

I Étude d'une suite récurrente

$f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ de classe C^2 telle que f et f' sont croissantes et $f(1) = 1$ et $f'(0) < 1$ et $f''(1) > 0$.
 $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} = f(u_n)$. On pose enfin : $m = f'(1)$.

I.A.1) f est croissante, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone, et puisque $u_0 \leq u_1$ alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, de plus elle est majorée par 1, alors elle converge. On note l sa limite.

I.A.2) L'application $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - x$ est continue avec $g(1) = 0$.
 g étant continue sur $[0, 1]$, alors $\{x \in [0, 1] ; f(x) = x\} = g^{-1}(\{0\})$ est un fermé non vide du compact $[0, 1]$, c'est donc un compact non vide de $\mathbb{R}$, donc admet un plus petit élément x_f .

I.A.3) On a $u_0 \leq x_f$, par récurrence, et puisque f est croissante et $f(x_f) = x_f ; \forall n \in \mathbb{N} ; u_n \leq x_f$.
 Par conséquent $l \leq x_f$. mais l est un point fixe de f et x_f est le plus petit point fixe de f . D'où $l = x_f$.

I.B) On suppose que $m > 1$, montrons que $x_f < 1$. Par absurde supposons que $x_f = 1$.
 Alors $f(0) > 0$ et $f(1) = 1$ et $\forall x \in]0, 1[; f(x) \neq x$, alors par continuité de $g, \forall x \in [0, 1[; f(x) > x$.
 g est de classe C^2 sur $[0, 1]$, et f' est continue croissante sur $[0, 1]$, telle que $f'(0) < 1$ et $f'(1) > 1$.
 Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\theta \in]0, 1[$, tel que : $f'(\theta) = 1$.

$g'(x) = f'(x) - 1$ est $\begin{cases} \geq 0 & \text{si } x \in [\theta, 1] \\ \leq & \text{si } x \in [0, \theta] \end{cases}$ alors : $g(\theta) \leq g(1) = 0$, donc $f(\theta) \leq \theta$ ce qui est absurde.

I.C) On suppose ici que $m \leq 1$. Supposons par absurde que $x_f < 1$.
 D'après le théorème de Rolle, il existe $\theta \in]x_f, 1[$ tel que $g'(\theta) = 0$, c'est à dire $f'(\theta) = 1$.
 mais f' est positive croissante, alors $m = 1$ et f' constante sur $[\theta, 1]$, ceci est absurde, car $f''(1) > 0$.
 D'où $x_f = 1$. et par conséquent : $\forall x \in [0, 1[; f(x) > x$ et $f(x) \neq 1$ puisque si $f(x) = 1$ on aura f croissante et constante sur $[x, 1]$ ce qui contredit le fait que $f'(1) < 0$.
 $u_0 < 1$, par récurrence alors si $u_n < 1$, alors $u_{n+1} = f(u_n) < 1$. D'où : $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n \neq 1$.

I.D) Dans cette question, on suppose que $m = 1$.

I.D.1) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, \varepsilon_n = 1 - u_n$. D'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N} ; \varepsilon_n > 0$.

$$-\varepsilon_{n+1} = f(u_n) - f(1) = f'(1)(u_n - 1) + \frac{f''(1)}{2}(u_n - 1)^2 + o((u_n - 1)^2)$$

c'est à dire : $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n - \frac{f''(1)}{2}\varepsilon_n^2 + o(\varepsilon_n^2)$.

$$\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} - \frac{1}{\varepsilon_n} = \frac{1}{\varepsilon_n - \frac{f''(1)}{2}\varepsilon_n^2 + o(\varepsilon_n^2)} - \frac{1}{\varepsilon_n} = \frac{1}{\varepsilon_n} \left(\frac{1}{1 - \frac{f''(1)}{2}\varepsilon_n + o(\varepsilon_n)} - 1 \right) = \frac{f''(1)}{2} + o(1). \text{ D'où } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} - \frac{1}{\varepsilon_n} \right) = \frac{f''(1)}{2}.$$

I.D.2) D'après le lemme de Cesaro appliqué à la suite de la question précédente :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{0 \leq k \leq n-1} \left(\frac{1}{\varepsilon_{k+1}} - \frac{1}{\varepsilon_k} \right) = \frac{f''(1)}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\varepsilon_n} \neq 0, \text{ alors } \varepsilon_n \sim \frac{2}{nf''(1)}.$$

I.E) Dans cette question, on suppose que $m < 1$. D'après **I.C)** $\forall n \in \mathbb{N} ; \varepsilon_n > 0$.

I.E.1) $-\varepsilon_{n+1} = f(u_n) - f(1) = f'(1)(u_n - 1) + o(u_n - 1)$ ou encore : $\varepsilon_{n+1} = m\varepsilon_n + o(\varepsilon_n)$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = m \in [0, 1[, \text{ alors d'après la règle de D'Alembert, la série de terme général } \varepsilon_n \text{ est}$$

absolument convergente. Poussons le développement à l'ordre 2 :

$$-\varepsilon_{n+1} = f(u_n) - f(1) = f'(1)(u_n - 1) + \frac{f''(1)}{2}(u_n - 1)^2 + o((u_n - 1)^2).$$

$$\text{c'est à dire : } \varepsilon_{n+1} = m\varepsilon_n - \frac{f''(1)}{2}\varepsilon_n^2 + o(\varepsilon_n^2) \text{ ou encore : } m^{-(n+1)}\varepsilon_{n+1} = m^{-n}\varepsilon_n - m^{-(n+1)}\frac{f''(1)}{2}\varepsilon_n^2 + o(m^{-(n+1)}\varepsilon_n^2)$$

$$\frac{m^{-(n+1)}\varepsilon_{n+1}}{m^{-n}\varepsilon_n} = 1 - \frac{f''(1)}{2m}\varepsilon_n + o(\varepsilon_n) \text{ donc } \ln\left(\frac{m^{-(n+1)}\varepsilon_{n+1}}{m^{-n}\varepsilon_n}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{f''(1)}{2m}\varepsilon_n \text{ et la série de terme général } -\frac{f''(1)}{2m}\varepsilon_n$$

est absolument convergente, alors la série de terme général $\ln\left(\frac{m^{-(n+1)}\varepsilon_{n+1}}{m^{-n}\varepsilon_n}\right)$ l'est aussi.

I.E.2) La série de terme général $\ln\left(\frac{m^{-(n+1)}\varepsilon_{n+1}}{m^{-n}\varepsilon_n}\right) = \ln(m^{-(n+1)}\varepsilon_{n+1}) - \ln(m^{-n}\varepsilon_n)$ converge, alors la suite de terme général $w_n = \ln(m^{-n}\varepsilon_n)$ converge vers un certain réel w , et la suite de terme général $m^{-n}\varepsilon_n$ converge vers $c = e^w > 0$. D'où l'existence d'un réel $c > 0$ tel que : $\varepsilon_n = 1 - u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} cm^n$.

II Formule de Wald

II.A.1) X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes.

$$\forall k \in \mathbb{N} ; P(X + Y = k) = \sum_{0 \leq j \leq k} P(X = j, Y = k - j) = \sum_{0 \leq j \leq k} P(X = j)P(Y = k - j).$$

La série entière G_{X+Y} est le produit de Cauchy des séries entières G_X et G_Y , alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

II.A.2) On fait une récurrence sur k , et on applique le résultat de la question précédente à S_k et X_{k+1} .

II.A.3) $S(w) = S_{T(w)}(w)$, T est indépendante des X_k donc indépendante de $S_n = \sum_{0 \leq k \leq n} X_k$.

$$\text{Soient } t \in [0, 1] \text{ et } K \in \mathbb{N}, G_S(t) = \sum_{k=0}^K P(S = k)t^k + \sum_{k=K+1}^{\infty} P(S = k)t^k.$$

$$(S = n) = \left(\sum_{0 \leq j \leq T} X_j = n \right) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (T = k, S_k = n) \text{ qui est une réunion d'événements deux à deux disjoints.}$$

$$P(S = n) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P(T = k, S_k = n) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P(T = k)P(S_k = n).$$

$$G_S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{N}} P(T = k)P(S_k = n)t^n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P(T = k)P(S_k = n)t^n$$

$$G_S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(T = k) \sum_{n=0}^{\infty} P(S_k = n)t^n = \sum_{k=0}^{\infty} P(T = k)G_{S_k}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(T = k)G_X^k(t) = G_T \circ G_X(t)$$

On va continuer à faire le calcul demandé dans l'énoncé, mais ici on a déjà obtenu le résultat voulu.

$$G_S(t) = \sum_{k=0}^K P(T = k)G_X^k(t) + \sum_{k=K+1}^{\infty} P(T = k)G_X^k(t).$$

$$G_S(t) = \sum_{k=0}^K P(T = k)G_X^k(t) + \sum_{k=K+1}^{\infty} P(T = k) \sum_{n=0}^{\infty} P(S_k = n)t^n$$

$$G_S(t) = \sum_{k=0}^K P(T = k)G_X^k(t) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=K+1}^{\infty} P(T = k)P(S_k = n)t^n \right).$$

II.A.4) $R_K = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=K+1}^{\infty} P(T=k)P(S_k=n)t^n \right)$ est une somme de nombres positifs, donc $0 \leq R_K$.

D'autre part : $R_K = \sum_{k=K+1}^{\infty} P(T=k) \left(\sum_{n=0}^{\infty} P(S_k=n)t^n \right)$, et $\sum_{n=0}^{\infty} P(S_k=n)t^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$.

D'où $0 \leq R_K \leq \frac{1}{1-t} \sum_{k=K+1}^{\infty} P(T=k)$.

II.A.5) $\sum_{k=K+1}^{\infty} P(T=k)$ est le reste d'une série convergente, donc tend vers 0, quand $K \rightarrow \infty$.

Alors $\lim_{K \rightarrow \infty} R_K = 0$. Alors d'après ce qui précède :

$$G_S(t) = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^K P(T=k)G_X^k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(T=k)G_X^k(t) = G_T \circ G_X(t). \text{ Finalement : } G_S = G_T \circ G_X.$$

II.B) On suppose ici que T et les X_n sont d'espérance finie. G_X et G_T sont de classe C^1 sur $[0, 1]$. Alors $G_S = G_T \circ G_X$ est aussi de classe C^1 sur $[0, 1]$, donc S admet une espérance finie, donnée par $E(S) = G'_S(1) = G'_T \circ G_X(1) = G'_T(1)G'_X(1) = E(T)E(X_1)$.

II.C.1) Si T suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, sa loi est donnée par : $P(T=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

Sa fonction génératrice est donnée par $G_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{(t-1)\lambda}$.

II.C.2) Soit T la variable aléatoire définie par : $T(w)$ est le nombre d'oeufs que produit l'insecte w .

On a alors : $\forall k \in \mathbb{N} ; P(T=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ et $\forall t \in \mathbb{R} ; G_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{(t-1)\lambda}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N} ; X_k(w) = \begin{cases} 1 & \text{si le } k^{\text{ème}} \text{ oeuf devient un nouvel insecte} \\ 0 & \text{si non} \end{cases} ; \begin{cases} P(X_k=1) = \alpha \\ P(X_k=0) = 1-\alpha \end{cases}$.

$\forall t \in \mathbb{R} ; G_{X_k}(t) = G_X(t) = 1 - \alpha + \alpha t$.

Soit S la variable aléatoire qui est le nombre d'insectes à l'issue de la ponte. $S(w) = \sum_{k=0}^{T(w)} X_k(w)$.

Les $(X_k ; k \in \mathbb{N})$, sont bien mutuellement indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, et T à valeurs dans $\mathbb{N}$

indépendante des $(X_k ; k \in \mathbb{N})$, alors d'après ce qui précède, $G_S = G_T \circ G_X$.

$\forall t \in \mathbb{R} ; G_S(t) = e^{\lambda \alpha (t-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda \alpha t)^k}{k!} e^{-\lambda \alpha}$, donc : $\forall k \in \mathbb{N} ; P(S=k) = \frac{(\lambda \alpha)^k}{k!} e^{-\lambda \alpha}$.

Finalement, S suit la loi de Poisson de paramètre $\alpha \lambda$.

III Processus de Galton-Watson

III.A) Probabilité d'extinction

III.A.1) $\forall n \in \mathbb{N}$, φ_{n+1} est la fonction génératrice de Y_{n+1} , On fixe alors n , on pose : $T = Y_n$ et $X_i = X_{n,i}$ et $S_{T(w)} = Y_{n+1}(w)$, on remarque alors que ces variables aléatoires vérifient les hypothèses de la partie II, alors : $G_S = G_T \circ G_X$, c'est à dire exactement : $\varphi_{n+1} = \varphi_n \circ f$.

III.A.2) D'après la question **II.B)** $E(Y_{n+1}) = E(Y_n)E(X)$ alors par récurrence sur n :
 $\forall n \in \mathbb{N} ; E(Y_n) = E(Y_0)(E(X))^n = m^n$.

III.A.3_a) $\forall n \in \mathbb{N} ; P(Y_n = 0) = \varphi_n(0)$ et $[Y_n(w) = 0 \Rightarrow \forall k \geq n ; Y_k(w) = 0]$.

$((Y_n = 0))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'évènements. L'évènement extinction est $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (Y_n = 0)$.

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (Y_n = 0)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_n = 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(0).$$

III.A.3_b) f est la fonction génératrice de la loi μ qui admet une espérance et une variance, alors f est de classe C^2 sur $[0, 1]$, les dérivées première et seconde de f sur $[0, 1]$ s'obtiennent en dérivant la série entière terme à terme, alors f' et f'' sont à valeurs positives.

$$f(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1 ; \quad E(X) = f'(1) = m ; \quad f'(0) = p_1 < 1$$

$$f''(1) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k > 0, \text{ car il existe } k \geq 2 \text{ tel que : } p_k > 0.$$

$$u_0 = \varphi_0(0) = 0, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} = f(u_n) = \varphi_{n+1}(0).$$

Alors la suite $(\varphi_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie les hypothèses de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la première partie.

III.A.4) Si $m \leq 1$, d'après la question **I.C)** $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(0) = 1$.

$$T(w) = \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N} ; Y_n(w) = 0\} & \text{s'il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } Y_n(w) = 0 \\ -1 & \text{si non} \end{cases}$$

III.B) Cas sous critique $m < 1$

III.B.1) Pour tout entier non nul k , $(T = k) \subset (Y_{k-1} \geq 1) \Rightarrow kP(T = k) \leq kP(Y_{k-1} \geq 1)$

Or Y_{k-1} est à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $E(Y_{k-1}) = m^{k-1} \geq 1 \times P(Y_{k-1} \geq 1)$.

Donc $0 \leq kP(T = k) \leq km^{k-1}$ et $m \in [0, 1[$ donc la série de terme général km^{k-1} converge, il en est de même de la série de terme général $kP(T = k)$. D'où T admet une espérance.

III.B.2_a) Y_n est à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $E(Y_n) = m^n \geq 1 \times P(Y_n \geq 1) = P(Y_n \geq 1)$

$$\text{III.B.2_b)} P(T > n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} P(T = k) \text{ et } \sum_{n=0}^N P(T > n) = \sum_{n=0}^N \sum_{k=n+1}^{\infty} P(T = k).$$

Il s'agit d'une famille sommable nombres positifs, alors :

$$\sum_{n=0}^N P(T > n) = \sum_{k=1}^N \sum_{n=0}^{k-1} P(T = k) + \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{n=0}^N P(T = k)$$

$$\sum_{n=0}^N P(T > n) = \sum_{k=1}^N kP(T = k) + \sum_{k=N+1}^{\infty} (N+1)P(T = k)$$

$$0 \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} (N+1)P(T=k) \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} kP(T=k) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0 \text{ (reste d'une série convergente)}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N P(T > n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N kP(T=k) = E(T). \text{ D'où } E(T) = \sum_{n=0}^{\infty} P(T > n).$$

III.B.2_c) $(T > n) \subset (Y_n \geq 1) \Rightarrow P(T > n) \leq P(Y_n \geq 1) \leq m^n$. (Question **III.B.2_a)**)

$$E(T) = \sum_{n=0}^{\infty} P(T > n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} m^n = \frac{1}{1-m}.$$

III.C) Dans cette question on suppose que $m \leq 1$.

On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $Z_n = 1 + \sum_{i=1}^n Y_i$ et $Z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n$.

On admettra que Z est une variable aléatoire définie sur $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (Y_k = 0)$.

III.C.1) La suite $((Y_k = 0))_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'évènements, alors :

$$P\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (Y_k = 0)\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} P(Y_k = 0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(0) = 1, \text{ d'après I.C)}$$

III.C.2_a) Soient $k \in \mathbb{N}$ et $n \geq k$, si $Z_n(w) = 1 + \sum_{i=1}^n Y_i(w) \leq k$, alors l'un des $Y_i(w)$ pour $1 \leq i \leq n$, est

nul, puisque les $Y_i(w)$ sont des entiers naturels, $k \geq 1 + \sum_{i=1}^n Y_i(w)$ somme de $(n+1)$ entiers avec

$(n+1) > k$. Donc $Y_{n+1}(w) = 0$, alors $(Z_n \leq k) \subset (Z_{n+1} \leq k)$. Mais puisque $Z_n \leq Z_{n+1}$, on a aussi :

$(Z_{n+1} \leq k) \subset (Z_n \leq k)$, La suite d'évènements $(Z_n \leq k)_{n \geq k}$ est stationnaire dès son premier terme.

$(Z \leq k) = (Z_k \leq k) = (Z_n \leq k) ; \forall n \geq k$. Finalement : $\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n \leq k) = P(Z \leq k) = P(Z_k \leq k)$.

III.C.2_b) Soient $k \in \mathbb{N}$ et $n \geq k$, si $Z_n(w) = k = 1 + \sum_{i=1}^n Y_i(w)$ alors l'un des $Y_i(w)$ est nul, puisque les

$Y_i(w)$ sont des entiers naturels et $k = 1 + \sum_{i=1}^n Y_i(w)$ sommes de $(n+1)$ entiers avec $(n+1) > k$.

Alors $(Z_n = k) \subset (Z_{n+1} = k)$. La suite d'évènements $(Z_n = k)_{n \geq k}$ est croissante, alors :

$$P\left(\bigcup_{n \geq k} (Z_n = k)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n = k) \text{ mais c'est clair que } (Z = k) = \bigcup_{n \geq k} (Z_n = k).$$

Finalement : $\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n = k) = P(Z = k)$.

III.C.2_c) Soient $s \in [0, 1[$, $n \in \mathbb{N}^*$, et $K \in \mathbb{N}$.

$$|G_{Z_n}(s) - G_Z(s)| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} (P(Z_n = k) - P(Z = k))s^k \right|$$

$$|G_{Z_n}(s) - G_Z(s)| \leq \left| \sum_{k=0}^K (P(Z_n = k) - P(Z = k))s^k \right| + \left| \sum_{k=K+1}^{\infty} (P(Z_n = k) - P(Z = k))s^k \right|$$

$$|G_{Z_n}(s) - G_Z(s)| \leq \sum_{k=0}^K |P(Z_n = k) - P(Z = k)|s^k + \sum_{k=K+1}^{\infty} |P(Z_n = k) - P(Z = k)|s^k$$

Mais puisque : $P(Z_n = k), P(Z = k) \in [0, 1]$, alors : $|P(Z_n = k) - P(Z = k)| \leq 1$.

$$|G_{Z_n}(s) - G_Z(s)| \leq \sum_{k=0}^K |P(Z_n = k) - P(Z = k)| + \sum_{k=K+1}^{\infty} s^k. \text{ De plus } \sum_{k=K+1}^{\infty} s^k = \frac{s^{K+1}}{1-s} \leq \frac{s^K}{1-s}.$$

$$\text{Finalement : } |G_{Z_n}(s) - G_Z(s)| \leq \sum_{k=0}^K |P(Z_n = k) - P(Z = k)| + \frac{s^K}{1-s}.$$

III.C.2_d) D'après la question précédente pour tout $s \in [0, 1[$, on a :

$$|G_{Z_n}(s) - G_Z(s)| \leq \sum_{k=0}^K |P(Z_n = k) - P(Z = k)| + \frac{s^K}{1-s}$$

Soit $\varepsilon > 0$, et fixons un réel $s \in [0, 1[$. $\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{s^K}{1-s} = 0$, il existe un entier K tel que : $\frac{s^K}{1-s} \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

D'après **III.C.2_b)**, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^K |P(Z_n = k) - P(Z = k)| = 0$, alors il existe un entier naturel N , tel que :

$$\forall n \geq N ; \sum_{k=0}^K |P(Z_n = k) - P(Z = k)| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \text{ Finalement : } \forall n \geq N ; |G_{Z_n}(s) - G_Z(s)| \leq \varepsilon.$$

De plus : $\forall n \in \mathbb{N} ; G_{Z_n}(1) = G_Z(1)$, donc la suite $(G_{Z_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers G_Z .

$$\text{III.C.3_a)} \forall s \in [0, 1] ; G_{Z_1}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_1 = k)s^k = \sum_{k=0}^{\infty} P(Y_1 = k-1)s^k.$$

$$Y_1 \text{ est à valeurs dans } \mathbb{N}, \text{ donc } G_{Z_1}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} P(Y_1 = k-1)s^k = sG_{Y_1}(s) = s\varphi_1(s) = sf(s).$$

III.C.3_b) On admet que $\forall n \geq 2 ; \forall s \in [0, 1] ; G_{Z_n}(s) = sf(G_{Z_{n-1}}(s))$.

f étant continue sur $[0, 1]$ et $(G_{Z_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers G_Z qui sont des applications définies sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$. On fait tendre n vers l'infini, on obtient alors :

$$\forall s \in [0, 1] ; G_Z(s) = sf(G_Z(s)).$$

III.C.3_c) Si Z admet une espérance, alors G_Z est de classe C^1 sur $[0, 1]$, et on a :

$$E(Z) = G'_Z(1) = f(1) + f'(1)G'_Z(1) \text{ et } (1-m)E(Z) = 1 \text{ donc } (1-m) \neq 0 \text{ et puisque } m \leq 1, \text{ alors } m < 1.$$

Reciproquement supposons que $m < 1$.

$$\forall s \in [0, 1[; G'_Z(s) = f(G_Z(s)) + sf'(G_Z(s))G'_Z(s)$$

$$\lim_{\substack{s \rightarrow 1 \\ <}} sf'(G_Z(s)) = m < 1, \text{ alors il existe } \eta \in [0, 1[; \forall s \in [\eta, 1[; sf'(G_Z(s)) < 1 \text{ et } G'_Z(s) = \frac{f(G_Z(s))}{1-sf'(G_Z(s))}.$$

$\lim_{\substack{s \rightarrow 1 \\ s < 1}} G'_Z(s) = \frac{1}{1-m}$, alors G_Z est de classe C^1 sur $[0, 1]$ et Z admet une espérance donnée par :

$$E(Z) = G'_Z(1) = \frac{1}{1-m}.$$

IV Un exemple

Dans cette partie : $\forall k \in \mathbb{N} ; p_k = \frac{1}{2^{k+1}}$.

$$\text{IV.A)} f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{2}\right)^k = \frac{1}{2-t}. \quad m = f'(1) = 1.$$

IV.B) D'après I.C) $\varphi_n(0) \neq 1$, en plus φ_n est strictement croissante et $\varphi_n(1) = 1$.
D'où $\forall t \in [0, 1[; \varphi_n(t) \neq 1$.

IV.C) Soit $t \in [0, 1[$ fixé, et $\forall n \in \mathbb{N} ; a_n(t) = \frac{1}{\varphi_n(t)-1}$.

$$a_{n+1}(t) - a_n(t) = \frac{\varphi_n(t) - \varphi_{n+1}(t)}{(\varphi_{n+1}(t)-1)(\varphi_n(t)-1)} = \frac{\varphi_n(t) - f(\varphi_n(t))}{(f(\varphi_n(t))-1)(\varphi_n(t)-1)}.$$

$$\frac{t-f(t)}{(f(t)-1)(t-1)} = \frac{t - \frac{1}{2-t}}{(\frac{1}{2-t}-1)(t-1)} = -1, \text{ en plus } \varphi_n([0, 1[) = [0, 1[, \text{ d'où la suite } (a_n(t))_{n \in \mathbb{N}} \text{ est } -1\text{-arithmétique.}$$

$$\text{IV.D)} \forall t \in [0, 1[; a_n(t) = a_0(t) - n = \frac{1}{t-1} - n = \frac{n+1-nt}{t-1} \text{ et } \varphi_n(t) = \frac{t-1}{n+1-nt} + 1 = \frac{n-(n-1)t}{n+1-nt}.$$

$$\text{IV.E)} \varphi_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Y_n = k) t^k = \frac{n-(n-1)t}{n+1-nt} = \frac{n-1}{n} \frac{n+1-nt}{n+1-nt} + \frac{n-\frac{n^2-1}{n}}{n+1-nt} = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} \frac{1}{1-\frac{nt}{n+1}}.$$

$$\varphi_n(t) = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^k t^k = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^k t^k = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^k t^k.$$

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Y_n = k) t^k = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^k t^k.$$

Par identification des deux séries entières :

$$P(Y_n = 0) = \frac{n}{n+1} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^* ; P(Y_n = k) = \frac{1}{n(n+1)} \left(\frac{n}{n+1}\right)^k.$$

$$\text{IV.F)} P(T > n) = P(Y_n \geq 1) = \sum_{k=1}^{\infty} P(Y_n = k) = \frac{1}{n(n+1)} \frac{n}{n+1} \frac{1}{1-\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{n+1}.$$

T est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, et la série $(\sum P(T > n))$ diverge.

On réécrit ici la formule établie à la question III.B.2_b)

$$P(T > n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} P(T = k) \text{ et } \sum_{n=0}^N P(T > n) = \sum_{n=0}^N \sum_{k=n+1}^{\infty} P(T = k).$$

Il s'agit d'une famille sommable nombres positifs, alors

$$\sum_{n=0}^N P(T > n) = \sum_{k=1}^N \sum_{n=0}^{k-1} P(T = k) + \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{n=0}^N P(T = k) = \sum_{k=1}^N k P(T = k) + \sum_{k=N+1}^{\infty} (N+1) P(T = k)$$

Alors T admet une espérance si et seulement si la série de terme général $P(T > n)$ converge.

Dans le cas de cette question T n'a pas d'espérance.

IV.G) D'après **III.C.3_b)** $\forall s \in [0, 1] ; G_Z(s) = sf(G_Z(s))$.

$G_Z(s) = \frac{s}{2-G_Z(s)}$ et $G_Z(s)^2 - 2G_Z(s) + 1 = 1 - s = (1 - G_Z(s))^2$, mais $1 - G_Z(s) \geq 0$, alors

$1 - G_Z(s) = \sqrt{1-s}$; Finalement : $G_Z(s) = 1 - \sqrt{1-s}$.

Le développement en série entière de $[s \mapsto \sqrt{1-s}]$ pour s dans $] -1, 1[$ est donné par :

$$\sqrt{1-s} = (1-s)^{1/2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-k+1)}{k!} (-1)^k s^k = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1.3.5\dots(2k-3)}{2^k k!} s^k = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-2)!}{2^{2k-1} k! (k-1)!} s^k.$$

$$\forall s \in [0, 1] ; G_Z(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-2)!}{2^{2k-1} k! (k-1)!} s^k.$$

$$P(Z=0) = 0 \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^* ; P(Z=k) = \frac{(2k-2)!}{2^{2k-1} k! (k-1)!}.$$

V Cas surcritique

On suppose dans cette partie que $m > 1$.

k est un entier naturel non nul, on suppose qu'il y a k individus à la génération 0 ;

$$W_0 = k \text{ et } \begin{cases} W_{n+1}(w) = 0 \text{ si } W_n(w) = 0 \\ W_{n+1}(w) = \sum_{i=1}^{W_n(w)} X_{n,i}(w) \text{ si } W_n(w) \neq 0 \end{cases}.$$

$$u_n = P\left((W_n = k) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} (W_i \neq k)\right)\right).$$

V.A) Pour tous entiers non nuls n et r notons $A_{n,r} = (W_n = k \text{ pour la } r^{\text{ème}} \text{ fois})$.

Pour tous entiers non nuls n, m , et r , on a : $A_{n,r} \cap A_{m,r} = \emptyset$ dès que $n \neq m$, et donc :

La série $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_{n,r})$ est convergente de somme ≤ 1 .

Mais $P(A_{n,r}) = u_n^{(r)} \geq 0$, donc la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(r)} s^n$ converge absolument pour $s \in [-1, 1]$.

(Notons que ceci démontre aussi la convergence de l'autre série puisque $u_n = u_n^{(1)}$)

$$\mathbf{V.B.1)} W_1(w) = \sum_{i=1}^{W_0(w)} X_{0,i}(w) = \sum_{i=1}^k X_{0,i}(w)$$

$$(W_1 > k) \supset \bigcap_{i=1}^k (X_{0,i} \geq 2) \Rightarrow P(W_1 > k) \geq P\left(\bigcap_{i=1}^k (X_{0,i} \geq 2)\right) = \prod_{i=1}^k P(X_{0,i} \geq 2)$$

(puisque les $X_{n,i}$ sont indépendantes) Finalement : $P(W_1 > k) \geq (1 - p_0 - p_1)^k > 0$.

V.B.2) Pour tout entier naturel n , notons ψ_n la fonction génératrice de W_n .

Exactement comme pour les φ_n et les Y_n , on a : $\forall n \in \mathbb{N} ; \psi_{n+1} = \psi_n \circ f$ sauf ici, $\psi_0(t) = t^k$.

Alors par récurrence sur n , on montre facilement que : $\forall n \in \mathbb{N} ; \forall t \in [0, 1] ; \psi_n(t) = \varphi_n(t)^k$.

On veut montrer ici que $P(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} (W_n \neq k)) > 0$.

En tenant compte que les W_n sont indépendantes, et de la suite décroissante d'évènements

$$\left(\bigcap_{j=1}^n (W_j \neq k) \right), \text{ il s'agit de montrer que : } \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{j=1}^n (W_j \neq k) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n P(W_j \neq k) > 0.$$

Premier cas : si $p_0 = 0$

$$\varphi_1(t) = f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n t^n \text{ et le terme en } t^k \text{ dans } \psi_1(t) \text{ est } p_1^k t^k.$$

$$\varphi_2(t) = f \circ f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n f(t)^n \text{ et donc le terme en } t^k \text{ dans } \psi_2(t) \text{ est } p_1^{2k} t^k.$$

Ainsi de suite, on voit clairement que le terme en t^k dans $\psi_n(t)$ est $p_1^{n^k} t^k$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* ; P(W_n = k) = p_1^{n^k} \text{ et } P(W_n \neq k) = 1 - p_1^{n^k}.$$

La série $\left(\sum_{n=1}^{\infty} p_1^{n^k} \right)$ est convergente à termes positifs, et $\ln(1 - p_1^{n^k}) \sim -p_1^{n^k}$, alors la série

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 - p_1^{n^k}) \right) \text{ converge. Soit } L \text{ sa somme : } u = e^L = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n P(W_j \neq k) > 0.$$

Deuxième cas : si $p_0 > 0$

Ici, on va changer d'espace probabilisé. On pose : $\Omega' = \bigcap_{i=1}^k (X_{0,i} \geq 2)$ qui vérifie :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^k (X_{0,i} \geq 2) \right) = (1 - p_0 - p_1)^k > 0. \text{ On pose aussi : } A' = \{M \cap \Omega' ; M \in A\} \text{ et } P' = P_{\Omega'}.$$

Pour toute variable aléatoire X définie sur Ω , on note X' sa restriction à Ω' .

Dans l'espace (Ω', A', P') , les variables aléatoires W'_n et les $X'_{n,i}$ vérifient les mêmes hypothèses que les variables aléatoires W_n et les $X_{n,i}$ sur (Ω, A, P) , avec $P'(X'_{n,i} = 0) = P'(X'_{0,1} = 0) = 0$.

(Les $X'_{n,i}$ sont bien à valeurs dans $\mathbb{N}$, et suivent la même loi).

On s'est alors ramené au premier cas : D'où $P' \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} (W'_n \neq k) \right) > 0$.

$$\text{C'est à dire } \frac{P\left(\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} (W_n \neq k) \right) \cap \Omega' \right)}{P(\Omega')} > 0, \text{ donc } P\left(\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} (W_n \neq k) \right) \cap \Omega' \right) > 0.$$

$$\text{Mais } \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} (W_n \neq k) \right) \cap \Omega' \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} (W_n \neq k), \text{ d'où } P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} (W_n \neq k) \right) > 0.$$

V.C.1) Soient n et r deux entiers tels que : $n \geq 1$ et $r \geq 2$.

$$u_n^{(r)} = P(A_{n,r}) \text{ avec } A_{n,r} = (W_n = k \text{ pour la } r^{\text{ème}} \text{ fois})$$

$$A_{n,r} = \bigcup_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{r-1} \leq n-1} (W_n = k, W_{i_1} = k, \dots, W_{i_{r-1}} = k) \cap (W_j \neq k \text{ pour } j \in [[1, n-1]] \setminus \{i_1, \dots, i_{r-1}\})$$

$$A_{n,r} = \bigcup_{1 \leq i \leq n-1} (W_i = k \text{ pour la } 1^{\text{ère}} \text{ fois}) \cap (W_n = k \text{ pour la } (r-1)^{\text{ème}} \text{ fois parmi les } W_j ; i+1 \leq j \leq n)$$

C'est une réunion d'évènements deux à deux disjoints, alors que $(W_i = k \text{ pour la } 1^{\text{ère}} \text{ fois})$ et $(W_n = k \text{ pour la } (r-1)^{\text{ème}} \text{ fois parmi les } W_j ; i+1 \leq j \leq n)$ sont indépendantes alors :

$$u_n^{(r)} = P(A_{n,r}) = \sum_{i=1}^{n-1} P(A_{i,1})P(A_{n-i,r-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} u_i u_{n-i}^{(r-1)}.$$

V.C.2) D'après la question précédente : la série entière U_r est le produit de Cauchy des séries entières U et U_{r-1} avec $U_1 = U$. D'où $U_r = U^r$.

V.D.1) Soient, A l'évènement : La suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ prenne la valeur k une infinité de fois ;

A_r l'évènement : La suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ prenne la valeur k au moins r fois.

$A_{n,r} = (W_n = k \text{ pour la } r^{\text{ème}} \text{ fois}).$

$A_r = \bigcup_{n \geq 1} A_{n,r}$ et les $(A_{n,r}, n \geq 1)$ sont deux à deux disjoints, alors :

$$P(A_r) = \sum_{n \geq 1} P(A_{n,r}) = \sum_{n \geq 1} u_n^{(r)} = U_r(1) = U(1)^r.$$

$A = \bigcap_{r \geq 1} A_r$ et la suite $(A_r)_{r \geq 1}$ est décroissante, alors : $P(A) = \lim_{r \rightarrow \infty} P(A_r) = \lim_{r \rightarrow \infty} U(1)^r$.

Il suffit alors de justifier que $U(1) < 1$, pour conclure.

$$u = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (W_n \neq k)\right) > 0, \text{ alors } P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (W_n = k)\right) = 1 - u < 1.$$

$$U(1) = \sum_{1 \leq n} P\left((W_n = k) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} (W_i \neq k)\right)\right) \text{ et les } (W_n = k) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} (W_i \neq k)\right) \text{ sont des parties deux à}$$

deux disjointes de $\bigcup_{n=1}^{\infty} (W_n = k)$, alors $U(1) \leq P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (W_n = k)\right) = 1 - u < 1$.

V.D.2) Par absurde supposons que la probabilité que la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ prenne la valeurs k une infinité de fois est non nulle. Soit $\Omega_0 = \{w \in \Omega \text{ tel que } Y_n(w) = k \text{ pour une infinité d'indices } n \in \mathbb{N}^*\}$

$\forall n \in \mathbb{N}^* ; \text{ Soit } \Omega_n = \{w \in \Omega_0 \text{ tel que } Y_n(w) = k\}.$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \Omega_n = \Omega_0 \text{ et } P(\Omega_0) > 0, \text{ alors il existe } n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ tel que : } P(\Omega_{n_0}) > 0$$

Notons que $\forall w \in \Omega_{n_0} ; Y_{n_0}(w) = Y_n(w) = k$ pour une infinité d'indices $n \in \mathbb{N}^*$

On pose : $\Omega' = \Omega_{n_0}$ et $A' = \{M \cap \Omega' ; M \in \mathcal{A}\}$ et $P' = P_{\Omega'}$ et $\forall n \in \mathbb{N} : W'_n$ la restriction de Y_{n+n_0} à Ω' .

La suite $(W'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie sur (Ω', A', P') les mêmes hypothèses de la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Ceci est absurde, puisque la probabilité que la suite $(W'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ prenne la valeur k une infinité de fois est > 0 , chose qui contredit la question **V.D.1)**

$$\text{V.E)} P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} P(\overline{A_n}) = 0. \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n} \text{ est le complémentaire dans } \Omega \text{ de } \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right).$$

$$\text{D'où} \quad P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 1.$$

$$\text{V.F)} P\left(\bigcup_{n \geq 1} (Y_n = 0)\right) = \alpha \text{ et } \beta = P(\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = +\infty). \text{ Soit } k \text{ un entier } \geq 2 \text{ fixé. Soit } w \in \Omega.$$

$$w \notin \bigcup_{n \geq 1} (Y_n = 0) \Rightarrow \forall n \geq 1 ; Y_n(w) \geq 1.$$

$$\forall i \in \mathbb{N}^* ; P(Y_n = i, \text{ pour une infinité d'indice } n \in \mathbb{N}^*) = 0. \text{ (Question V.D.2) donc :}$$

$$P\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} (Y_n = i, \text{ pour une infinité d'indices } n \in \mathbb{N}^*)\right) = 0$$

$$\text{Si } w \notin \left(\bigcup_{n \geq 1} (Y_n = 0)\right) \cup \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} (Y_n = i, \text{ pour une infinité d'indices } n \in \mathbb{N}^*)\right) \text{ alors}$$

$$\exists N_k \in \mathbb{N}^* ; \forall n \geq N_k ; Y_n(w) \geq k$$

$$\text{D'où } w \notin \left(\bigcup_{n \geq 1} (Y_n = 0)\right) \cup \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} (Y_n = i, \text{ pour une infinité d'indices } n \in \mathbb{N}^*)\right) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n(w) = +\infty.$$

$$\text{Si } Y_n(w) = 0 \text{ alors } \forall m \geq n ; Y_m(w) = 0.$$

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n(w) = +\infty \Rightarrow w \notin \left(\bigcup_{n \geq 1} (Y_n = 0)\right) \cup \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} (Y_n = i, \text{ pour une infinité d'indices } n \in \mathbb{N}^*)\right).$$

$$\text{Le complémentaire de } \left(\bigcup_{n \geq 1} (Y_n = 0)\right) \cup \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} (Y_n = i, \text{ pour une infinité d'indices } n \in \mathbb{N}^*)\right) \text{ est}$$

$$\text{donc } (\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = +\infty). \text{ De plus :}$$

$$\alpha = P\left(\bigcup_{n \geq 1} (Y_n = 0)\right) = P\left(\left(\bigcup_{n \geq 1} (Y_n = 0)\right) \cup \left(\bigcup_{1 \leq i \leq k-1} (Y_n = i, \text{ pour une infinité d'indices } n \in \mathbb{N}^*)\right)\right)$$

$$\text{Alors : } P(\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = +\infty) = 1 - \alpha, \text{ c'est à dire : } \alpha + \beta = 1.$$