

Centrale-Supélec 2020¹

PC - Mathématiques 2

I Fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle

I.A Premières propriétés

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. La variable aléatoire $e^{iXt} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est bornée (par 1) donc elle admet une espérance et $\phi_X(t)$ est bien défini. On a $\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{iXt}] = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x)e^{ixt}$ par la formule de transfert. D'où $\phi_X(t) = \sum_1^r a_k e^{ix_k t}$ par définition des a_k .

$$\text{Pour tout } t \in \mathbb{R}, \phi_X(t) = \sum_1^r a_k e^{ix_k t}.$$

2. La fonction ϕ_X est bien définie sur $\mathbb{R}$ pour la même raison que précédemment. La formule de transfert (cas dénombrable) donne le résultat.

$$\text{Pour tout } t \in \mathbb{R}, \phi_X(t) = \sum_0^{+\infty} a_n e^{ix_n t}.$$

Oui, cette question est la même que la précédente...

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, définissons la fonction $u_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ par $u_n(t) = a_n e^{ix_n t}$. Les fonctions u_n sont continues sur $\mathbb{R}$ et de plus, $\phi_X = \sum_0^\infty u_n$. Pour montrer que ϕ_X est continue il suffit de montrer que la convergence est uniforme. Montrons qu'elle est même normale. On a que $\|u_n\|_\infty = a_n = \mathbb{P}(X = x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or, la famille d'événements $(\{X = x_n\})_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements donc la série $\sum \mathbb{P}(X = n)$ est convergente d'où $\sum_0^\infty \|u_n\|_\infty < +\infty$ ce qui montre que la série $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément. La fonction ϕ_X est donc continue comme limite uniforme de fonctions continues.

ϕ_X est continue.

Une preuve à base de continuité sous le signe intégrale (une somme n'est rien d'autre qu'une intégrale discrète) fonctionne aussi.

4. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $e^{iYt} = e^{ibt} e^{iaXt}$ donc par linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}[e^{iYt}] = e^{ibt} \mathbb{E}[e^{iX(at)}]$ c'est-à-dire $\phi_Y(t) = e^{ibt} \phi_X(at)$.

$$\text{Pour tout } t \in \mathbb{R}, \phi_Y(t) = e^{ibt} \phi_X(at).$$

5. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $\phi_X(-t) = \mathbb{E}[e^{-iXt}] = \overline{\mathbb{E}[e^{iXt}]} = \overline{\phi_X(t)}$ car l'espérance et la conjugaison commutent par définition de l'espérance d'une variable complexe. On en déduit $\phi_X(-t) = \phi_X(t)$ si et seulement si $\phi_X(t)$ est réel.

$$\text{Pour tout } t \in \mathbb{R}, \phi_X(-t) = \overline{\phi_X(t)} \text{ et } \phi_X \text{ est paire ssi } \phi_X(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}.$$

1. Vous pouvez envoyer vos remarques ainsi que les irréductibles erreurs et fautes de frappes qui se seront glissées dans ce document à l'adresse suivante pierre-amaury.monard@laposte.net. L'auteur vous en sera reconnaissant.

I.B Trois exemples

6. Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p alors $\phi_X(t) = q.e^{it0} + pe^{it1}$. Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables indépendantes alors $\mathbb{E}[e^{i(X_1+\dots+X_n)t}] = \mathbb{E}[e^{iX_1t}] \dots \mathbb{E}[e^{iX_nt}]$ i.e $\phi_{X_1+\dots+X_n}(t) = \phi_{X_1}(t) \dots \phi_{X_n}(t)$. Considérons $X_1, \dots, X_n$ des Bernoulli de paramètre p indépendantes et $X = X_1 + \dots + X_n$. Alors X suit une loi binomiale de paramètre (n, p) et $\phi_X(t) = (q + pe^{it})^n$.

$$\text{Si } X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p) \text{ alors } \phi_X(t) = (q + pe^{it})^n.$$

7. Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ alors $\phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} q^{n-1} pe^{int} = pe^{it} \sum_{n=0}^{+\infty} (qe^{it})^n = \frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$ car $|qe^{it}| < 1$.

$$\text{Si } X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \text{ alors } \phi_X(t) = \frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}.$$

8. Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ alors $\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} . e^{ikt} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}}$.

$$\text{Si } X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda), \phi_X(t) = e^{-\lambda(1-e^{it})}.$$

I.C Image de ϕ_X

9. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $|\mathbb{E}[e^{iXt}]| \leq \underbrace{\mathbb{E}[|e^{iXt}|]}_{=1} = 1$.

$$\text{Pour tout } t \in \mathbb{R}, |\phi_X(t)| \leq 1.$$

10. Soit $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $X = a + \frac{2\pi}{t_0} Y$. Alors Y est à valeur dans $\mathbb{Z}$. De plus, $\phi_X(t_0) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(Y = k) e^{i(a + \frac{2\pi}{t_0} k)t_0} = e^{iat_0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(Z = k) e^{i2\pi k} = e^{iat_0} \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(Y \in \mathbb{Z})}_{=1}$. D'où $|\phi_X(t_0)| = |e^{iat_0}| = 1$.

$$\text{Si } X(\Omega) \subset a + \frac{2\pi}{t_0} \mathbb{Z} \text{ alors } |\phi_X(t_0)| = 1.$$

11. Puisque $|\phi_X(t_0)| = 1$, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $\phi_X(t_0) = e^{ib}$. En posant $a := b/t_0$ on obtient $\phi_X(t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{ix_n t_0} = e^{iat_0}$.

$$\text{Il existe } a \in \mathbb{R} \text{ tel que } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp(it_0(x_n - a)) = 1.$$

12. En se souvenant que $1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ on obtient $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (1 - \exp(it_0(x_n - a))) = 0$. On obtient le résultat souhaité en prenant la partie réelle.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (1 - \cos(t_0(x_n - a))) = 0.$$

13. Puisque la fonction cosinus est bornée par 1, tous les termes de la somme ci-dessus sont positifs. Or une somme (finie ou infinie) de réels positifs est nulle si et seulement si tous les termes de la somme sont tous nuls. D'où, $a_n (1 - \cos(t_0(x_n - a))) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $a_n \neq 0$ alors $\cos(t_0(x_n - a)) = 1$ i.e $t_0(x_n - a) \in 2\pi\mathbb{Z}$ et $x_n \in a + \frac{2\pi}{t_0} \mathbb{Z}$ car $t_0 \neq 0$.

$$\text{Pour tout } n \text{ tel que } a_n \neq 0, x_n \in a + \frac{2\pi}{t_0} \mathbb{Z}.$$

14. Posons $A = \mathbb{R} \setminus a + \frac{2\pi}{t_0} \mathbb{Z}$. Alors $A = \{x_n \in X(\Omega) : a_n = 0\}$ et $\mathbb{P}(X \notin a + \frac{2\pi}{t_0} \mathbb{Z}) = \mathbb{P}(X \in A) = \sum_{n, a_n=0} a_n = 0$ ce qui prouve bien que $X \in a + \frac{2\pi}{t_0} \mathbb{Z}$ presque sûrement.

$$\mathbb{P}(X \in a + \frac{2\pi}{t_0} \mathbb{Z}) = 1.$$

II. Fonction caractéristique et loi d'une variable aléatoire

II.A Première méthode

La fonction $\phi_X e^{-im}$ est bien intégrable puisque continue.

15. Puisque $X(\Omega)$ est fini, ϕ_X est définie par une somme finie et on peut échanger somme et intégrale par linéarité de l'intégrale. Pour $T > 0$, $2TV_m(T) = \sum_1^r a_k \int_{-T}^T e^{ix_k t} e^{-imt} dt$. De plus, $\int_{-T}^T e^{ix_k t} e^{-imt} dt = \left[\frac{e^{it(x_k-m)}}{i(x_k-m)} \right]_{-T}^T = \frac{e^{iT(x_k-m)} - e^{-iT(x_k-m)}}{i(x_k-m)} = \frac{2i \sin(T(x_k-m))}{i(x_k-m)} = 2T \operatorname{sinc}(T(x_k-m))$ si $x_k - m \neq 0$. Si $x_k - m = 0$ alors $\int_{-T}^T e^{ix_k t} e^{-imt} dt = \int_{-T}^T 1 dt = 2T = 2T \operatorname{sinc}(T(x_k-m))$. D'où $2TV_m(T) = \sum_1^r a_n 2T \operatorname{sinc}(T(x_k-m))$.

$$\text{Pour } T > 0, V_m(T) = \sum_1^r \operatorname{sinc}(T(x_k - m)) \mathbb{P}(X = x_k).$$

16. Quitte à rajouter $x_{r+1} = 0$ à $X(\Omega)$ avec $a_{r+1} = 0$ on peut supposer que X prend la valeur 0 (éventuellement sur un ensemble négligeable). Pour $x \neq 0$, $|\operatorname{sinc}(x)| \leq \frac{1}{|x|}$ donc $\operatorname{sinc}(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \pm \infty$. Si $x_k \neq m$ alors $\operatorname{sinc}(T(x_k - m)) \rightarrow 0$ quand $T \rightarrow +\infty$. Si $x_k - m = 0$ alors $\operatorname{sinc}(T(x_k - m)) = 1$. Par passage à la limite quand T tend vers $+\infty$, il ne reste que $\mathbb{P}(X = m)$.

$$V_m(T) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X = m).$$

L'opérateur V_m « filtre » les composantes de X pour ne garder que celle selon m .

17. Soit $T > 0$. On a $2TV_m(T) = \int_{-T}^T \left(\sum_0^{+\infty} a_n e^{ix_n t} \right) e^{-imt} dt$. D'après le théorème d'échange $\sum - \int$, il suffit de vérifier que $\sum_0^{+\infty} \int |u_n| < +\infty$ où $u_n : [-T, T] \rightarrow \mathbb{C}$ est définie par $u_n(t) = a_n e^{i(x_n-m)t}$ pour pouvoir échanger la somme et l'intégrale. On a $|u_n| = a_n$ donc $\int_{-T}^T |u_n| = 2Ta_n$ et $\sum_0^{+\infty} \int |u_n| = 2T < +\infty$. Donc $2TV_m(T) = \sum_0^{+\infty} \int_{-T}^T a_n e^{it(x_n-m)} dt = \sum_0^{+\infty} 2T \operatorname{sinc}(T(x_n - m))$ d'après les calculs effectués à la question précédente.

$$\text{Pour tout } T > 0, V_m(T) = \sum_0^{+\infty} g_n\left(\frac{1}{T}\right).$$

18. La fonction g_n est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient et composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}_+^*$. Reste à montrer que g_n admet une limite en 0. Si $x_n - m = 0$ alors la fonction g_n est constante égale à a_n sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc se prolonge par continuité en 0 en posant $g_n(0) = a_n = \mathbb{P}(X = m)$. Si $x_n - m \neq 0$ alors $\frac{x_n-m}{T}$ vers $\pm\infty$ selon le signe de $x_n - m$ et g_n se prolonge par continuité en 0 en posant $g_n(0) = 0$ puisque la fonction sinus cardinal admet 0 comme limite en $\pm\infty$.

$$\text{La fonction } g_n \text{ se prolonge par continuité sur } \mathbb{R}_+.$$

19. De la majoration $|\operatorname{sinc}(x)| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ on tire que $\|g_n\|_\infty \leq a_n$ et donc $\|\tilde{g}_n\|_\infty \leq a_n$ par continuité de $\tilde{g}_n$ en 0. Comme $\sum a_n$ converge, la série $\sum \tilde{g}_n$ est normalement convergente. La fonction $G := \sum_0^{+\infty} \tilde{g}_n$ est ainsi bien définie. Puisque la convergence est même uniforme, G est continue comme limite uniforme de fonctions continues.

$$\text{La fonction } G = \sum_0^{+\infty} \tilde{g}_n \text{ est bien définie et continue sur } \mathbb{R}_+.$$

20. Par définition de G , $V_m(T) = G\left(\frac{1}{T}\right)$ donc $V_m(T) \rightarrow G(0)$ quand $T \rightarrow +\infty$ par continuité de G en 0. De plus, $G(0) = \sum \tilde{g}_n(0) = \sum_0^{+\infty} a_n \delta_{x_n-m,0} = \mathbb{P}(X = m)$ au vu de la façon dont on a prolongé g_n en 0.

$$V_m(T) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X = m).$$

21. Soit $m \in \mathbb{R}$. Notons V_m^X (resp. V_m^Y) la fonction V_m associée à la variable X (resp. Y). Soit $T > 0$. On a $V_m^X(T) = V_m^Y(T)$ puisque $\phi_X = \phi_Y$. Par passage à la limite quand T tend vers $+\infty$: $\mathbb{P}(X = m) = \mathbb{P}(Y = m)$. Les variables $X = Y$ ont la même loi.

$$\text{La fonction caractéristique caractérise la loi.}$$

II.B Seconde² méthode

22. Soit $t \in \mathbb{R}$. On dispose de la suite d'égalité suivante.

$$\begin{aligned} K_{a,b}(t) &= \frac{e^{ibt} - e^{iat}}{2it} \\ &= \frac{(\sum_0^{+\infty} \frac{(ibt)^n}{n!} - \sum_0^{+\infty} \frac{(iat)^n}{n!})}{2it} \\ &= \sum_1^{+\infty} \frac{i^n(b^n - a^n)}{2i} t^{n-1} \\ &= \sum_0^{+\infty} c_n t^n \end{aligned}$$

où l'on a posé $c_n := \frac{i^{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1})}{2i}$. Comme $c_0 = \frac{b-a}{2}$, cette dernière égalité est vraie aussi pour $t = 0$. Donc $K_{a,b}(t) = \sum_0^{+\infty} c_n t^n$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ ce qui fait de $K_{a,b}$ une série entière de rayon de convergence infinie donc une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction $K_{a,b}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

23. Utilisons le théorème de dérivation sous le signe intégrale. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $K_{a,x}$ est continue sur $[-N, N]$ donc $\int_{-N}^N K_{a,x}$ est bien définie. Définissons $h : [-N, N] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ par $h(t, x) = K_{a,x}(t)$. On sait déjà que la fonction $F_N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $F_N(x) = \int_{-N}^N h(t, x) dt$ est bien définie. De plus la fonction $h : (t, x) \mapsto \frac{e^{ixt} - e^{iat}}{2it}$ est dérivable par rapport à x (y compris si $t = 0$) de dérivée $\frac{\partial h}{\partial x}(t, x) = \frac{ite^{ixt}}{2it}$. Alors $|\frac{\partial h}{\partial x}| \leq \frac{1}{2}$ et la fonction constante $\frac{1}{2}$ est intégrable sur le compact $[-N, N]$. Le théorème de dérivation sous le signe intégrale prouve que la fonction de F_N est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $F'_N(x) = \int_{-N}^N \frac{\partial h}{\partial x} = \int_{-N}^N \frac{e^{ixt}}{2} dt = \left[\frac{e^{ixt}}{2ix} \right]_{-N}^N = \frac{2i \sin(Nx)}{x} = N \operatorname{sinc}(Nx)$ si $x \neq 0$. Si $x = 0$ alors $\int_{-N}^N \frac{1}{2} = N = N \operatorname{sinc}(0)$.

La fonction F_N est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ de dérivée $F'_N(x) = N \operatorname{sinc}(Nx)$.

24. Posons $I := \int_{-N}^N K_{a,b}(t) dt$. Alors $I = F_N(b) = F_N(a) + \int_a^b F'_N$. Or $K_{a,a} = 0$ donc $F_N(a) = \int_{-N}^N K_{a,a} = 0$. D'où $I = \int_a^b N \operatorname{sinc}(Nx) dx = \int_{Na}^{Nb} \operatorname{sinc}(s) ds$ après le changement de variable $s = Nx$ qui est réalise une bijection de $[a, b]$ sur $[Na, Nb]$.

$$\int_{-N}^N K_{a,b}(t) dt = \int_{Na}^{Nb} \operatorname{sinc}(s) ds.$$

25. Soit $0 < \epsilon < M$. Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto 1 - \cos(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\epsilon, M]$ donc, par intégration par partie : $\int_\epsilon^M \frac{\sin(x)}{x} dx = \left[\frac{1 - \cos(x)}{x} \right]_\epsilon^M + \int_\epsilon^M \frac{1 - \cos(x)}{x^2} dx$. Puisque $1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$ en 0 et $\left| \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \right| \leq \frac{2}{|x|}$, le terme crochet admet une limite nulle quand $\epsilon \rightarrow 0$ et $M \rightarrow +\infty$. Par ailleurs, la fonction $x \mapsto \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, prolongeable par continuité en 0 et est un $O(\frac{1}{x^2})$ au voisinage de $+\infty$ donc est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, l'intégrale $\int_\epsilon^M \frac{1 - \cos(x)}{x^2} dx$ admet une limite finie quand $\epsilon \rightarrow 0$ et $M \rightarrow +\infty$.

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \operatorname{sinc}$ est convergente.

2. Une deuxième méthode impliquerait l'existence d'une troisième méthode.

26. La fonction sinus cardinal étant paire, l'intégrale $\int_{-\infty}^0 \text{sinc}$ est convergente de valeur $\frac{\pi}{2}$. Posons $I_N = \int_{-N}^N K_{a,b}$.

Si $0 < a < b$ alors $I_N = \int_0^{Nb} \text{sinc} - \int_0^{Na} \text{sinc} \rightarrow \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$.

De même si $a < b < 0$.

Si $a < 0 < b$ alors $I_N \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc} = \pi$.

Si $0 = a < b$ alors $I_N = \int_0^{Nb} \text{sinc} \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

Si $a < b = 0$ alors $I_N = \int_{Na}^0 \text{sinc} \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

$$\int_{-N}^N K_{a,b} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \begin{cases} \pi & \text{si } ab < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } ab = 0 \\ 0 & \text{si } ab > 0 \end{cases}.$$

27. Soient $a < b$. On a $\frac{1}{\pi} \int_{-N}^N \phi_X(-t) K_{a,b}(t) dt = \sum_1^r a_k (\frac{1}{\pi} \int_{-N}^N K_{a-x_k, b-x_k}(t) dt)$. Puisque a et b ne sont pas dans le support de X , les termes intégrales ne peuvent tendre que vers 0 ou π selon que $a - x_k < 0 < b - x_k$ ou non. Si ce n'est pas le cas la limite est nulle. On ne garde donc que les indices k pour lesquels $a < x_k < b$. Ainsi, $\frac{1}{\pi} \int_{-N}^N \phi_X(-t) K_{a,b}(t) dt$ tend vers $\sum_{k, a < x_k < b} a_k \frac{\pi}{\pi} = \mathbb{P}(a < X < b)$.

Pour $a < b$ qui ne sont pas dans $X(\Omega)$, $\int_{-N}^N \phi_X(-t) K_{a,b}(t) dt$ tend vers $\mathbb{P}(a < X < b)$.

III. Régularité de ϕ_X

28. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $|x| \leq 1$ alors $|x|^j \leq 1$. Si $|x| > 1$ alors $|x|^j \leq |x|^k$. Donc $|x|^j \leq 1 + |x|^k$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x|^j \leq 1 + |x|^k$.

Ainsi, $|X|^j \leq 1 + |X|^k$ et $\mathbb{E}[|X|^j] \leq 1 + \mathbb{E}[|X|^k] < \infty$ et X^j admet une espérance.

Si X^k admet une espérance, alors X^j admet une espérance pour tout $1 \leq j \leq k$.

29. C'est le théorème de dérivation terme à terme. Posons $u_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ par $u_n(t) = a_n e^{ix_n t}$. Les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ de dérivées $u_n^{(j)}(t) = a_n (ix_n)^j e^{ix_n t}$. De plus, $\phi_X = \sum_0^{+\infty} u_n$ et $\left\| u_n^{(j)} \right\|_\infty \leq a_n |x_n|^j$ qui est le terme général d'une série absolument convergente pour tout $j \leq k$. Donc la série $\sum u_n^{(j)}$ converge uniformément pour tout $j \leq k$. Ainsi, la fonction ϕ_X est de classe $\mathcal{C}^k$ et $\phi_X^{(j)} = \sum_0^{+\infty} u_n^{(j)} = \sum_0^{+\infty} a_n (ix_n)^j e^{ix_n t} = \mathbb{E}[(iX)^j e^{iXt}]$ pour tout $j \leq k$ d'après le théorème de dérivation terme à terme.

ϕ_X est de classe $\mathcal{C}^k$ et $\phi_X^{(k)}(t) = \mathbb{E}[(iX)^k e^{iXt}]$.

30. D'après la question précédente, $\phi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}[X^k]$.

$\mathbb{E}[X^k] = (-i)^k \phi_X^{(k)}(0)$.

31. Puisque ϕ_X est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, ϕ_X admet un développement de Taylor d'ordre 2 en 0. Ainsi, $\phi_X(2h) = \phi_X(0) + \phi_X'(0)2h + \phi_X''(0)\frac{(2h)^2}{2} + o(h^2)$ et $\phi_X(-2h) = \phi_X(0) - \phi_X'(0)2h + \phi_X''(0)\frac{(-2h)^2}{2} + o(h^2)$. D'où $2\phi_X(0) - \phi_X(2h) - \phi_X(-2h) = -4h^2 \phi_X''(0) + o(h^2)$ et $f(h) = -\phi_X''(0) + o(1)$ en 0.

$\lim_{h \rightarrow 0} f(h) = -\phi_X''(0)$.

32. Soit $h > 0$. On a

$$\begin{aligned} 2\phi_X(0) - \phi_X(2h) - \phi_X(-2h) &= \sum_0^{+\infty} a_n (2 - e^{2ihx_n} - e^{-2ihx_n}) \\ &= \sum_0^{+\infty} a_n (2 - 2\cos(2hx_n)) \\ &= \sum_0^{+\infty} a_n 4\sin^2(hx_n) \end{aligned}$$

d'où

$$f(h) = \sum_0^{+\infty} a_n \frac{\sin^2(hx_n)}{h^2}.$$

Pour tout $h > 0$, $f(h) = \sum_0^{+\infty} a_n \frac{\sin^2(hx_n)}{h^2}$.

33. Soit N un entier naturel et $h > 0$. On dispose de l'inégalité $\sum_0^N a_n x_n^2 \text{sinc}^2(hx_n) \leq \sum_0^{+\infty} a_n x_n^2 \text{sinc}^2(hx_n) = f(h)$. En effet, $\frac{\sin(hx_n)}{h} = x_n \text{sinc}(hx_n)$ que x_n soit nul ou non. Par passage à la limite quand $h \rightarrow 0^+$ on obtient $\sum_0^N a_n x_n^2 \leq -\phi_X''(0)$. Ceci étant vrai pour tout entier N , on obtient par passage à la limite quand N tend vers $+\infty$: $\sum_0^{+\infty} a_n x_n^2 \leq -\phi_X''(0) < +\infty$ ce qui prouve que X admet un moment d'ordre 2.

X admet un moment d'ordre 2.

34. Si $\alpha = \sum_0^{+\infty} \underbrace{a_n x_n^{2k}}_{\geq 0} = 0$ alors $a_n x_n^{2k} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $a_n = 0$ dès que $x_n \neq 0$ i.e X est nulle presque sûrement.

Si $\alpha = 0$ alors $X = 0$ ps.

35. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $\phi_Y(t) = \sum_0^{+\infty} \frac{a_n x_n^{2k}}{\alpha} e^{ix_n t}$. Puisque ϕ_X est de classe $\mathcal{C}^{2k+2}$, ϕ_X est en particulier de classe $\mathcal{C}^{2k}$ et d'après la question 29, $\phi_X^{(2k)}(t) = \sum_0^{+\infty} a_n (ix_n)^{2k} e^{ix_n t}$. D'où $\phi_Y = \frac{(-i)^{2k}}{\alpha} \phi_X^{(2k)}$ et ϕ_Y est de classe $\mathcal{C}^2$.

ϕ_Y est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

36. Si $\alpha = 0$ alors $X = 0$ presque sûrement et X admet un moment d'ordre $2k + 2$. Si $\alpha > 0$ alors d'après la partie III.B la variable aléatoire Y est bien définie et admet un moment d'ordre 2. La série $\sum \mathbb{P}(Y = x_n) x_n^2$ est donc convergente. Or $\mathbb{P}(Y = x_n) x_n^2 = \frac{1}{\alpha} a_n x_n^{2k+2}$. Donc la série $\sum a_n x_n^{2k+2}$ converge. Donc X admet un moment d'ordre $2k + 2$.

X admet un moment d'ordre $2k + 2$.

37. Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que si ϕ_X est de classe $\mathcal{C}^{2k}$ alors X admet un moment d'ordre $2k$. Le cas $k = 1$ a été traité dans la partie III.B. Soit donc $k \in \mathbb{N}^*$ tel que la résultat soit vrai. Supposons que ϕ_X soit de classe $\mathcal{C}^{2k+2}$. Alors X admet un moment d'ordre $2k$ par hypothèse de récurrence. D'après la question précédente, X admet un moment ordre $2k + 2$ ce qui conclut la récurrence.

Pour tout $k \geq 1$, si ϕ_X est de classe $\mathcal{C}^{2k}$ alors X admet un moment d'ordre $2k$.

IV. Développement en série entière de ϕ_X

38. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $\phi_X(t) = \sum_1^r a_k e^{ix_k t} = \sum_1^r a_k \left(\sum_0^{+\infty} \frac{(ix_k t)^n}{n!} \right) = \sum_0^{+\infty} \left(\frac{1}{n!} \sum_1^r a_k (ix_k)^n \right) t^n$. D'où $\phi_X(t) = \sum_0^{+\infty} d_n t^n$ où l'on a posé $d_n = \frac{1}{n!} \mathbb{E}[(iX)^n]$. Ceci est vrai pour tout $t \in \mathbb{R}$ donc ϕ_X est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

$$\phi_X \text{ est développable en série entière sur } \mathbb{R} \text{ et } \phi_X(t) = \sum_0^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!} \mathbb{E}[X^n].$$

39. La fonction $y \mapsto e^{iy}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc la formule de Taylor avec reste intégral en 0 donne : $e^{iy} = \sum_0^n \frac{i^k}{k!} y^k + \int_0^y \frac{i^{n+1} e^{it}}{n!} (y-t)^n dt$. D'où $\left| e^{iy} - \sum_0^n \frac{(iy)^k}{k!} \right| \leq \int_0^{|y|} \frac{|y-t|}{n!} dt = \frac{|y|^{n+1}}{(n+1)!}$.

$$\text{Pour tout } y \in \mathbb{R}, \left| e^{iy} - \sum_0^n \frac{(iy)^k}{k!} \right| \leq \frac{|y|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

40. Par hypothèse, il existe $M > 0$ tel que $\mathbb{E}[|X|^n] \leq M \left(\frac{n}{R}\right)^n$. Soit $|t| \leq \frac{R}{e}$. Posons $S_n(t) := \sum_0^n \frac{(it)^k}{k!} \mathbb{E}[X^k]$ qui est bien définie puisque X admet des moments de tout ordre par hypothèse. Alors, $|\phi_X(t) - S_n(t)| \leq \mathbb{E} \left[\left| e^{iXt} - \sum_0^n \frac{(iXt)^k}{k!} \right| \right] \leq \mathbb{E} \left[\frac{|iXt|^{n+1}}{(n+1)!} \right] \leq \frac{M \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}}{(n+1)!} \sim \frac{M}{\sqrt{2\pi n}} \rightarrow 0$. Ainsi, la série $S_n(t)$ admet une limite quand n tend vers $+\infty$ et celle-ci vaut $\phi_X(t)$.

$$\text{Pour tout } |t| \leq \frac{R}{e}, \phi_X(t) = \sum_0^{+\infty} \frac{(it)^k}{k!} \mathbb{E}[X^k].$$

*** FIN ***
