qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| = 1$ et $|F(z_0)| \geqslant 1$.

b. Montrer que $|F(z_0)| \leqslant n^{L-1} \cdot \sup_{\theta \in [-\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{L}]} |A(e^{i\theta})|$.

11. Démontrer le **Théorème 2**.

Troisième partie

Le but de cette partie est de démontrer le résultat suivant :

Théorème 3. On fixe $p, q \in [0,1]$. Soit $n \geqslant 1$ un entier et soit $\mathbf{S}_n$ une somme de n variables aléatoires à valeurs dans $\{0,1\}$ mutuellement indépendantes de Bernoulli de paramètre p. Alors

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathbf{S}_n}{n} - q\right| \leqslant \left|\frac{\mathbf{S}_n}{n} - p\right|\right) \leqslant e^{-n\frac{(p-q)^2}{2}}.$$

Pour démontrer ce résultat, on fixe $p, q \in [0,1]$ et $(\mathbf{X}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de n variables aléatoires à valeurs dans $\{0,1\}$ mutuellement indépendantes de Bernoulli de paramètre p. On pose alors $\mathbf{S}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i$.

12. Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = \ln(1 - p + pe^x)$ pour tout $x \geqslant 0$.

a. Montrer que g est bien définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$. Pour $x \geqslant 0$, exprimer $g''(x)$ sous la forme $\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}$, où α et β sont des réels positifs pouvant dépendre de x.

b. Montrer que $g''(x) \leqslant \frac{1}{4}$ pour tout $x \geqslant 0$.

c. Montrer que

$$\ln(1 - p + pe^x) \leqslant px + \frac{x^2}{8} \text{ pour tout } x \geqslant 0.$$

13. On suppose dans cette question que $p < q$.

a. Justifier que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathbf{S}_n}{n} - q\right| \leqslant \left|\frac{\mathbf{S}_n}{n} - p\right|\right) = \mathbb{P}\left(\mathbf{S}_n \geqslant \tfrac{p+q}{2}n\right).$$

b. Soit $\mathbf{X}$ une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p. Pour $u > 0$, calculer $\mathbb{E}(e^{u\mathbf{X}})$.

c. Montrer que pour tout $u > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\mathbf{S}_n \geqslant \tfrac{p+q}{2}n\right) \leqslant e^{-n\left(\frac{p+q}{2}u - \ln(1-p+pe^u)\right)}.$$

Indication. On pourra admettre que si $(\mathbf{Z}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont n variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes et prenant un nombre fini de valeurs, alors $\mathbb{E}(\prod_{i=1}^n \mathbf{Z}_i) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(\mathbf{Z}_i)$.

d. Montrer que $\mathbb{P}(\mathbf{S}_n \geqslant \frac{p+q}{2}n) \leqslant e^{-n\frac{(p-q)^2}{2}}$.

14. Démontrer le **Théorème 3**.

Quatrième partie

Dans cette partie, on s'intéresse à la reconstruction d'une suite de 0 ou 1 à partir d'un échantillon d'observations bruitées (on pourra utiliser le **Théorème 2** et le **Théorème 3**).
Plus précisément, étant donné un élément $x = (x_0, \ldots, x_{n-1}) \in \{0,1\}^n$, appelé la source, et un paramètre $p \in]0,1[$ fixé, on considère la variable aléatoire $\mathbf{O}(x)$ à valeurs dans $\{0,1\}^n$ construite comme suit :

- soient $(\mathbf{B}_i)_{0 \leqslant i \leqslant n-1}$ des variables aléatoires à valeurs dans $\{0,1\}$ mutuellement indépendantes de Bernoulli de paramètre p ;
- on note $\mathbf{N}$ la variable aléatoire définie par

$$\mathbf{N} = \mathrm{Card}(\{0 \leqslant i \leqslant n-1 : \mathbf{B}_i = 1\})$$

  et $I_0 < I_1 < \cdots < I_{\mathbf{N}-1}$ les éléments de l'ensemble aléatoire $\{0 \leqslant i \leqslant n-1 : \mathbf{B}_i = 1\}$ rangés dans l'ordre croissant ;
- on pose enfin

$$\mathbf{O}(x) = (\mathbf{O}_0(x), \mathbf{O}_1(x), \ldots, \mathbf{O}_{n-1}(x)) = (x_{I_0}, x_{I_1}, \ldots, x_{I_{N-1}}, 0, 0, \ldots, 0) \in \{0,1\}^n$$

  avec la convention $\mathbf{O}(x) = (0, 0, \ldots, 0) \in \{0,1\}^n$ si $\mathbf{N} = 0$.

La variable aléatoire $\mathbf{O}(x)$ est appelée *observation bruitée de source* x. Ainsi, $\mathbf{O}(x)$ est obtenue à partir de x en gardant chaque coordonnée avec probabilité p, indépendamment les unes des autres (complétée par des 0 pour obtenir un vecteur de longueur n). Par exemple, si $x = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 1, 1, 1)$ et si $\mathbf{B}_0 = 0$, $\mathbf{B}_1 = 1$, $\mathbf{B}_2 = 0$, $\mathbf{B}_3 = 1$, $\mathbf{B}_4 = 1$ (ce qui arrive avec probabilité $p^3(1-p)^2$), alors $\mathbf{O}(x) = (\mathbf{O}_0(x), \mathbf{O}_1(x), \ldots, \mathbf{O}_4(x)) = (x_1, x_3, x_4, 0, 0) = (0, 1, 1, 0, 0)$.

15. Soit $\theta \in [-\pi, \pi]$.

a. Montrer que $\cos(\theta) \geqslant 1 - \frac{\theta^2}{2}$.

b. Montrer que $\left|\frac{e^{i\theta} - (1-p)}{p}\right| \leqslant \exp\left(\frac{1-p}{2p^2} \cdot \theta^2\right)$.

Indication. On pourra calculer $\left|\frac{e^{i\theta} - (1-p)}{p}\right|^2$.

16. Soit $x = (x_0, \ldots, x_{n-1}) \in \{0,1\}^n$ et considérons une observation bruitée

$$\mathbf{O}(x) = (\mathbf{O}_0(x), \mathbf{O}_1(x), \ldots, \mathbf{O}_{n-1}(x))$$

de source x.

a. Si $0 \leqslant j \leqslant k \leqslant n-1$, montrer que $\mathbb{P}(\mathbf{N} \geqslant j+1 \text{ et } I_j = k) = p\binom{k}{j}p^j(1-p)^{k-j}$.

b. Montrer que, pour tout $0 \leqslant j \leqslant n-1$, $\mathbb{E}[\mathbf{O}_j(x)] = p\sum_{k=j}^{n-1} x_k \binom{k}{j} p^j (1-p)^{k-j}$.

c. Montrer que pour tout $w \in \mathbb{C}$,

$$\mathbb{E}\left[\sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{O}_j(x) w^j\right] = p \sum_{k=0}^{n-1} x_k (pw + 1 - p)^k.$$

Dans la suite, on pose $L_n = \lfloor n^{1/3} \rfloor$, où $\lfloor t \rfloor$ désigne la partie entière d'un nombre réel t.

17. Soient $x, y \in \{0,1\}^n$ tels que $x \neq y$. Posons, pour $z \in \mathbb{C}$, $A_{x,y}(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (x_k - y_k) z^k$.

a. Justifier l'existence de $\theta_0 \in [-\frac{\pi}{L_n}, \frac{\pi}{L_n}]$ tel que $|A_{x,y}(e^{i\theta_0})| \geqslant \frac{1}{n^{L_n - 1}}$.

b. Démontrer que
$$\sum_{j=0}^{n-1} \left|\mathbb{E}[\mathbf{O}_j(x)] - \mathbb{E}[\mathbf{O}_j(y)]\right| \cdot \left|\frac{e^{i\theta_0} - (1-p)}{p}\right|^j \geqslant \frac{p}{n^{L_n - 1}}.$$

c. Justifier l'existence d'un entier $j_n(x,y)$ tel que $0 \leqslant j_n(x,y) \leqslant n-1$ et
$$\left|\mathbb{E}[\mathbf{O}_{j_n(x,y)}(x)] - \mathbb{E}[\mathbf{O}_{j_n(x,y)}(y)]\right| \geqslant \frac{p}{n^{L_n}} \exp\left(-\frac{1-p}{2p^2} \cdot \frac{\pi^2}{L_n^2} n\right).$$

Dans la suite, on fixe une fois pour toutes un entier n qu'il faut considérer comme étant très grand. Pour chaque couple $(x,y) \in (\{0,1\}^n)^2$ tel que $x \neq y$, on fixe un entier $j_n(x,y)$ dont l'existence est prouvée dans la question **17c**.

Soient $T \geqslant 1$ et $(E^1, E^2, \dots, E^T) \in (\{0,1\}^n)^T$. Ainsi, pour $1 \leqslant i \leqslant T$ et $0 \leqslant j \leqslant n-1$, on a $E^i_j \in \{0,1\}$. On dit que x est meilleur que y compte tenu de $E^1, E^2, \dots, E^T$ si
$$\left|\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} E^i_{j_n(x,y)} - \mathbb{E}[\mathbf{O}_{j_n(x,y)}(x)]\right| < \left|\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} E^i_{j_n(x,y)} - \mathbb{E}[\mathbf{O}_{j_n(x,y)}(y)]\right|.$$

On pose alors $R_{n,T}(E^1, E^2, \dots, E^T) = x$ si pour tout $y \neq x$, x est meilleur que y. Si l'on ne peut pas trouver de tel x on pose $R_{n,T}(E^1, E^2, \dots, E^T) = (0, 0, \dots, 0)$.

18. Démontrer que si $T_n \geqslant e^{3\ln(n) n^{1/3}}$ alors pour tout $x \in \{0,1\}^n$ et toute suite
$$\mathbf{O}^1(x), \mathbf{O}^2(x), \dots, \mathbf{O}^{T_n}(x)$$
de T_n variables aléatoires à valeurs dans $\{0,1\}^n$ mutuellement indépendantes de même loi que $\mathbf{O}(x)$, on a
$$\max_{x\in\{0,1\}^n} \mathbb{P}\left(R_{n,T_n}\left(\mathbf{O}^1(x), \mathbf{O}^2(x), \dots, \mathbf{O}^{T_n}(x)\right) \neq x\right) \leqslant u_n$$
où $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite tendant vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
Indication. On pourra commencer par écrire, en le justifiant, que
$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(R_{n,T}(\mathbf{O}^1(x), \mathbf{O}^2(x), \dots, \mathbf{O}^T(x)) \neq x\right)\\ &\quad\leqslant \sum_{\substack{y\in\{0,1\}^n\\ y\neq x}} \mathbb{P}\left(x \text{ n'est pas meilleur que } y \text{ compte tenu de } \mathbf{O}^1(x), \mathbf{O}^2(x), \dots, \mathbf{O}^T(x)\right).\end{aligned}$$

On a donc démontré qu'en partant de $x \in \{0,1\}^n$ inconnu, on peut retrouver x à partir de la donnée d'une suite
$$\mathbf{O}^1(x), \mathbf{O}^2(x), \dots, \mathbf{O}^T(x)$$
de T variables aléatoires à valeurs dans $\{0,1\}^n$ mutuellement indépendantes de même loi que $\mathbf{O}(x)$ (qui représentent la donnée de T échantillons bruités obtenus à partir d'une même source), avec grande probabilité à partir de $e^{3\ln(n)n^{1/3}}$ échantillons différents.

* * *

Mines PSI 2020 Maths 2

Caractérisation et exponentielle des matrices normales

Notations

— n désigne un entier naturel non nul.

— $\mathcal{M}_n$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées réelles de taille (n, n), dont la matrice unité est notée I_n.

— E_n désigne l'espace vectoriel des matrices réelles de taille $(n, 1)$ (matrices colonnes). On le munit de son produit scalaire usuel et de la norme (euclidienne) associée définis par :

$$(X|Y) = {}^tXY \text{ et } \|X\| = \sqrt{{}^tXX}$$

— Pour $A \in \mathcal{M}_n$, on note ${}^tA$, la transposée de A.

— $\mathcal{S}_n$ (respectivement $\mathcal{A}_n$) désigne le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n$ constitué des matrices symétriques (respectivement antisymétriques) de $\mathcal{M}_n$.

— $\mathcal{O}_n = \{A \in \mathcal{M}_n,\ A^tA = I_n\}$ est le groupe orthogonal d'ordre n.

— $\mathcal{SO}_n = \{A \in \mathcal{O}_n,\ \det(A) = 1\}$ est le groupe spécial orthogonal d'ordre n.

— Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note $\mathrm{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ et $\mathrm{S}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$.
On rappelle que $\mathcal{SO}_2 = \{\mathrm{R}(\theta),\ \theta \in \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{O}_2 = \mathcal{SO}_2 \cup \{\mathrm{S}(\theta),\ \theta \in \mathbb{R}\}$.

Définition 1 *Une matrice A de $\mathcal{M}_n$ est dite **normale** lorsqu'elle commute avec sa transposée, c'est-à-dire lorsque $A^tA = {}^tAA$.*

Définition 2 *$A \in \mathcal{M}_n$ est dite **orthogonalement semblable à** $B \in \mathcal{M}_n$, s'il existe $Q \in \mathcal{O}_n$ tel que $B = {}^tQAQ$. (On pourra noter en abrégé : A est **ORTS** à B)*

Objectifs

— Dans un premier temps, ce problème vise à établir que, pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n$, les quatre conditions suivantes sont équivalentes :

($\mathbf{C_1}$) Il existe un polynôme P à coefficients réels tel que ${}^tA = P(A)$.

($\mathbf{C_2}$) La matrice A est normale.

($\mathbf{C_3}$) Pour tout $X \in E_n$, $\|{}^tAX\| = \|AX\|$.

($\mathbf{C_4}$) La matrice A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs, dont chaque bloc diagonal est :

— soit de taille $(1, 1)$,

— soit de taille $(2,2)$ du type $r\mathrm{R}(\theta)$, où $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

— Dans un second temps, on définit et caractérise l'exponentielle d'une telle matrice.

On pourra utiliser, sans démonstration, les deux résultats suivants :

Théorème 1 *Tout endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ admet au moins une droite ou un plan stable.*

Théorème 2 *Si $A \in \mathcal{M}_n$ et $B \in \mathcal{M}_n$ sont telles qu'il existe $Q \in \mathcal{O}_n$ vérifiant $B = {}^tQAQ$, alors, pour tout polynôme P à coefficients réels, on a $P(B) = {}^tQP(A)Q$.*

I. Question préliminaire

1. Montrer que la relation **ORTS** est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n$.

II. Exemples

2. Montrer que les éléments de $\mathcal{S}_n$ vérifient les conditions $(\mathbf{C_1})$, $(\mathbf{C_2})$, $(\mathbf{C_3})$ et $(\mathbf{C_4})$, et que ceux de $\mathcal{A}_n$ vérifient les conditions $(\mathbf{C_1})$, $(\mathbf{C_2})$ et $(\mathbf{C_3})$.

3. Montrer que les éléments de $\mathcal{O}_n$ vérifient les conditions $(\mathbf{C_2})$ et $(\mathbf{C_3})$.

4. Dans cette question seulement, on suppose $n = 2$.
   Montrer que les matrices rT, où $r > 0$ et $T \in \mathcal{O}_2$, vérifient les conditions $(\mathbf{C_1})$ et $(\mathbf{C_4})$.

III. Deux premières implications

Soit $A \in \mathcal{M}_n$.

5. Montrer que si A vérifie la condition $(\mathbf{C_1})$, alors A vérifie la condition $(\mathbf{C_2})$.

6. Montrer que si A vérifie la condition $(\mathbf{C_2})$, alors A vérifie la condition $(\mathbf{C_3})$.

IV. La condition $(\mathrm{C_3})$ implique la condition $(\mathrm{C_4})$

Dans cette question seulement, on suppose $n = 2$ et soit $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2$ vérifiant la condition $(\mathbf{C_3})$.

7. Montrer que $c = b$ ou bien ($b \neq 0$ et $c = -b$ et $a = d$).
   On pourra utiliser, par exemple, les vecteurs $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ de E_2.
   En déduire que A vérifie la condition $(\mathbf{C_4})$.

Dans toute la suite de cette partie, on se donne $A \in \mathcal{M}_n$ vérifiant la condition ($\mathbf{C_3}$).

8. Montrer que, pour tout réel λ, la matrice $A - \lambda I_n$ vérifie ($\mathbf{C_3}$).

9. En déduire que A et ${}^tA$ ont les mêmes sous-espaces propres et qu'ils sont deux à deux orthogonaux.

10. En utilisant la question précédente, déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la matrice A pour qu'elle soit diagonalisable.

11. Pour $n \geqslant 3$, montrer que A est orthogonalement semblable à une matrice du type $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$, où $A_1 \in \mathcal{M}_p$ et $A_2 \in \mathcal{M}_{n-p}$ vérifient ($\mathbf{C_3}$), avec $p \in \{1, 2\}$.
On pourra commencer par montrer que toute matrice orthogonalement semblable à A vérifie ($\mathbf{C_3}$).

12. Montrer que si A vérifie la condition ($\mathbf{C_3}$), alors A vérifie la condition ($\mathbf{C_4}$).

V. La condition $(\mathrm{C_4})$ implique la condition $(\mathrm{C_1})$

Soit $Z = \{z_1, \dots, z_n\}$, une famille de n complexes deux à deux distincts.

13. Établir l'existence d'un unique polynôme P de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \qquad P(z_k) = \overline{z_k}$$

On suppose de plus que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $\overline{z_k} \in Z$.
Montrer alors que le polynôme P est réel.

Soient $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(re^{i\theta}) = re^{-i\theta}$.

14. Montrer que $P(r\mathrm{R}(\theta)) = {}^t(r\mathrm{R}(\theta))$.
Lorsque $\sin\theta \neq 0$*, on pourra utiliser la division euclidienne de P par le polynôme caractéristique χ de la matrice $rR(\theta)$ de $\mathcal{M}_2$.*

15. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n$ vérifie la condition ($\mathbf{C_4}$), alors A vérifie la condition ($\mathbf{C_1}$).

VI. Exponentielle d'une matrice normale

16. Pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, montrer que les séries $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}} \frac{r^k \cos(k\theta)}{k!}$ et $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}} \frac{r^k \sin(k\theta)}{k!}$ convergent et calculer leur somme.

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_n$ est désormais muni de la norme $\|.\|_\infty$ définie par :

$$\forall A = (A_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n, \qquad \|A\|_\infty = \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |A_{i,j}|$$

17. Montrer que, pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n^2$, $\|AB\|_\infty \leqslant n\|A\|_\infty \|B\|_\infty$.

Pour $A \in \mathcal{M}_n$ et $p \in \mathbb{N}$, on pose $S_p(A) = \sum\limits_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} A^k$.

18. Montrer que la suite $(S_p(A))_{p\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_n$, vers une limite que l'on notera $\operatorname{Exp}(A)$, et que :
$$\forall Q \in \mathcal{O}_n, \qquad \operatorname{Exp}({}^tQAQ) = {}^tQ\operatorname{Exp}(A)Q$$
On pourra montrer que, pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant n$, la série numérique $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{(A^k)_{i,j}}{k!}$ est absolument convergente.

19. Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}_n$ constitué des matrices normales de $\mathcal{M}_n$ est un fermé de $\mathcal{M}_n$. Qu'en déduit-on pour $\operatorname{Exp}(A)$, lorsque $A \in \mathcal{E}_n$?

20. Soit $(r, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Montrer que $\operatorname{Exp}(r\mathrm{R}(\theta)) = \mathrm{e}^{r\cos\theta}\mathrm{R}(r\sin\theta)$.
En déduire que $\operatorname{Exp}(\mathcal{E}_n)$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n$ orthogonalement semblable aux matrices diagonales par blocs, dont chaque bloc diagonal est :

    — soit du type $(\mu) \in \mathcal{M}_1$, avec $\mu > 0$

    — soit du type $\alpha\mathrm{R}(\beta) \in \mathcal{M}_2$, avec $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

On note $\mathcal{S}_n^{++}$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n$ à valeurs propres strictement positives, et $\mathcal{F}_n$ l'ensemble des matrices B de $\mathcal{M}_n$ vérifiant les deux conditions :

— les valeurs propres négatives de B sont de multiplicité paire

— il existe $S \in \mathcal{S}_n^{++}$ et $T \in \mathcal{SO}_n$ telles que $B = ST = TS$.

21. Démontrer que $\operatorname{Exp}(\mathcal{E}_n) = \mathcal{F}_n$.

22. La matrice $B = (B_{i,j}) \in \mathcal{M}_n$ définie par :
$$B_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leqslant i+1 = j \leqslant n \ \text{ ou } (i,j) = (n,1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
est-elle l'exponentielle d'une matrice de $\mathcal{E}_n$?

Fin du problème

ÉCOLE POLYTECHNIQUE – ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2011 **FILIÈRE PC**

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – (XEULC)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Matrices infiniment divisibles

Notations :

On désigne par $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels et par $\mathbf{R}_+$ l'ensemble des réels positifs ou nuls. Soit n un entier $\geqslant 1$. On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées à n lignes et n colonnes. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on note $\det(M)$ son déterminant. On désigne par $\mathcal{SM}_n(\mathbf{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ des matrices symétriques. On note $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ la matrice identité. On identifie $\mathbf{R}^n$ et l'espace des matrices à n lignes et 1 colonne.

Première partie : la fonction Γ

1a. Montrer que pour réel $s > 0$, la fonction $x \mapsto e^{-x}x^{s-1}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. On pose alors $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x$.

1b. Calculer $\Gamma(m)$ pour m entier strictement positif.

1c. Montrer que Γ est continue sur $]0, +\infty[$.

2a. Montrer que pour tout entier strictement positif m et pour $x \in [0, m]$, $\left(1 - \dfrac{x}{m}\right)^m \leqslant e^{-x}$.
Montrer que $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m = e^{-x}$.

2b. Montrer que $\displaystyle\int_0^m (1 - \frac{x}{m})^m x^{s-1}\mathrm{d}x = \frac{m!\, m^s}{s(s+1)\cdots(s+m)}$, pour tout réel $s > 0$ et pour tout entier m. (On pourra procéder par intégrations par parties successives).

2c. Montrer que pour tout réel $s > 0$, $\Gamma(s) = \displaystyle\lim_{m \to +\infty} \frac{m!\, m^s}{s(s+1)\cdots(s+m)}$.

Deuxième partie : matrices positives et produit de Hadamard

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On dit que A est positive si A est symétrique et

$$\forall X = {}^t(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n, \quad \langle X, AX \rangle = {}^tXAX = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}x_ix_j \geqslant 0$$

où $\langle ., . \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien standard sur $\mathbf{R}^n$.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{SM}_2(\mathbf{R})$. Montrer que A est positive si et seulement si $a \geqslant 0, d \geqslant 0$, $\det(A) \geqslant 0$.

4. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{SM}_n(\mathbf{R})$. Montrer que A est positive si et seulement si ses valeurs propres sont des réels positifs ou nuls.

5. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{SM}_n(\mathbf{R})$ une matrice positive, et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ des réels. Montrer que, posant $b_{ij} = \lambda_i\lambda_j a_{ij}$, la matrice $B = (b_{ij})$ est positive.

6. Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel préhilbertien réel, pour lequel le produit scalaire de deux éléments $x, y \in \mathcal{H}$ est noté $\langle x, y \rangle$. Soient $u_1, \cdots, u_n \in \mathcal{H}$. On pose $a_{ij} = \langle u_i, u_j \rangle$. Montrer que la matrice $A = (a_{ij})$ est positive.

Soient $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Leur produit de Hadamard est la matrice $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ donné par : $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$. On désignera cette opération par le signe $*$: $C = A * B$.

7. Montrer que si $A \in \mathcal{SM}_n(\mathbf{R})$ est une matrice positive et si B est une matrice diagonale à coefficients diagonaux positifs ou nuls, alors $A * B$ est une matrice positive.

8a. Montrer que si $A \in \mathcal{SM}_n(\mathbf{R})$ est une matrice positive, elle peut s'écrire comme somme de matrices de la forme $Y\,{}^tY = {}^t(y_1, \cdots, y_n)(y_1, \cdots, y_n)$, où $Y = {}^t(y_1, \cdots, y_n) \in \mathbf{R}^n$. On pourra commencer par le cas où A est diagonale.

8b. Montrer que si $A, B \in \mathcal{SM}_n(\mathbf{R})$ sont des matrices positives, alors $A * B$ est une matrice positive.

Troisième partie : matrices infiniment divisibles

On considère maintenant des matrices $A = (a_{ij}) \in \mathcal{SM}_n(\mathbf{R})$ dont les coefficients sont des réels positifs ou nuls. Il résulte de la question **8b.** que si A est positive, alors pour tout entier $r > 0$, la matrice $A^{*r} = (a_{ij}^r)$ est positive. On dit qu'une matrice symétrique A à coefficients a_{ij} positifs ou nuls est infiniment divisible si pour tout **réel** $r > 0$, la matrice (a_{ij}^r) est positive. On désignera encore, lorsque r est un réel strictement positif, par A^{*r} la matrice (a_{ij}^r).

9a. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ une matrice symétrique positive à coefficients positifs ou nuls. Montrer qu'elle est infiniment divisible.

9b. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est positive. Déterminer les valeurs de $r > 0$ pour lesquelles A^{*r} est positive.

10. Montrer que si $A = (a_{ij})$ est infiniment divisible et si $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont des réels strictement positifs, alors posant $b_{ij} = \lambda_i \lambda_j a_{ij}$, la matrice $B = (b_{ij})$ est infiniment divisible.

11. Soit A une matrice symétrique à coefficients positifs ou nuls. Montrer que si pour tout entier $m \geqslant 1, A^{*\frac{1}{m}}$ est positive, alors A est infiniment divisible.

12. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels strictement positifs. On forme la matrice $C = (c_{ij})$ avec $c_{ij} = \dfrac{1}{\lambda_i + \lambda_j}$ et on se propose de montrer qu'elle est infiniment divisible.

Soit $\mathcal{H}$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbf{R}_+$ à valeurs réelles, dont le carré est intégrable. On munit $\mathcal{H}$ du produit scalaire : pour $f, g \in \mathcal{H}, \langle f, g \rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\mathrm{d}t$. On pose, pour tout $t \geqslant 0, u_i(t) = e^{-\lambda_i t}$.

12a. Calculer $\langle u_i, u_j \rangle$ et en déduire que C est positive.

12b. Montrer que pour $r > 0$ et $\alpha > 0, \dfrac{1}{\alpha^r} = \dfrac{1}{\Gamma(r)} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t\alpha} t^{r-1} \mathrm{d}t$.

12c. Soit, pour $r > 0, \mathcal{H}_r$ l'ensemble des fonctions continues u sur $\mathbf{R}_+$ à valeurs réelles telles que la fonction $t \mapsto u(t)^2 t^{r-1}$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+$. On admet que c'est un espace vectoriel. Montrer que si on pose, pour $u, v \in \mathcal{H}_r, \langle u, v \rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)v(t)t^{r-1}\mathrm{d}t$, on munit $\mathcal{H}_r$ d'un produit scalaire.

12d. Montrer que C est infiniment divisible.

13. Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ des réels strictement positifs. Pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$ on pose $k_{ij} = \dfrac{\Gamma(\lambda_i + \lambda_j + 1)}{\Gamma(\lambda_i + 1)\Gamma(\lambda_j + 1)}$. On se propose de montrer que la matrice $K = (k_{ij})$ est infiniment divisible.

13a. Montrer que $k_{ij} = \displaystyle\lim_{m \to +\infty} \frac{1}{m.m!} \prod_{p=1}^{m+1} \frac{(\lambda_i + p)(\lambda_j + p)}{(\lambda_i + \lambda_j + p)}$.

13b. Montrer que pour tout entier $p \geqslant 1$, la matrice $\left(\dfrac{(\lambda_i + p)(\lambda_j + p)}{(\lambda_i + \lambda_j + p)} \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est infiniment divisible. Conclure.

Quatrième partie : matrices conditionnellement positives

On dit qu'une matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est conditionnellement positive si elle est symétrique et si pour tout $X = {}^t(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$, on a

$$ {}^tXAX = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j \geqslant 0\,. $$

14. Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ des réels strictements positifs. Posons $a_{ij} = -\ln(\lambda_i + \lambda_j)$. Montrer que $A = (a_{ij})$ est conditionnellement positive. (Pour $X = {}^t(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$, on pourra introduire la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par :

$$ f(r) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i x_j \left(\frac{1}{\lambda_i + \lambda_j} \right)^r $$

et utiliser les résultats de la question **12.**).

15. Notons J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Soit $B \in \mathcal{SM}_n(\mathbf{R})$. Considérons les deux conditions suivantes :
*(*i) B est conditionnellement positive.
*(*ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \lambda > 0$ tel que la matrice $B + \varepsilon\, I_n + \lambda J$ est positive.
Montrer que *(*ii) implique *(*i).

On admettra dans la suite que ces deux conditions sont en fait équivalentes.

16a. On suppose que $A = (a_{ij})$ est infiniment divisible et que tous les coefficients de A sont strictement positifs. Montrer que la matrice $(\ln a_{ij})$ est conditionnellement positive.

16b. Réciproquement, supposons que la matrice $B = (b_{ij})$ est conditionnellement positive. En considérant pour tout $\varepsilon > 0$ une matrice $C = (c_{ij}) = B + \varepsilon I_n + \lambda J$ comme au **15.**, montrer que pour tout $r > 0$, la matrice $(\exp(rc_{ij}))$ est positive. En déduire que la matrice $(\exp(rb_{ij}))$ est positive.

17a. Soient $z_1, \cdots, z_n$ des nombres complexes. Montrer que la matrice $(e^{-|z_i - z_j|^2})$ est infiniment divisible.

17b. Soient $z_1, \cdots, z_n$ des nombres complexes. Montrer que pour tout $t > 0$, la matrice de coefficients $\dfrac{1}{t + |z_i - z_j|^2}$ est positive, puis que la matrice de coefficients $-\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} \frac{|z_i - z_j|^2}{t + |z_i - z_j|^2} \mathrm{d}t$ est conditionnellement positive.

17c. Montrer que la matrice $(e^{-|z_i - z_j|})$ est infiniment divisible.

* *
*

Mathématiques 2

PSI

2020

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures — Calculatrice autorisée

Les fonctions de Lambert

Objectifs

L'objet de ce problème est l'étude de différentes propriétés des fonctions de Lambert ainsi que leur application en probabilités.

Dépendance des parties

Les fonctions V et W définies dans la partie I sont utilisées dans les parties II, III et IV. Les parties II, III et IV sont indépendantes les unes des autres.

Notations

Pour des entiers k et n avec $0 \leqslant k \leqslant n$, le coefficient binomial « k parmi n » est noté $\binom{n}{k}$.

Lorsque $k \leqslant n$, $[\![k, n]\!]$ représente l'ensemble des nombres entiers compris, au sens large, entre k et n.

I Fonctions de Lambert

Dans cette partie, on définit les fonctions de Lambert et on étudie certaines de leurs propriétés. On considère, dans toute cette partie, l'application

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\mathrm{e}^x \end{array} \right.$$

Q 1. Justifier que l'application f réalise une bijection de l'intervalle $[-1, +\infty[$ sur l'intervalle $[-\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$.

Dans la suite du sujet, la réciproque de cette bijection est notée W. On rappelle que ceci signifie que, pour tout réel $x \geqslant -\mathrm{e}^{-1}$, $W(x)$ est l'unique solution de l'équation $f(t) = x$ (équation d'inconnue $t \in [-1, +\infty[$).

Q 2. Justifier que W est continue sur $[-\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$ et est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$.

Q 3. Expliciter $W(0)$ et $W'(0)$.

Q 4. Déterminer un équivalent de $W(x)$ lorsque $x \to 0$ ainsi qu'un équivalent de $W(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

Q 5. Tracer, sur le même dessin, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_W$ représentatives des fonctions f et W. Préciser les tangentes aux deux courbes au point d'abscisse 0 ainsi que la tangente à $\mathcal{C}_W$ au point d'abscisse $-\mathrm{e}^{-1}$.

Q 6. Pour quelles valeurs du paramètre réel α la fonction $x \mapsto x^\alpha W(x)$ est-elle intégrable sur $]0, 1]$?

Q 7. Pour quelles valeurs du paramètre réel α la fonction $x \mapsto x^\alpha W(x)$ est-elle intégrable sur $[1, +\infty[$?

Q 8. Démontrer que l'application f réalise une bijection de l'intervalle $]-\infty, -1]$ sur l'intervalle $[-\mathrm{e}^{-1}, 0[$.

Dans la suite du sujet, la réciproque de cette bijection est notée V.

Q 9. Pour un paramètre réel m, on considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

$$x\mathrm{e}^x = m \tag{I.1}$$

Déterminer, en fonction de m, le nombre de solutions de (I.1). Expliciter les solutions éventuelles à l'aide des fonctions V et W.

Q 10. Pour un paramètre réel m, on considère l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

$$x\mathrm{e}^x \leqslant m \tag{I.2}$$

En utilisant les fonctions V et W, déterminer, suivant les valeurs de m, les solutions de (I.2). Illustrer graphiquement les différents cas.

Q 11. Pour des paramètres réels non nuls a et b, on considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{e}^{ax} + bx = 0 \tag{I.3}$$

Déterminer, suivant les valeurs de a et b, le nombre de solutions de (I.3). Expliciter les solutions éventuelles à l'aide des fonctions V et W.

II Probabilités

On étudie dans cette partie deux situations dont la résolution fait intervenir les fonctions V et W définies dans la partie précédente. Les variables aléatoires considérées dans cette partie sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. L'espérance et la variance d'une variable aléatoire X sont notées, sous réserve d'existence, respectivement $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

II.A – Première situation

Pour fidéliser sa clientèle, un commerçant organise une tombola permettant de gagner différents lots. Chaque client qui entre dans le magasin tire un billet de tombola. Chaque billet permet de gagner un lot avec la probabilité $p \in \,]0,1[$. On suppose que les tirages sont indépendants et on admet que le nombre N de billets distribués aux clients au cours d'une journée est une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On note X le nombre de billets gagnants tirés au cours d'une journée et on admet que X est également une variable aléatoire.

Pour que l'opération soit rentable, le commerçant souhaite que la probabilité de gagner au moins deux lots durant la même journée soit faible. On considère donc un réel $\alpha \in \,]0,1[$ et on souhaite réaliser la condition

$$\mathbb{P}(X \geqslant 2) \leqslant 1 - \alpha. \tag{II.1}$$

Cependant, pour que l'opération intéresse les clients, le commerçant souhaite également que p soit le plus grand possible, tout en réalisant la condition (II.1).

Q 12. Démontrer que X suit une loi de Poisson de paramètre λp. Donner l'espérance et la variance de X.

Q 13. En utilisant l'inégalité de Markov, démontrer que si $p \leqslant 2\dfrac{1-\alpha}{\lambda}$, alors la condition (II.1) est satisfaite.

Q 14. On pose $x = -(\lambda p + 1)$. Démontrer que la condition (II.1) est équivalente à la condition

$$x\mathrm{e}^x \leqslant -\alpha \mathrm{e}^{-1}.$$

Q 15. En utilisant l'une des fonctions V et W (définies dans la partie I) et la question 10, discuter selon la position de λ par rapport à $-1 - V(-\alpha \mathrm{e}^{-1})$ l'existence d'un plus grand réel $p \in \,]0,1[$ satisfaisant la condition (II.1).

II.B – Deuxième situation

Un message constitué d'une suite de bits est transmis sur un canal. Cependant, ce canal n'est pas fiable : chaque bit risque d'être inversé, indépendamment des autres, avec la probabilité $1 - p \in \,]0,1[$. Pour fiabiliser la transmission, on découpe le message et on transmet des blocs de r bits. Chaque bloc comprend à la fois des bits du message d'origine et des bits supplémentaires qui permettent de détecter et corriger *une* erreur. On note X le nombre d'inversions survenues lors de la transmission d'un bloc de r bits et on admet que X est une variable aléatoire. Pour que la transmission soit suffisamment fiable, on souhaite que la probabilité qu'il y ait au moins deux erreurs dans un même paquet soit faible. Plus précisément, on considère $\alpha \in \,]0,1[$ et on veut réaliser la condition

$$\mathbb{P}(X \geqslant 2) \leqslant 1 - \alpha. \tag{II.2}$$

Pour que le codage soit efficace, on souhaite de plus que r soit le plus grand possible, tout en réalisant la condition (II.2).

Q 16. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Q 17. En utilisant l'inégalité de Markov, démontrer que si $r \leqslant 2\dfrac{1-\alpha}{1-p}$, alors la condition (II.2) est satisfaite.

Q 18. On pose $a = \dfrac{p\ln(p)}{p-1}$ et $x = r\ln(p) - a$. Démontrer que la condition (II.2) est équivalente à la condition

$$x\mathrm{e}^x \leqslant -\alpha a \mathrm{e}^{-a}.$$

Q 19. En utilisant l'une des fonctions V et W (définies dans la partie I) et la question 10, étudier l'existence d'un plus grand entier naturel r satisfaisant la condition (II.2).

Q 20. Lorsqu'il existe, exprimer cet entier en fonction de p, α et a à l'aide d'une des fonctions V ou W.

III Développement en série entière

Le but de cette partie est d'établir que la fonction W définie dans la partie I est développable en série entière et de préciser son développement ainsi que son rayon de convergence. Pour cela, on commence par établir un résultat de nature algébrique.

III.A – Le théorème binomial d'Abel

On considère dans cette partie un entier naturel n ainsi qu'un nombre complexe a. On définit une famille de polynômes $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ en posant

$$A_0 = 1 \qquad \text{et, pour tout } k \in [\![1, n]\!], \quad A_k = \frac{1}{k!} X (X - ka)^{k-1}.$$

On note $\mathbb{C}_n[X]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes et de degré inférieur ou égal à n.

Q 21. Démontrer que la famille $(A_0, \dots, A_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Q 22. Démontrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $A_k'(X) = A_{k-1}(X - a)$.

Q 23. En déduire, pour j et k éléments de $[\![0, n]\!]$, la valeur de $A_k^{(j)}(ja)$. On distinguera suivant que $j < k$, $j = k$ ou $j > k$.

Soit P un élément de $\mathbb{C}_n[X]$ et soient $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ des nombres complexes tels que

$$P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k A_k.$$

Q 24. Démontrer que, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $\alpha_j = P^{(j)}(ja)$.

Q 25. En déduire l'identité binomiale d'Abel :

$$\forall (a, x, y) \in \mathbb{C}^3, \qquad (x + y)^n = y^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x (x - ka)^{k-1} (y + ka)^{n-k}.$$

Q 26. Établir la relation,

$$\forall (a, y) \in \mathbb{C}^2, \qquad n y^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-ka)^{k-1} (y + ka)^{n-k}.$$

III.B – Développement en série entière de la fonction W

On définit une suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$ en posant,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_n = \frac{(-n)^{n-1}}{n!}.$$

On définit, lorsque c'est possible, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

Q 27. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geqslant 1} a_n x^n$.

Q 28. Justifier que la fonction S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, exprimer $S^{(n)}(0)$ en fonction de n.

Q 29. Démontrer que la fonction S est définie et continue sur $[-R, R]$.

Q 30. Démontrer que,

$$\forall x \in \,]-R, R[, \qquad x(1 + S(x)) S'(x) = S(x).$$

On pourra utiliser le résultat de la question 26.

On considère la fonction $h : \left| \begin{array}{ccc}]-R, R[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & S(x) \mathrm{e}^{S(x)} \end{array} \right.$

Q 31. Démontrer que h est solution sur $]-R, R[$ de l'équation différentielle $xy' - y = 0$.

Q 32. Résoudre l'équation différentielle $xy' - y = 0$ sur chacun des intervalles $]0, R[$, $]-R, 0[$ puis sur l'intervalle $]-R, R[$.

Q 33. En déduire que,

$$\forall x \in \,]-R, R[, \qquad S(x) = W(x).$$

Q 34. Ce résultat reste-t-il vrai sur $[-R, R]$?

IV Approximation de W

On définit dans cette partie une suite de fonctions $(w_n)_{n\geqslant 0}$ et on étudie sa convergence vers la fonction W définie dans la partie I.

Pour tout réel positif x, on considère la fonction ϕ_x définie par

$$\phi_x : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & x\exp(-x\exp(-t)) \end{array} \right.$$

et on définit, sur $\mathbb{R}^+$, une suite de fonctions $(w_n)_{n\geqslant 0}$ par,

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad \begin{cases} w_0(x) = 1 \\ w_{n+1}(x) = \phi_x(w_n(x)) \end{cases}$$

Q 35. Démontrer que, pour tout réel positif x, $W(x)$ est un point fixe de ϕ_x, c'est-à-dire une solution de l'équation $\phi_x(t) = t$.

Q 36. Démontrer que, pour tout réel positif x, la fonction ϕ_x est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad 0 \leqslant \phi_x'(t) \leqslant \frac{x}{\mathrm{e}}.$$

Q 37. En déduire que

$$\forall x \in [0, \mathrm{e}], \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad |w_n(x) - W(x)| \leqslant \left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^n |1 - W(x)|\,.$$

Q 38. Pour tout réel $a \in\,]0, \mathrm{e}[$, justifier que la suite de fonctions (w_n) converge uniformément sur $[0, a]$ vers la fonction W.

Q 39. La suite de fonctions (w_n) converge-t-elle uniformément vers W sur $[0, \mathrm{e}]$?

• • • FIN • • •

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2023

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Dans tout le sujet on se fixe un entier naturel $N \geq 2$.

— Soit $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbf{R})$. Pour tout $(i, j) \in [\![1 ; p]\!] \times [\![1 ; q]\!]$, on note $A[i, j]$ le coefficient à la ligne i et la colonne j de A. Par abus, si A est une matrice colonne ($q = 1$) on note $A[i]$ pour $A[i, 1]$. De même si A est une matrice ligne ($p = 1$) on note $A[i]$ pour $A[1, i]$.

— On identifie $\mathbf{R}^N$ avec $\mathscr{M}_{N,1}(\mathbf{R})$. Pour tout $k \in [\![1 ; N]\!]$ on note $E_k \in \mathscr{M}_{N,1}(\mathbf{R})$ la matrice colonne dont tous les coefficients sont nuls sauf la k-ième qui vaut 1. On rappelle que $(E_1, \ldots, E_N)$ est une base de $\mathscr{M}_{N,1}(\mathbf{R})$.

On note $U \in \mathscr{M}_{N,1}(\mathbf{R})$ le vecteur colonne dont toutes les coordonnées sont égales à 1. On a donc pour tout $i \in [\![1 ; N]\!]$, $U[i] = 1$.

— On appelle noyau de Markov une matrice $K \in \mathscr{M}_N(\mathbf{R})$ telle que

(M_1) $\forall (i, j) \in [\![1 ; N]\!]^2, K[i, j] \geq 0$

(M_2) $\forall i \in [\![1 ; N]\!], \sum_{j=1}^{N} K[i, j] = 1$

— On appelle probabilité un vecteur ligne $\mu \in \mathscr{M}_{1,N}(\mathbf{R})$ tel que

(P_1) $\forall i \in [\![1 ; N]\!], \mu[i] \geq 0$

(P_2) $\sum_{j=1}^{N} \mu[j] = 1$

— On notera $I_N \in \mathscr{M}_N(\mathbf{R})$ la matrice identité.

Préliminaires

1 ▷ Soit $A \in \mathscr{M}_N(\mathbf{R})$. Montrer que A vérifie (M_2) si et seulement si $AU = U$.

En déduire que si A et B sont deux noyaux de Markov alors AB est encore un noyau de Markov.

On se fixe un noyau de Markov K.

2 $\triangleright$ Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, K^n est un noyau de Markov.

3 $\triangleright$ Soit $t \in \mathbf{R}$ et $(i,j) \in [\![1\,;\, N]\!]^2$, justifier que la série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{t^n K^n[i,j]}{n!}$ converge.

On notera $H_t \in \mathscr{M}_N(\mathbf{R})$ la matrice définie par

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\, N]\!]^2 , H_t[i,j] = e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n K^n[i,j]}{n!}$$

4 $\triangleright$ Montrer que pour tout réel $t \in \mathbf{R}_+$, H_t est un noyau de Markov.

5 $\triangleright$ Montrer que pour $(t,s) \in \mathbf{R}_+^2$, $H_{t+s} = H_t H_s$.

On pourra faire apparaître un produit de Cauchy.

Partie 1 - Modélisation probabiliste

On cherche à modéliser un système ayant N états numérotés de 1 à N. À l'instant initial le système est dans l'état 1. Le système est soumis à des impulsions.

On suppose que pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\, N]\!]^2$, à chaque impulsion, si le système est dans l'état i, il se retrouve dans l'état j avec une probabilité p_{ij} qui ne dépend que de l'état où il était avant l'impulsion.

Ce système est modélisé par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

Pour tout entier $k \in \mathbf{N}$, on note Z_k la variable aléatoire à valeurs dans $[\![1\,;\, N]\!]$ qui correspond à l'état du sytème après k impulsions. Pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\, N]\!]^2$ et tout $k \in \mathbf{N}$ tels que $P(Z_k = i) \neq 0$ on a donc $P(Z_{k+1} = j | Z_k = i) = p_{ij}$. En particulier, cela ne dépend pas de k. De plus, la variable Z_0 est la variable certaine de valeur 1.

On considère la matrice $K \in \mathscr{M}_N(\mathbf{R})$ définie par

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\, N]\!]^2 , K[i,j] = p_{ij}$$

6 $\triangleright$ Justifier que K est un noyau de Markov.

7 $\triangleright$ Soit $n \in \mathbf{N}$. Soit $j \in [\![1\,;\, N]\!]$ montrer que $P(Z_n = j) = K^n[1,j]$.

On pourra procéder par récurrence.

8 $\triangleright$ Soit $t \in \mathbf{R}_+$. On suppose que le nombre d'impulsions après un temps t est donné par une variable aléatoire Y_t suivant la loi de Poisson de paramètre t. Pour tout $j \in [\![1\,;\, N]\!]$ on note $A_{t,j}$ l'événement « le système est dans l'état j après un temps t ». Justifier que $P(A_{t,j}) = H_t[1,j]$.

Partie 2 - Étude d'un endomorphisme autoadjoint

Soit E un espace euclidien de dimension N. On note $(\ |\ )$ le produit scalaire et $||\,||$ la norme euclidienne associée. Soit u un endomorphisme autoadjoint de E. On pose $q_u : E \to \mathbf{R}$ défini par $q_u : x \mapsto (u(x)|x)$ et on suppose que pour tout $x \in E$, $q_u(x) \geq 0$.

9 ▷ Énoncer le théorème spectral pour l'endomorphisme u. Que peut-on dire des valeurs propres de u ?

On suppose que 0 est valeur propre simple de u et on note λ_2 la plus petite valeur propre non nulle de u. On note $p : E \to E$ la projection orthogonale sur la droite vectorielle $\ker(u)$.

10 ▷ Montrer que pour tout $x \in E$, $q_u(x - p(x)) \geq \lambda_2 ||x - p(x)||^2$.

Partie 3 - Convergence de $H_t[i, j]$

On considère un noyau de Markov K. On suppose que 1 est une valeur propre simple de K.

On suppose qu'il existe une probabilité $\pi \in \mathscr{M}_{1,N}(\mathbf{R})$ telle que :

(a) Pour tout $j \in [\![1\,;\, N]\!]$, $\pi[j] \neq 0$.

(b) $\forall (i, j) \in [\![1\,;\, N]\!]^2, \pi[i]K[i, j] = K[j, i]\pi[j]$; on dit que K est π-reversible.

Un rapide calcul montre alors que pour tout réel t positif H_t est aussi un noyau de Markov π-réversible c'est-à-dire que

$$\forall (i, j) \in [\![1\,;\, N]\!]^2, \pi[i]H_t[i, j] = H_t[j, i]\pi[j]$$

On ne demande donc pas de démontrer ce résultat.

Pour finir, pour $X, Y \in \mathscr{M}_{N,1}(\mathbf{R})^2$, on pose

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{N} X[i]Y[i]\pi[i]$$

Dans cette dernière partie, on cherche à déterminer pour $(i, j) \in [\![1\,;\, N]\!]^2$ la limite de $H_t[i, j]$ quand t tend vers $+\infty$ et à majorer la vitesse de convergence.

11 ▷ Montrer que $\pi K = \pi$.

12 ▷ Montrer que $(X, Y) \mapsto \langle X, Y \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_{N,1}(\mathbf{R})$.

Dans la suite on note E l'espace l'espace euclidien $\mathscr{M}_{N,1}(\mathbf{R})$ muni de ce produit scalaire.

13 ▷ On considère l'endomorphisme de E défini par $u : X \mapsto (I_N - K)X$. Montrer que $\ker(u) = \mathrm{Vect}(U)$ et que u est un endomorphisme autoadjoint de E.

On admet que pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, l'endomorphisme $X \mapsto H_t X$ est aussi un endomorphisme autoadjoint de E.

14 ▷ Montrer que pour tout $X \in E$,

$$q_u(X) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} (X[i] - X[j])^2 K[i,j] \pi[i]$$

Que dire des valeurs propres de u ?

Soit $X \in E$, on note ψ_X la fonction définie de $\mathbf{R}$ dans E par $\psi_X : t \mapsto H_t X$ et φ_X la fonction définie de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ par $\varphi_X : t \mapsto ||H_t X||^2$

15 ▷ Justifier que ψ_X est dérivable et que pour tout t dans $\mathbf{R}$,

$$\psi_X'(t) = -(I_N - K) H_t X$$

16 ▷ En déduire que φ_X est dérivable et exprimer $\varphi_X'(t)$ à l'aide de q_u.

On note $p : E \to E$ la projection orthogonale sur $\ker(u)$.

17 ▷ Soit $t \in \mathbf{R}_+$. Montrer que $p(H_t X) = p(X)$.

18 ▷ On pose $Y = X - p(X)$. On note λ la plus petite valeur propre non nulle de u.

Montrer que pour tout réel $t \in \mathbf{R}_+$, $\varphi_Y'(t) \leq -2\lambda \varphi_Y(t)$.

En déduire que $\forall t \in \mathbf{R}_+,\ ||H_t X - p(X)||^2 \leq e^{-2\lambda t} ||X - p(X)||^2$.

19 ▷ Soit $i \in [\![1\,;\,N]\!]$ et $t \in \mathbf{R}_+$. Montrer que $||H_t E_i - \pi[i] U|| \leq e^{-\lambda t} \sqrt{\pi[i]}$.

20 ▷ Montrer que pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\,N]\!]^2$ et tout $t \in \mathbf{R}_+$,

$$H_t[i,j] - \pi[j] = \sum_{k=1}^{N} (H_{t/2}[i,k] - \pi[k])(H_{t/2}[k,j] - \pi[j])$$

On pourra utiliser la question 5.

21 ▷ En déduire que pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\,N]\!]^2$ et tout $t \in \mathbf{R}_+$,

$$|H_t[i,j] - \pi[j]| \leq e^{-\lambda t} \sqrt{\frac{\pi[j]}{\pi[i]}}$$

Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} H_t[i,j]$.

Fin du problème

Mathématiques 2

PSI

2015

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures — Calculatrices autorisées

Le problème de Dirichlet est un problème aux limites bien connu en théorie du potentiel, en particulier lorsqu'on est en présence d'une symétrie de révolution.

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, étant donnée une succession continue de valeurs sur un contour fermé (en particulier sur le cercle trigonométrique), il s'agit de déterminer une fonction (par exemple un potentiel en physique) *harmonique* à l'intérieur du domaine délimité par ce contour et coïncidant avec les valeurs données sur le contour. Dans le cas particulier où l'on a des valeurs polynomiales sur le contour fermé, on obtient comme solution un *polynôme harmonique*.

Les applications physiques liées à ce type de problème aux limites sont nombreuses, par exemple en géophysique, en physique quantique et en cristallographie.

Rappels et notations

- L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne canonique et de la norme associée $\|\cdot\|_2$ définie par $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \|(x,y)\|_2=\sqrt{x^2+y^2}$.
- Si $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $r>0$, la notation $D((x,y),r)$ (respectivement $\bar{D}((x,y),r)$) désigne le disque ouvert de centre (x,y) et de rayon r (respectivement le disque fermé de centre (x,y) et de rayon r). En particulier la notation $D(0,1)$ (respectivement $\bar{D}(0,1)$ et $C(0,1)$) désigne le disque ouvert de centre O de rayon 1 (respectivement le disque fermé de centre O de rayon 1 et le cercle de centre O et de rayon 1).
  On note Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
- Si f est une fonction de classe C^1 de Ω dans $\mathbb{R}$, $f:\left|\begin{array}{ccc}\Omega & \to & \mathbb{R}\\ (x,y) & \mapsto & f(x,y)\end{array}\right.$, $\partial_1 f$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ (respectivement $\partial_2 f$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial y}$) est la dérivée partielle du premier ordre par rapport à la première variable (respectivement par rapport à la seconde variable) dans la base canonique.
  Si f est de classe C^2, $\partial_{11} f$ ou $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ (respectivement $\partial_{22} f$ ou $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$) est la dérivée partielle d'ordre 2 de f par rapport à la première variable (respectivement par rapport à la seconde variable) dans la base canonique.
- Si $u:\Omega\to\mathbb{R}$ est une application de classe C^2 sur l'ouvert Ω, on rappelle que le laplacien de u est l'application Δu définie par $\Delta u:\left|\begin{array}{ccc}\Omega & \to & \mathbb{R}\\ (x,y) & \mapsto & \partial_{11}u(x,y)+\partial_{22}u(x,y)\end{array}\right.$
- Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Une application $v:\Omega\to\mathbb{R}$ est dite harmonique (sur Ω) si v est de classe C^2 sur Ω et si $\Delta v(x,y)=0$ pour tout $(x,y)\in\Omega$.
- On appelle fonction polynomiale des deux variables x et y sur $\mathbb{R}^2$ (ou plus simplement polynôme de deux variables, ou encore polynôme quand il n'y a pas de confusion possible) toute application de la forme
$$P:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}\\ (x,y) & \mapsto & \displaystyle\sum_{\substack{k,l\in\mathbb{N}\\ k+l\leqslant n}}\alpha_{kl}\,x^k y^l\end{array}\right.$$
  où n est un entier naturel fixé et les $(\alpha_{kl})_{0\leqslant k,l\leqslant n}$ sont des coefficients réels.
  Le polynôme nul est celui dont tous les coefficients sont nuls ; son degré est par convention $-\infty$.
  De plus, pour tout polynôme P non nul, le degré de P est l'entier naturel $d(P)$ défini par $d(P)=\max\{k+l/\ \alpha_{kl}\neq 0\}$.
  On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes à deux variables et pour tout $m\in\mathbb{N}$, $\mathcal{P}_m$ l'ensemble des polynômes à deux variables de degré inférieur ou égal à m. On admettra dans tout le problème que $\mathcal{P}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les lois usuelles et que $\mathcal{P}_m$ $(m\in\mathbb{N})$ en est un sous-espace vectoriel.
  Enfin, un polynôme est dit harmonique s'il définit en plus une application harmonique sur $\mathbb{R}^2$.

Objectifs

Dans la partie I, on donne quelques propriétés simples des polynômes et des polynômes harmoniques.

La partie II étudie certaines applications harmoniques ; les résultats obtenus seront utilisés dans la partie III.

La partie III s'intéresse au problème de Dirichlet sur le disque unité, puis la partie IV se focalise sur le problème de Dirichlet dans le cas où la condition au bord est polynomiale. On détermine pour finir la dimension de sous-espaces vectoriels de polynômes harmoniques.

I Résultats préliminaires

I.A – Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$ et P un polynôme de deux variables, tel que $P(x,y)=0$ pour tout $(x,y)\in\Omega$.

I.A.1)

a) Montrer que pour tout $(x,y)\in\Omega$, l'ouvert Ω contient un sous-ensemble de la forme $I\times J$, où I et J sont des intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$ contenant respectivement x et y.

L'utilisation d'un dessin sera appréciée ; ce dessin ne constituera cependant pas une preuve.

b) En déduire que P est le polynôme nul.

On pourra se ramener à étudier des fonctions polynomiales d'une variable.

I.A.2) Ce résultat subsiste-t-il si l'ensemble Ω admet une infinité d'éléments mais n'est pas supposé ouvert ?

I.B –

I.B.1) Soit $m\in\mathbb{N}$. Justifier que l'espace vectoriel $\mathcal{P}_m$ est de dimension finie et déterminer sa dimension.

I.B.2) Déterminer un polynôme harmonique de degré 1, puis de degré 2.

I.B.3)

a) Montrer que l'ensemble des polynômes harmoniques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}$.

b) Pour tout $m\geqslant 2$, on note Δ_m la restriction de Δ à $\mathcal{P}_m$. Montrer que $\dim(\ker\Delta_m)\geqslant 2m+1$.

c) Que peut-on déduire pour la dimension de l'espace vectoriel des polynômes harmoniques ?

I.C – Déterminer, dans chacun des cas suivants, un polynôme harmonique H qui vérifie $H(x,y)=f(x,y)$ pour tout $(x,y)\in C(0,1)$:

I.C.1) $f(x,y)=xy$;

I.C.2) $f(x,y)=x^4-y^4$.

II Quelques exemples d'applications harmoniques

Soit Ω un sous-ensemble ouvert inclus dans $\mathbb{R}^2$. On définit, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}^*$ et tout couple $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$:

$$\Omega_{x_0,y_0,\lambda}=\{\lambda(x,y)+(x_0,y_0)\mid(x,y)\in\Omega\}$$

II.A – On prend pour Ω (uniquement dans cette question) l'intérieur du triangle équilatéral de sommets $(1,0)$, $(-1/2,\sqrt{3}/2)$ et $(-1/2,-\sqrt{3}/2)$. Faire un dessin sur lequel apparaissent Ω et $\Omega_{2,1,1/2}$.

II.B – Soient $\lambda\in\mathbb{R}^*$ et $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ fixés.

II.B.1) Soit $f:\Omega\to\mathbb{R}$ une application harmonique de classe C^2 telle que $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont de classe C^2 sur Ω. Montrer que les applications $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont également harmoniques sur Ω.

II.B.2) Par quelle(s) transformation(s) géométrique(s) l'ensemble $\Omega_{x_0,y_0,\lambda}$ est-il l'image de Ω ? Justifier que $\Omega_{x_0,y_0,\lambda}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

II.B.3) Soit $g:\Omega_{x_0,y_0,\lambda}\to\mathbb{R}$ une application harmonique.

Montrer que l'application $(x,y)\mapsto g(\lambda(x,y)+(x_0,y_0))$ est harmonique sur Ω.

II.C –

II.C.1) Montrer que les applications

$$h_1:\left|\begin{array}{rcl}\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} & \to & \mathbb{R}\\ (x,y) & \mapsto & \ln(x^2+y^2)\end{array}\right.\qquad\text{et}\qquad h_2:\left|\begin{array}{rcl}\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} & \to & \mathbb{R}\\ (x,y) & \mapsto & \dfrac{x}{x^2+y^2}\end{array}\right.$$

sont harmoniques.

II.C.2) En déduire que, pour tout $t\in\mathbb{R}$, l'application $(x,y)\mapsto\dfrac{1-((x+\cos t)^2+(y+\sin t)^2)}{x^2+y^2}$ est harmonique sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

II.D – ***Un exemple fondamental***

Pour $(x,y)\in D(0,1)$ fixé, on définit le nombre complexe $z=x+iy$ et on pose pour t réel (quand l'expression a un sens) :

$$\mathrm{N}(x,y,t)=\frac{1-|z|^2}{|z-e^{it}|^2}=\frac{1-(x^2+y^2)}{(x-\cos t)^2+(y-\sin t)^2}$$

II.D.1) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application

$$\mathrm{N}_t : \left| \begin{array}{ccc} D(0,1) & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \mathrm{N}(x,y,t) \end{array} \right.$$

est harmonique.

On pourra utiliser la question II.B.3.

II.D.2) Dans la suite de cette partie, le couple (x,y) est fixé dans $D(0,1)$.

Montrer que $t \mapsto \mathrm{N}(x,y,t)$ est définie et continue sur $[0,2\pi]$.

II.D.3) Soit $t \in [0,2\pi]$ fixé. Déterminer deux nombres complexes α et β, indépendants de t et de z, tels que

$$\mathrm{N}(x,y,t) = -1 + \frac{\alpha}{1 - ze^{-it}} + \frac{\beta}{1 - \bar{z}e^{it}}$$

II.D.4) En déduire que $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{N}(x,y,t)\,\mathrm{d}t = 1$.

On pourra écrire $\dfrac{1}{1 - ze^{-it}}$ sous la forme de la somme d'une série de fonctions.

III Problème de Dirichlet sur le disque unité de $\mathbb{R}^2$

Soit $f : C(0,1) \to \mathbb{R}$ une application continue. On appelle $\mathcal{D}_f$ l'ensemble des applications définies et continues sur $\bar{D}(0,1)$, harmoniques sur $D(0,1)$ et qui coïncident avec l'application f sur $C(0,1)$.

Le problème de Dirichlet sur le disque unité de $\mathbb{R}^2$ associé à f, consiste à rechercher les éléments de l'ensemble $\mathcal{D}_f$.

On définit en outre, en reprenant les notations de la partie II, l'application

$$\mathrm{N}_f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{N}(x,y,t) f(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t$$

sur $D(0,1)$ et l'application

$$u(x,y) = \begin{cases} \mathrm{N}_f(x,y) & \text{si } (x,y) \in D(0,1) \\ f(x,y) & \text{si } (x,y) \in C(0,1) \end{cases}$$

sur $\bar{D}(0,1)$.

III.A – Étude de l'application N_f

III.A.1)

a) Montrer que N_f admet une dérivée partielle $\partial_{11}\mathrm{N}_f$ d'ordre 2 par rapport à x.

De même on peut montrer que N_f admet des dérivées partielles d'ordre 2 par rapport à toutes ses variables, continues sur $D(0,1)$. Ce résultat est admis pour la suite.

Exprimer, pour tout $(x,y) \in D(0,1)$, pour tout $(i,j) \in \{1,2\}^2$, $\partial_{ij}\mathrm{N}_f(x,y)$ en fonction de $\partial_{ij}\mathrm{N}(x,y,t)$.

b) En déduire que u est harmonique sur $D(0,1)$.

III.A.2) Dans cette question, on fixe $t_0 \in [0,2\pi]$, $(x,y) \in D(0,1)$ et $\varepsilon > 0$. De plus, on note, pour tout réel $\delta > 0$:

$$I_0^\delta = \{t \in [0,2\pi] \mid \|(\cos t, \sin t) - (\cos t_0, \sin t_0)\|_2 \leqslant \delta\}$$

a) Montrer que I_0^δ est un intervalle ou bien la réunion de deux intervalles disjoints.

L'utilisation d'un dessin sera appréciée ; ce dessin ne constituera cependant pas une preuve.

b) Montrer, en utilisant l'application f, l'existence d'un réel $\delta > 0$ tel que

$$\left| \int_{t \in I_0^\delta} \mathrm{N}(x,y,t)\big(f(\cos t, \sin t) - f(\cos t_0, \sin t_0)\big)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

c) Soit $\delta > 0$ quelconque. Montrer que, si $t \in [0,2\pi] \setminus I_0^\delta$ et $\|(x,y) - (\cos t_0, \sin t_0)\|_2 \leqslant \delta/2$, alors

$$|\,\mathrm{N}(x,y,t)| \leqslant 4\frac{1 - (x^2+y^2)}{\delta^2}$$

d) Déduire de la question précédente que, pour $\delta > 0$ fixé, il existe $\eta > 0$ tel que, si $\|(x,y)-(\cos t_0, \sin t_0)\|_2 \leqslant \eta$, alors

$$\left| \int_{t\in[0,2\pi]\setminus I_0^\delta} \mathrm{N}(x,y,t)\big(f(\cos t, \sin t) - f(\cos t_0, \sin t_0)\big)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

III.A.3) Prouver que u est une application continue en tout point de $C(0,1)$. Qu'en conclut-on pour l'application u ?

III.B – Dans cette sous-partie, on suppose que f est l'application nulle sur $C(0,1)$ et que u est un élément de $\mathcal{D}_f$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'application

$$u_n : \left| \begin{array}{ccc} \bar{D}(0,1) & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & u(x,y) + \frac{1}{n}(x^2+y^2) \end{array} \right.$$

III.B.1) Supposons que u_n admette un maximum local en $(\tilde{x},\tilde{y}) \in D(0,1)$.

a) En s'intéressant au comportement de la fonction $x \mapsto u_n(x,\tilde{y})$ montrer que, dans ce cas, $\partial_{11}u_n(\tilde{x},\tilde{y}) \leqslant 0$.

De même, on peut montrer que $\partial_{22}u_n(\tilde{x},\tilde{y}) \leqslant 0$. *Ainsi* $\Delta u_n(\tilde{x},\tilde{y}) \leqslant 0$. *Ce résultat est admis pour la suite.*

b) En déduire que u_n n'admet pas de maximum local sur $D(0,1)$.

III.B.2) En déduire que, pour tout $(x,y) \in D(0,1)$, $u_n(x,y) \leqslant 1/n$.

III.B.3) Montrer que u est identiquement nulle sur $\bar{D}(0,1)$.

III.C – Prouver que, pour toute application continue $f : C(0,1) \to \mathbb{R}$, l'ensemble $\mathcal{D}_f$ admet exactement un élément.

IV Retour sur les polynômes harmoniques

IV.A – Dans cette question, m est un entier supérieur ou égal à 2. On considère un polynôme $P \in \mathcal{P}_m$ et on note P_C la restriction de P au cercle $C(0,1)$.

IV.A.1) Montrer que l'application

$$\phi_{m-2} : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}_{m-2} & \to & \mathcal{P} \\ Q & \mapsto & \Delta\tilde{Q} \end{array} \right. \qquad \text{où} \qquad \tilde{Q}(x,y) = (1-x^2-y^2)Q(x,y)$$

est linéaire et injective et que $\operatorname{Im}\phi_{m-2} \subset \mathcal{P}_{m-2}$.

IV.A.2) En déduire qu'il existe un polynôme $T \in \mathcal{P}_{m-2}$ tel que $P+(1-x^2-y^2)T$ soit un polynôme harmonique.

IV.A.3) Montrer que l'unique élément de l'ensemble $\mathcal{D}_{P_C}$ est la restriction à $\bar{D}(0,1)$ d'un polynôme de degré inférieur ou égal à m.

IV.A.4) Expliciter l'ensemble $\mathcal{D}_{P_C}$ quand le polynôme P est défini par $P(x,y) = x^3$.

IV.B –

IV.B.1) Soit $P \in \mathcal{P}$. Montrer que P se décompose de manière unique sous la forme :

$$P(x,y) = H(x,y) + (1-x^2-y^2)Q(x,y)$$

où H est un polynôme harmonique et $Q \in \mathcal{P}$.

IV.B.2) Soit $m \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{H}_m$ le sous-espace vectoriel des polynômes harmoniques de degré inférieur ou égal à m. Déterminer la dimension de $\mathcal{H}_m$.

IV.B.3) Déterminer explicitement une base de $\mathcal{H}_3$.

IV.C – Dans cette dernière sous-partie, on se place sur $\mathbb{R}^n$ pour un entier naturel $n \geqslant 3$ et on reprend les notations précédentes, en adaptant les outils au contexte de $\mathbb{R}^n$; en particulier on considère maintenant les applications polynomiales à n variables. On admet que le problème de Dirichlet sur la boule unité de $\mathbb{R}^n$, associé à une fonction continue et définie sur la sphère unité (notée $S_n(0,1)$) $f : S_n(0,1) \to \mathbb{R}$, admet encore une unique solution.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

IV.C.1) Montrer que l'ensemble

$$\{(i_1, i_2, ..., i_n) \in \mathbb{N}^n \mid i_1 + i_2 + \cdots + i_n = m\}$$

a pour cardinal $\displaystyle\binom{n+m-1}{m}$. En déduire la dimension de $\mathcal{P}_m$.

IV.C.2) Déterminer la dimension de $\mathcal{H}_m$ en fonction de m et de n.

• • • FIN • • •