

Centrale 2015 - PSI 1

un corrigé

I. Etude d'une suite récurrente

I.A

1. f' étant positive, f croît sur $[0, 1]$. Montrons alors par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$$

- Initialisation : c'est vrai au rang 0 car $u_0 = 0$ et $u_1 = f(0) \in [0, 1]$.
- Hérédité : soit $n \geq 0$ tel que le résultat est vrai jusqu'au rang n . On a alors $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ et par croissance de f sur $[0, 1]$,

$$u_{n+2} - u_n = f(u_{n+1}) - f(u_n) \geq 0$$

En outre, comme $[0, 1]$ est stable par f , $u_n, u_{n+1} \in [0, 1]$ entraîne $u_{n+1} = f(u_n)$, $u_{n+2} = f(u_{n+1}) \in [0, 1]$. On a ainsi prouvé le résultat au rang $n + 1$.

On a montré que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et qu'elle reste dans $[0, 1]$. Par théorème de limite monotone, la suite converge et de plus (passage à la limite dans une inégalité large)

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \in [0, 1]$$

2. Comme $f(1) = 1$, l'ensemble $A = \{x \in [0, 1] / f(x) = x\}$ est non vide. Comme il est minoré, il admet une borne inférieure x_f . Mais $A = (g - Id)(\{0\})$ est fermé (image réciproque par une application continue d'un fermé) et donc $x_f \in A$ ce qui montre que x_f est un minimum. Il y a donc bien une plus petite solution à l'équation $f(x) = x$.
3. Comme f croît sur $[0, 1]$, on a $f([0, x_f]) = [f(0), f(x_f)] = [0, x_f]$. $u_0 \in [0, x_f]$ et $[0, x_f]$ est stable par f , donc (récurrence simple sur le modèle de la précédente)

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, x_f]$$

Par passage à la limite, $\ell \in [0, x_f]$. f étant continue sur $[0, 1]$, un passage à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$ donne de plus $f(\ell) = \ell$. Enfin, par minimalité, x_f est le seul point fixe de f dans $[0, x_f]$. On a donc

$$x_f = \ell$$

- I.B** Posons $g(x) = f(x) - x$. g est de classe C^1 sur $[0, 1]$ et $g'(x) = f'(x) - 1$. Si $m > 1$ alors $g'(1) > 0$ et g est localement strictement croissante au voisinage de 1. Comme $g(1) = f(1) - 1 = 0$, il existe donc $a \in [0, 1[$ tel que $g(a) < 0$. Enfin, $g(0) = f(0) \geq 0$ et par théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule sur $[0, a] \subset [0, 1[$. On en déduit que $x_f \in [0, a]$ et donc que

$$x_f \in [0, 1[$$

- I.C** Notons toujours $g(x) = f(x) - x$. On a $g \in C^2([0, 1])$ et $g'(x) = f'(x) - 1$, $g''(x) = f''(x) \geq 0$; comme $g''(1) = f''(1) > 0$, g'' (qui est continue) est même strictement positive sur un intervalle $[a, 1[$. g' est donc croissante sur $[0, 1]$ et strictement croissante sur $[a, 1]$. Comme $g'(1) = m - 1 \leq 0$, g' est négative sur $[0, 1]$ et même strictement négative sur $[a, 1[$. g est donc décroissante sur $[0, 1]$ et même strictement décroissante sur $[a, 1]$. En particulier, $\forall x \in [a, 1[$, $g(x) > 0$ et $\forall x \in [0, a]$, $g(x) \geq g(a) > 0$. g ne s'annule donc pas sur $[0, 1[$ et ceci impose

$$x_f = 1$$

Sur $[a, 1[$, f'' est strictement positive et f' est donc strictement croissante sur $[a, 1]$. Ainsi, $\forall x \in [a, 1]$, $f'(x) \leq m$. Si, par l'absurde, m était nul alors f' serait nulle sur $[a, 1]$. Comme f' est positive et croissante sur $[0, 1]$ ($f'' \geq 0$) on aurait donc f' nulle sur $[0, 1]$ ce qui contredit $f''(1) > 0$. On a donc $f'(1) > 0$ et f est strictement croissante au voisinage de 1. Comme elle est croissante sur $[0, 1]$, elle ne prend finalement la valeur 1 qu'en 1. Si, par l'absurde, on avait $u_n = 1$, on aurait $f(u_{n-1}) = 1$ et donc $u_{n-1} = 1$. Par une récurrence descendante, on obtiendrait $u_0 = 1$, ce qui est faux. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1[$$

I.D

1. On a $u_n = 1 - \varepsilon_n$ et $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Par formule de Taylor-Young,

$$u_{n+1} = f(u_n) = f(1 - \varepsilon_n) = f(1) - \varepsilon_n f'(1) + \frac{\varepsilon_n^2}{2} f''(1) + o(\varepsilon_n^2) = 1 - \varepsilon_n + \frac{\varepsilon_n^2}{2} f''(1) + o(\varepsilon_n^2)$$

On en déduit que

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n - \frac{\varepsilon_n^2}{2} f''(1) + o(\varepsilon_n^2) = \varepsilon_n \left(1 - \frac{\varepsilon_n}{2} f''(1) + o(\varepsilon_n) \right)$$

On passe à l'inverse (possible puisque la suite (ε_n) ne s'annule pas) et en utilisant $\frac{1}{1-u} = 1 + u + o_0(u)$ on trouve

$$\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} = \frac{1}{\varepsilon_n} \left(1 + \frac{\varepsilon_n}{2} f''(1) + o(\varepsilon_n) \right)$$

Il en résulte que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} - \frac{1}{\varepsilon_n} \right) = \frac{f''(1)}{2}$$

2. D'après le théorème de Césaro,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\varepsilon_{k+1}} - \frac{1}{\varepsilon_k} \right) = \frac{f''(1)}{2}$$

Dans la somme, les termes se télescopent et ce qui précède s'écrit

$$\frac{1}{n} \left(\frac{1}{\varepsilon_n} - \frac{1}{\varepsilon_0} \right) = \frac{f''(1)}{2} + o(1)$$

$\frac{1}{n\varepsilon_0}$ étant de limite nulle est $o(1)$ et ce qui précède s'écrit aussi

$$\frac{1}{n\varepsilon_n} = \frac{f''(1)}{2} + o(1)$$

ou encore (puisque $f''(1) \neq 0$) $n\varepsilon_n \sim \frac{f''(1)}{2}$. On peut passer à l'inverse dans les équivalent et multiplier les équivalents. On a ainsi

$$1 - u_n = \varepsilon \sim \frac{2}{nf''(1)}$$

I.E

1. Le même calcul que ci-dessus donne

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n \left(m - \frac{\varepsilon_n}{2} f''(1) + o(\varepsilon_n) \right)$$

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|} = |m| = m \in [0, 1[$$

Par règle de D'Alembert, $\sum(\varepsilon_n)$ est donc absolument convergente.

Notons que le cas $m = 0$ est impossible d'après le raisonnement de la question **I.C**. On peut donc diviser par $m > 0$. En reprenant l'identité ci-dessus, on a

$$\frac{\varepsilon_{n+1}}{m\varepsilon_n} = 1 - \frac{\varepsilon_n}{2m} f''(1) + o(\varepsilon_n)$$

On en déduit que

$$\ln \left(\frac{\varepsilon_{n+1}}{m\varepsilon_n} \right) = O(\varepsilon_n)$$

qui est le terme général d'une absolument convergente. On a montré que

$$\ln \left(\frac{\varepsilon_{n+1}}{m\varepsilon_n} \right) = \ln \left(\frac{m^{-(n+1)} \varepsilon_{n+1}}{m^{-n} \varepsilon_n} \right)$$

est le terme général d'une série absolument convergente.

2. Notons L la somme de la série de la question précédente. On a donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln \left(\frac{\varepsilon_{k+1}}{m\varepsilon_k} \right) = L + o(1)$$

Avec les propriétés de morphisme du logarithme, les termes se télescopent et on obtient

$$\ln(\varepsilon_n) - \ln(\varepsilon_0) - n \ln(m) = L + o(1)$$

ou encore

$$\varepsilon_n = m^n e^L \varepsilon_0 e^{o(1)}$$

Comme $e^L \varepsilon_0 > 0$ (ce qui importe est la non nullité) on a finalement

$$1 - u_n = \varepsilon_n \sim c m^n \text{ avec } c = e^L \varepsilon_0 > 0$$

II. Formule de Wald

II.A

1. Les variables X et Y étant indépendantes, pour toute fonction f les variables $f(X)$ et $f(Y)$ le sont et on a donc, sous réserve que les espérances existent $\mathbb{E}(f(X)f(Y)) = \mathbb{E}(f(X))\mathbb{E}(f(Y))$. Avec la fonction $x \in \mathbb{N} \mapsto t^x$ (pour un réel quelconque t fixé dans $[-1, 1]$), on obtient (le cours nous indique que les espérances existent toutes)

$$G_{X+Y}(t) = \mathbb{E}(t^X t^Y) = \mathbb{E}(t^X) \mathbb{E}(t^Y) = G_X(t) G_Y(t)$$

2. Montrons par récurrence que la propriété

$$G_{S_k} = (G_X)^k$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- Initialisation : l'hypothèse est immédiatement vraie au rang 1.
- Hérédité : soit $k \geq 1$ tel que l'hypothèse soit vraie aux rangs $1, \dots, k$. D'après la question précédente (et le résultat d'indépendance admis) la fonction génératrice de $X_1 + \dots + X_k + X_{k+1} = S_k + X_{k+1}$ est $G_{S_k} G_X$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, elle vaut $(G_X)^{k+1}$.

La propriété est aussi vraie au rang 0 puisque $G_{S_0} = 1$ (S_0 étant constante égale à 0) et que $(G_X)^0 = 1$.

3. $(T = k)_{k \in \mathbb{N}}$ étant un système complet d'événements, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(S = n) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}((S = n) \cap (T = k))$$

On en déduit que

$$\forall t \in [-1, 1], G_S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S = n)t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}((S = n) \cap (T = k))t^n \right)$$

Comme on a l'égalité des événements $(S = n) \cap (T = k)$ et $(S_k = n) \cap (T = k)$ et comme S_k et T sont admis indépendants, on a alors

$$\forall t \in [-1, 1], G_S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = n)\mathbb{P}(T = k)t^n \right)$$

On fixe $K \in \mathbb{N}$. On peut découper la somme intérieure en deux :

$$\forall t \in [-1, 1], G_S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^K \mathbb{P}(S_k = n)\mathbb{P}(T = k)t^n + \sum_{k=K+1}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = n)\mathbb{P}(T = k)t^n \right)$$

Pour écrire $\sum_{n=0}^{\infty} (U_n + V_n) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n + \sum_{n=0}^{\infty} V_n$, il nous suffit (sachant que le membre de gauche existe) de montrer que l'un des deux termes du membre de droite existe (l'autre existera alors fatalement). On écrit (ici on a des sommes finies et donc pas de problème)

$$\sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^K \mathbb{P}(S_k = n)\mathbb{P}(T = k)t^n = \sum_{k=0}^K \left(\sum_{n=0}^N \mathbb{P}(S_k = n)t^n \right) \mathbb{P}(T = k)$$

$\sum_{n=0}^N \mathbb{P}(S_k = n)t^n$ est le terme général d'une suite convergente de limite $G_S(t) = G_X(t)^k$. On a donc convergence ci-dessus (somme d'un nombre constant de suite convergente) et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^K \mathbb{P}(S_k = n)\mathbb{P}(T = k)t^n = \sum_{k=0}^K G_X(t)^k \mathbb{P}(T = k)$$

Avec tous ces arguments, on peut finalement écrire

$$\forall t \in [-1, 1], G_S(t) = \sum_{k=0}^K G_X(t)^k \mathbb{P}(T = k) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=K+1}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = n)\mathbb{P}(T = k)t^n \right)$$

Remarque : la formule est valable pour $t \in [-1, 1]$ et pas seulement $t \in [0, 1]$.

4. On prend $t \in [0, 1]$ et $K \in \mathbb{N}$. On a

$$\forall k \geq K + 1, \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \mathbb{P}(S_k = n)\mathbb{P}(T = k)t^n \leq \mathbb{P}(T = k)t^n$$

Comme $\sum (\mathbb{P}(T = k))$ converge (série positive de somme 1) on peut sommer pour $k \geq K$ et obtenir

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \sum_{k=K+1}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = n)\mathbb{P}(T = k)t^n \leq \left(\sum_{k=K+1}^{\infty} \mathbb{P}(T = k) \right) t^n$$

Comme $t \in [0, 1]$, $\sum (t^n)$ converge et sa somme vaut $\frac{1}{1+t}$. On en déduit que

$$0 \leq R_K \leq \frac{1}{1-t} \sum_{k=K+1}^{\infty} \mathbb{P}(T = k)$$

5. A $t \in [0, 1[$ fixé, la question précédente montre que $R_K \rightarrow 0$ quand $K \rightarrow +\infty$. On peut ainsi faire tendre K vers $+\infty$ dans **II.A.3** pour obtenir

$$G_S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} G_X(t)^k \mathbb{P}(T = k) = G_T(G_X(t)) = G_T \circ G_X(t)$$

Ceci n'est prouvé que pour $t \in [0, 1]$ mais le résultat rappelé en préambule indique que cela suffit pour conclure que

$$G_S = G_T \circ G_X$$

II.B Si Y est une variable d'espérance finie, on a $\mathbb{E}(Y) = G'_Y(1)$. Ici, en supposant que les espérances existent, on a (puisque $G_X(1) = 1$)

$$\mathbb{E}(S) = G'_S(1) = G'_T(G_X(1)).G'_X(1) = \mathbb{E}(T)\mathbb{E}(X_1)$$

II.C

1. Si $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ alors pour tout n , $\mathbb{P}[Y = n] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$ et

$$\forall t \in [-1, 1], G_Y(t) = e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda t}$$

2. Ici, $T \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $\forall i, X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(\alpha)$. S est alors le nombre d'insectes issus de la ponte. On a

$$\forall t \in [-1, 1], G_S(t) = G_T(G_X(t)) = G_T(1 - \alpha + \alpha t) = e^{-\lambda\alpha} e^{\lambda\alpha t}$$

et on conclut que

$$S \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda\alpha)$$

III. Processus de Galton-Watson

III.A

1. On fixe $n \in \mathbb{N}$. On est exactement dans la situation de la partie précédente. Ici, $T = Y_n$ et les X_i sont les $X_{n,i}$. Y_{n+1} correspond alors à S et **II.A** donne (toutes les hypothèses d'indépendance étant vérifiées)

$$\varphi_{n+1} = G_{Y_{n+1}} = G_{Y_n} \circ G_{X_{n,1}} = \varphi_n \circ f$$

2. De même, **II.B** donne

$$\mathbb{E}(Y_{n+1}) = \mathbb{E}(Y_n)\mathbb{E}(f)$$

et (on a une suite géométrique)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}(f)^n \mathbb{E}(Y_0) = m^n$$

3. L'événement E : "il y a extinction" est égal à la réunion des événements $(Y_n = 0)$ (il y a extinction si la population fini par être nulle) :

$$E = \bigcup_{n=0}^{\infty} (Y_n = 0)$$

Les événements $(Y_n = 0)$ étant emboîtés, on peut utiliser la continuité croissante pour en déduire que

$$\mathbb{P}(E) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Y_n = 0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(0)$$

Avec **III.A.1** et $\varphi_0 = \text{Id}$, une récurrence immédiate montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi_n = f^{(n)}$$

où $f^{(n)}$ désigne l'itérée n fois de f pour la composition (avec la convention $f^{(0)} = \text{Id}$). En particulier

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \varphi_{n+1}(0) = f(f^{(n)}(0)) = f(\varphi_n(0))$$

et $(\varphi_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence de la partie **I**. Il nous reste à montrer que la fonction f vérifie les hypothèses de cette partie.

- f est de classe C^2 sur $[0, 1]$ puisque l'on a supposé que la loi μ possède une espérance et une variance. De plus, f' et f'' sont à valeurs positives puisque

$$\forall t \in [0, 1], f'(t) = \sum_{k \geq 0} (k+1)p_{k+1}t^k \quad \text{et} \quad f''(t) = \sum_{k \geq 0} (k+1)(k+2)p_{k+2}t^k$$

- f est définie de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ ($\forall t \in [0, 1], 0 \leq f(t) = \sum_{k \geq 0} p_k t^k \leq \sum_{k \geq 0} p_k = 1$).
- $f(1) = \sum_{k \geq 0} p_k = 1$.
- $f'(0) = p_1 \leq p_0 + p_1 < 1$.
- $f''(1) = \sum_{k \geq 0} (k+1)(k+2)p_{k+2} > 0$ car l'un des p_{k+2} est > 0 .

4. Si $m \leq 1$ alors $\varphi_n(0) \rightarrow 1$ d'après **I.C**. La population s'éteint donc presque sûrement.

III.B

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ $T(\omega) = k$ alors $Y_{k-1}(\omega) \neq 0$ et $Y_k(\omega) = 0$. En particulier $(T = k) \subset (Y_{k-1} \neq 0)$ et donc

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \mathbb{P}(T = k) \leq \mathbb{P}(Y_{k-1} \neq 0) = 1 - \mathbb{P}(Y_{k-1} = 0) = 1 - \varphi_{k-1}(0)$$

D'après la question **I.E** (on est bien dans le cas $m < 1$), $k(1 - \varphi_{k-1}(0)) \sim ck m^{k-1}$ est le terme général d'une série convergente (par comparaison aux séries de Riemann puisque ce terme est $o(1/k^2)$ puisque $m \in [0, 1]$). A fortiori, $k\mathbb{P}(T = k)$ est aussi le terme général d'une série convergente (comparaison de séries positives) et $\mathbb{E}(T)$ existe (ici, absolue convergence et convergence sont équivalentes).

2. Pour tout entier n ,

$$\mathbb{P}(Y_n \geq 1) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(Y_n = k) \leq \sum_{k \geq 1} k\mathbb{P}(Y_n = k) = \mathbb{E}(Y_n) = m^n$$

On est dans le cas où la population s'éteint presque sûrement et on a donc $\mathbb{P}(T = -1) = 0$. Ainsi

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{k \geq 0} k\mathbb{P}(T = k) = \sum_{k \geq 0} k(\mathbb{P}(T > k-1) - \mathbb{P}(T > k))$$

Pour manipuler les sommes, revenons à des sommes partielles. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k(\mathbb{P}(T > k-1) - \mathbb{P}(T > k)) &= \sum_{k=0}^n k\mathbb{P}(T > k-1) - \sum_{k=0}^n k\mathbb{P}(T > k) \\ &= \sum_{k=-1}^n (k+1)\mathbb{P}(T > k) - \sum_{k=0}^n k\mathbb{P}(T > k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(T > k) - n\mathbb{P}(T > n) \end{aligned}$$

Comme $(T > n) = (Y_n > 1)$, on a $0 \leq n\mathbb{P}(T > n) \leq nm^n \rightarrow 0$ (car $m \in [0, 1[$ et par croissances comparées). Un passage à la limite donne donc

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(T > k)$$

On utilise à nouveau $\mathbb{P}(T > k) = \mathbb{P}(Y_k \geq 1) \leq m^k$ pour en déduire que

$$\mathbb{E}(T) \leq \sum_{k=0}^{\infty} m^k = \frac{1}{1-m}$$

II.C

1. Comme on l'a dit en **III.A.3**, l'événement $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (Y_k = 0)$ est l'événement "la population finit par s'éteindre". Dans le cas $m \leq 1$, cet ensemble est de probabilité 1 (question **III.1.4**).
2.
 - a. Fixons $k \in \mathbb{N}$. Comme $Z_{n+1} = Z_n + Y_n \geq Z_n$, $(Z_{n+1} \leq k) \subset (Z_n \leq k)$ et la suite $(\mathbb{P}(Z_n = k))_{k \geq 0}$ est donc décroissante. Elle est minorée par 0 et converge donc d'après le théorème de limite monotone. D'après la propriété de continuité décroissante, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z_n \leq k) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (Z_n \leq k)\right)$$

Si $\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (Z_n \leq k)$ alors $\forall n, Z_n(\omega) \leq k$ et donc $Z(\omega) \leq k$ (passage à la limite). Réciproquement, si $Z(\omega) \leq k$ alors $\forall n, Z_n(\omega) \leq k$ (la suite croissante $(Z_n(\omega))_n$ est inférieure à sa limite) et donc $\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (Z_n \leq k)$. Finalement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z_n \leq k) = \mathbb{P}(Z \leq k)$$

- b. On a $\mathbb{P}(Z_n = k) = \mathbb{P}(Z_n \leq k) - \mathbb{P}(Z_n \leq k-1)$ et donc (on passe à la limite)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z_n = k) = \mathbb{P}(Z \leq k) - \mathbb{P}(Z \leq k-1) = \mathbb{P}(Z = k)$$

- c. Fixons $K \in \mathbb{N}$ et $s \in [0, 1[$. On a (toutes les séries convergent absolument)

$$\begin{aligned} |G_{Z_n}(s) - G_Z(s)| &= \left| \sum_{k \geq K} (\mathbb{P}(Z_n = k) - \mathbb{P}(Z = k)) s^k \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} |\mathbb{P}(Z_n = k) - \mathbb{P}(Z = k)| s^k \end{aligned}$$

On découpe la somme. Pour les indices $\leq K$, on majore s^k par 1 (la somme est finie et cela ne pose pas de problème d'existence). Pour $k \geq K+1$, on remarque que $|\mathbb{P}(Z_n = k) - \mathbb{P}(Z = k)| \leq 1$ (car les deux termes sont entre 0 et 1 et leur différence est donc entre -1 et 1). Comme $\sum(s^k)$ converge, on n'a à nouveau pas de problème d'existence. On obtient

$$\begin{aligned} |G_{Z_n}(s) - G_Z(s)| &\leq \sum_{k=0}^K |\mathbb{P}(Z_n = k) - \mathbb{P}(Z = k)| + \sum_{k \geq K+1} s^k \\ &= \sum_{k=0}^K |\mathbb{P}(Z_n = k) - \mathbb{P}(Z = k)| + \frac{s^{K+1}}{1-s} \end{aligned}$$

Remarque : c'est un poil mieux que dans l'énoncé puisque $s \in [0, 1[$.

- d. Soit $s \in [0, 1[$. Fixons $\varepsilon > 0$; comme $\frac{s^p}{1-s} \rightarrow 0$ quand $p \rightarrow +\infty$, on peut trouver un rang K pour lequel ce terme est $\leq \varepsilon/2$. K étant fixé, $\sum_{k=0}^K |\mathbb{P}(Z_n = k) - \mathbb{P}(Z = k)| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$ (somme d'un nombre constant de suites de limite nulle) et il existe un rang n_0 à partir duquel ce terme est aussi $\leq \varepsilon/2$. On a ainsi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 / \forall n \geq n_0, |G_{Z_n}(s) - G_Z(s)| \leq \varepsilon$$

ce qui signifie que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} G_{Z_n}(s) = G_Z(s)$$

Ceci reste vrai pour $s = 1$ (la suite est constante égale à 1). On a finalement (G_{Z_n}) qui converge simplement sur $[0, 1]$ vers G_Z .

3.

- a. On a $Z_1 = 1 + Y_1$ et comme une variable constante est indépendante de toute autre variable, la question **II.A.1** indique que

$$G_{Z_1}(s) = G_1(s)G_{Y_1}(s) = sf(s)$$

- b. Avec le résultat admis et **III.C.2** on a (f étant continue)

$$\forall s \in [0, 1], G_Z(s) = \lim_{n \rightarrow +\infty} G_{Z_n}(s) = sf(G_Z(s))$$

- c. Le cours nous indique que Z est d'espérance finie si et seulement si G_Z est dérivable en 1 et qu'alors $\mathbb{E}(Z) = G'_Z(1)$.

On sait qu'une fonction génératrice est dérivable sur $[0, 1[$. La question précédente donne

$$\forall s \in [0, 1[, G'_Z(s) = f(G_Z(s)) + G'_Z(s)f'(G_Z(s))$$

ce que l'on peut écrire

$$\forall s \in [0, 1[, (1 - f'(G_Z(s)))G'_Z(s) = f(G_Z(s))$$

Quand $s \rightarrow 1$, $1 - f'(G_Z(s)) \rightarrow 1 - m$ et $f(G_Z(s)) \rightarrow f(1) = 1$ (les fonctions génératrices sont continues sur $[-1, 1]$).

Si $m \in [0, 1[$, on a donc $G'_Z(s) \rightarrow \frac{1}{1-m}$ quand $s \rightarrow 1$. D'après le théorème de limite de la dérivée (corollaire des accroissements finis et utilisable avec G_Z qui est continue sur $[0, 1]$ et de classe C^1 sur $[0, 1[$), G_Z est dérivable en 1 et $G'_Z(1) = \frac{1}{1-m}$.

Si $m = 1$, on a G'_Z de limite infinie en 1 et le même théorème indique que G_Z est non dérivable en 1.

Finalement, $\mathbb{E}(Z) < +\infty$ si et seulement si $m < 1$ et dans ce cas, $\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{1-m}$.

IV. Un exemple

Notons que l'énoncé est cohérent puisque les p_k vérifient les bonnes hypothèses (positifs, de somme 1 et avec un terme au moins d'indice > 1 qui est non nul).

IV.A On a

$$\forall t \in [0, 1], f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{t}{2}} = \frac{1}{2-t}$$

f est dérivable sur $[0, 1]$ avec $f'(t) = \frac{1}{(2-t)^2}$. En particulier,

$$m = f'(1) = 1$$

IV.B f est croissante sur $[0, 1[$ (dérivée positive) et donc $f([0, 1]) = [f(0), f(1)[= [0, 1[$. Soit $t \in [0, 1[$; comme $\varphi_0(t) = t \in [0, 1[$ et $\varphi_{n+1}(t) = f(\varphi_n(t))$, une récurrence immédiate donne

$$\forall t \in [0, 1[, \forall n \in \mathbb{N}, \varphi_n(t) \in [0, 1[$$

IV.C Le calcul donne

$$a_{n+1}(t) = \frac{1}{f(\varphi_n(t)) - 1} = \frac{2 - \varphi_n(t)}{-1 + \varphi_n(t)} = a_n(t) - 1$$

IV.D Il en découle que $a_n(t) = a_0(t) - n = \frac{1}{t-1} - n = \frac{n+1-nt}{t-1}$. Comme $\varphi_n(t) = 1 + \frac{1}{a_n(t)}$, on trouve que

$$\varphi_n(t) = \frac{n + (1 - n)t}{1 + n - nt}$$

IV.E $\mathbb{P}(Y_n = k)$ est le coefficient devant t^k dans le DSE de $\varphi_n(t)$. Or, pour $n \geq 1$, on a (à l'aide d'une division euclidienne non explicitée)

$$\varphi_n(t) = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} \frac{1}{1+n-nt} = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n(1+n)} \frac{1}{1 - \frac{n}{1+n}t}$$

et donc (développement de $\frac{1}{1-u}$ et regroupement des termes constants)

$$\varphi_n(t) = \frac{n}{1+n} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^{k-1}}{(1+n)^{k+1}} t^k$$

On a ainsi prouvé que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(Y_n = 0) = \frac{n}{1+n} \text{ et } \forall k \geq 1, \mathbb{P}(Y_n = k) = \frac{n^{k-1}}{(1+n)^{k+1}}$$

Comme $Y_0 = 1$, la formule reste valable dans le cas $n = 0$.

IV.F On a $(T > n) = (Y_n \geq 1)$ et donc

$$\mathbb{P}(T > n) = \mathbb{P}(Y_n \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(Y_n = 0) = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

On peut reprendre le calcul de **III.B.2** pour obtenir

$$\sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(T = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(T > k) - n \mathbb{P}(T > n)$$

$n \mathbb{P}(T > n) \rightarrow 1$ mais $\sum (\mathbb{P}(T > k))$ diverge (série de Riemann). Ainsi, T n'admet pas d'espérance finie (la série ne converge pas donc ne converge pas absolument; notons qu'ici les notions coïncident puisque les termes sont positifs).

IV.G **III.C.3** donne une relation vérifiée par $x = G_Z(s) : x = \frac{s}{2-x}$. On trouve donc (résolution d'une équation de degré 2) que $G_z(s)$ vaut $1 \pm \sqrt{1-s}$. Mais $G_z(s) \leq 1$ quand $s \in [0, 1[$ et donc

$$\forall s \in [0, 1[, 1 - \sqrt{1-s}$$

Pour obtenir la loi de Z , on effectue un DSE de cette fonction et on identifie le coefficient de s^k comme $\mathbb{P}(Z = k)$:

$$\mathbb{P}(Z = 0) = 0 \text{ et } \forall k \geq 1, \mathbb{P}(Z = k) = \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2} - i \right) = \frac{1}{2^k k!} \prod_{i=1}^{k-1} (2i - 1) = \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2}$$

V. Cas surcritique

V.A Les événements dont les $u_n^{(r)}$ sont les probabilités sont incompatibles (on ne peut voir arriver un événement pour la première fois à deux instants différents). $\sum(u_n^{(r)})$ est donc convergente (de somme ≤ 1). Pour tout $s \in [-1, 1]$, on a donc $|u_n^{(r)} s^n| \leq u_n^{(r)}$ qui est terme général d'une série absolument convergente (et a fortiori convergente).

V.B

1. $W_1 = X_{0,1} + \dots + X_{0,k}$. Si $W_1 \leq k$ alors il existe j tel que $X_{0,j} \leq 1$ c'est à dire

$$(W_1 \leq k) \subset \bigcup_{j=1}^k (X_{0,j} \leq 1)$$

En passant au complémentaire

$$\bigcap_{j=1}^k (X_{0,j} > 1) \subset (W_1 > k)$$

En passant aux probabilités, et comme les $X_{0,i}$ sont indépendantes,

$$(1 - p_0 - p_1)^k \leq \mathbb{P}(W_1 > k)$$

et donc

$$\mathbb{P}(W_1 > k) \geq (1 - p_0 - p_1)^k > 0$$

puisque $p_0 + p_1 \in [0, 1[$.

2. *JOKER* au temps t .

V.C

1. On se donne $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \geq 2$.

Soit $\omega \in \Omega$ pour lequel la suite (W_p) prend la valeur k pour la r -ième fois exactement au rang n . Il existe un premier rang i où $W_i = k$ (et $i \leq n - r + 1$). A partir du moment où l'on retrouve une population de taille k , l'expérience reprend alors comme initialement de façon indépendante de ce qui s'est passé lors des étapes précédentes. On cherche alors les événement donnant pour la $r - 1$ -ième fois une population égale à k au bout de $n - i$ générations.

On partitionne ainsi l'événement dont on cherche la probabilité en $n - r + 1$ sous-ensembles disjoints. La probabilité du i -ème de ces sous-ensemble est $u_i u_{n-i}^{(r-1)}$.

On trouve finalement que

$$u_n^{(r)} = \sum_{i=1}^{n-r+1} u_i u_{n-i}^{(r-1)}$$

Comme $u_a^{(b)}$ est nul si $a < b$ (on ne peut avoir b succès en strictement moins de b épreuves), on peut ajouter les termes d'indices $n - r + 2, \dots, n - 1$ qui sont nuls et écrire que

$$u_n^{(r)} = \sum_{i=1}^{n-1} u_i u_{n-i}^{(r-1)}$$

2. En posant $u_0^{(r)} = 0$ pour tout $r \geq 1$ (et en particulier $u_0 = 0$), la relation précédente d'écrit aussi

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n^{(r)} = \sum_{i=0}^n u_i u_{n-i}^{(r-1)}$$

La suite $u^{(r)}$ est alors le produit de Cauchy des suites u et u^{r-1} . Comme toutes les séries entières sont de rayon de convergence $\geq 1 > 0$, le cours nous indique que

$$\forall s \in]-1, 1[, \sum_{n \geq 0} u_n^{(r)} s^n = \left(\sum_{n \geq 0} u_n s^n \right) \left(\sum_{n \geq 0} u_n^{(r-1)} s^n \right)$$

Comme les termes d'indice 0 sont nuls, on trouve finalement

$$\forall s \in]-1, 1[, U_r(s) = U(s)U_{r-1}(s)$$

et ceci reste vrai pour $s = \pm 1$ par continuité des fonctions sur $[-1, 1]$. Une récurrence immédiate donne alors

$$\forall r \geq 1, U_r = U^r$$

V.D

1. $U(1)$ correspond à la probabilité que $(W_n)_{n \geq 1}$ prenne au moins une fois la valeur k et on a donc

$$U(1) = 1 - u \in [0, 1[$$

Notons E_r l'événement "la suite $(W_n)_{n \geq 1}$ prend au moins r fois la valeur k ". Si la suite prend au moins r fois la valeur k , il y a bien un rang où elle prend pour la r -ième fois la valeur k et réciproquement. Deux événements correspondant à des rangs différents sont bien sûr différents et ainsi

$$\mathbb{P}(E_r) = \sum_{n \geq 1} u_n^{(r)} = U_r(1) = U(1)^r = (1 - u)^r$$

Les E_r formant une suite décroissante d'ensembles, la propriété de continuité décroissante indique (puisque $1 - u \in [0, 1[$)

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{r \geq 0} E_r \right) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(E_r) = 0$$

Or, $\bigcap_{r \geq 0} E_r$ correspond à l'événement "la suite (W_n) prend une infinité de fois la valeur k " et on a donc le résultat demandé.

2. Soit $k \geq 1$. On partitionne les événements en deux sous-ensembles A et $\bar{A}$: ceux pour lesquels on atteint la valeur k au moins une fois et les autres. On note B l'événement "la suite Y prend la valeur k une infinité de fois. Par formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap \bar{A}) = \mathbb{P}(B \cap A)$$

Plus précisément, notons A_i l'ensemble des événements correspondant à l'obtention d'une population k pour la première fois au rang i . Les A_i partitionnent A et

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(B|A_i)$$

La question précédente nous apprend que $\mathbb{P}(B|A_i) = 0$ (si on tombe sur une population de k individus, tout se passe ensuite comme dans l'expérience de cette partie) et finalement $\mathbb{P}(B) = 0$.

V.E Par continuité croissante, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^N \overline{A_n}\right)$$

Or, on a

$$\forall N \in \mathbb{N}, 0 \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^N \overline{A_n}\right) \leq \sum_{n=0}^N \mathbb{P}(\overline{A_n}) = 0$$

et ainsi,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}\right) = 0$$

On en déduit que (le complémentaire d'une réunion est l'intersection des complémentaires)

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}\right) = 1$$

V.F Si la suite $(Y_n(\omega))$ tend vers $+\infty$ alors elle finit pas dépasser définitivement en temps fini toute valeur k , ce qui implique qu'elle ne prend aucune valeur une infinité de fois. Réciproquement, si cette propriété a lieu alors pour tout entier k_0 et pour $j \in [0, k_0 - 1]$, la valeur j n'est plus prise à partir d'un rang n_j ; à partir du rang $\max(n_0, \dots, n_{k_0+1})$, on a $Y_n(\omega) \geq k_0$ et on a donc montré que $Y_n(\omega) \rightarrow +\infty$ (définition d'une limite infinie). L'événement "la suite (Y_n) est de limite infinie" est donc égal à l'intersection des événements A_k : "la suite (Y_n) ne prend pas une infinité de fois la valeur k " et sa probabilité est

$$\beta = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{\infty} A_k\right)$$

On a vu que les événements A_k pour $k \geq 1$ sont tous de probabilité 1. L'événement A_0 correspond, lui, à l'événement "la suite (Y_n) ne prend jamais la valeur 0" (prendre une fois la valeur 0 équivaut à prendre la valeur 0 à partir d'un certain rang) et sa négation est "la population finit par s'éteindre". On a donc $\mathbb{P}(A_0) = 1 - \alpha$.

Pour se ramener à la question précédente, j'utilise la formule des probabilités composées :

$$\beta = \mathbb{P}(A_0) \mathbb{P}_{A_0}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right)$$

Les A_k , $k \geq 1$, étant de probabilité 1 pour la probabilité conditionnelle, on a ainsi

$$\beta = \mathbb{P}(A_0) = 1 - \alpha$$