

Centrale 2015 - PSI 2

un corrigé

1 Résultats préliminaires

IA.1a Ω étant ouvert, il existe une boule centrée sur (x, y) de rayon r incluse dans Ω . On a alors

$$I \times J =]x - r/\sqrt{2}, x + r/\sqrt{2}[\times]y - r/\sqrt{2}, y + r/\sqrt{2}[\subset \Omega$$

En effet, si $(u, v) \in I \times J$ alors $|x - u| < r/\sqrt{2}$ et $|y - v| < r/\sqrt{2}$ et donc $(x - u)^2 + (y - v)^2 < r^2$ ce qui montre que $I \times J \subset D((x, y), r) \subset \Omega$.

Remarque : on peut illustrer ceci en remarquant qu'on peut inclure un carré dans un disque.

IA.1b P étant un polynôme de deux variables, on peut l'écrire (pour un bon n)

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, P(x, y) = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{l=0}^{n-k} \alpha_{k,l} y^l \right) x^k = \sum_{k=0}^n Q_k(y) x^k \text{ avec } \forall k, Q_k \in \mathbb{R}[X]$$

D'après ce qui précède, pour $y \in J$ fixé, $x \mapsto P(x, y)$ s'annule sur I . Comme c'est une fonction polynomiale et que I est infini, c'est la fonction polynomiale nulle. Ainsi (un polynôme d'une variable est nul quand ses coefficients le sont)

$$\forall k \in [0, d], \forall y \in J, Q_k(y) = 0$$

De la même façon, Q_k est le polynôme nul et tous les coefficients $\alpha_{k,l}$ le sont. P est donc le polynôme nul.

IA.2 $P : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$ est nul sur le cercle unité, qui possède une infinité d'éléments, mais n'est pas le polynôme nul. Le résultat précédent ne subsiste pas avec la seule hypothèse " Ω infini".

IB.1 Par définition, $\mathcal{P}_m$ est l'espace vectoriel engendré par la famille $(f_{k,l} : (x, y) \mapsto x^k y^l)_{\substack{k,l \in \mathbb{N} \\ k+l \leq m}}$.

C'est donc bien un espace vectoriel ! La famille génératrice trouvée est libre (puisque un polynôme n'est nul que si tous ses coefficients le sont). Elle forme une base de $\mathcal{P}_m$ et la dimension de l'espace est donc (pour chaque valeur de $k \in [0, m]$, on a $m - k + 1$ choix possibles pour l)

$$\dim(\mathcal{P}_m) = \sum_{k=0}^m (m - k + 1) = \sum_{j=1}^{m+1} j = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

IB.2 Posons $P_1 : (x, y) \mapsto x + y$. On a alors immédiatement $\Delta(P_1) = 0$. Il est en fait clair que tout polynôme de degré 1 est harmonique.

Posons $P_2 : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$. On a alors $\partial_{1,1} P_2(x, y) = 2$ et $\partial_{2,2} P_2(x, y) = -2$ ce qui montre que P_2 est harmonique.

IB.3a $P \mapsto \Delta P$ est une application linéaire (linéarité de la dérivation partielle) et l'ensemble des polynômes harmonique est l'espace vectoriel (une intersection de sous-espaces est un sous-espace)

$$\ker(\Delta) \cap \mathcal{P}$$

IB.3b D'après le théorème du rang,

$$\frac{(m+1)(m+2)}{2} = \dim(\mathcal{P}_m) = \dim(\ker(\Delta_m)) + \dim(\text{Im}(\Delta_m))$$

Or, de façon immédiate on a $\dim(\text{Im}(\Delta_m)) \subset \mathcal{P}_{m-2}$ (quand on dérive partiellement deux fois, on perd au moins deux degrés). Ainsi, $\dim(\text{Im}(\Delta_m)) \leq \frac{(m-1)m}{2}$ et donc

$$\dim(\ker(\Delta_m)) \geq \frac{(m+1)(m+2)}{2} - \frac{(m-1)m}{2} = 2m + 1$$

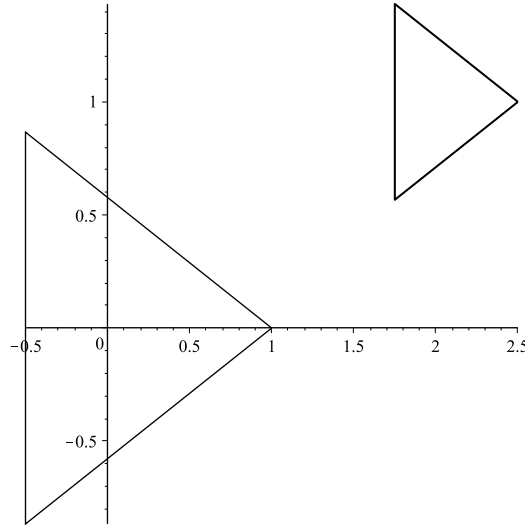
IB.3c Comme pour tout m on a $\ker(\Delta_m) \subset \ker(\Delta)$, on peut en déduire que l'espace vectoriel des polynômes harmoniques est de dimension infinie.

IC.1 Posons $H(x, y) = xy$. H est un polynôme harmonique qui est partout égal à $f : (x, y) \mapsto xy$.

IC.2 Une recherche au brouillon nous amène à poser $H(x, y) = x^4 - y^4 + (1 - x^2 - y^2)(x^2 - y^2)$. Il est évident que $H(x, y) = x^4 - y^4$ quand $(x, y) \in C(0, 1)$. Le calcul montre facilement que H est harmonique.

2 Quelques exemples d'applications harmoniques

II.A $\Omega_{x_0, y_0, \lambda}$ est l'image de Ω par une homothétie de rapport λ composée avec une translation de vecteur (x_0, y_0) . Dans le cas proposé, on obtient le dessin suivant



IIB.1 Comme $\partial_i f$ est de classe C^2 , on peut lui appliquer le théorème de Schwarz qui indique que l'on peut permuter les dérivées partielles. On a ainsi

$$\Delta(\partial_i f) = \partial_i(\Delta f)$$

Quand f est harmonique, $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ le sont donc aussi.

IIB.2 Comme il a été indiqué plus haut,

$$\Omega_{x_0, y_0, \lambda} = T_{(x_0, y_0)} \circ H_\lambda(\Omega)$$

où T_u est la translation de vecteur u et $H_\lambda = \lambda Id$ est l'homothétie de rapport λ (de centre l'origine). On notera que nos deux applications sont des bijections (réciproques) en sorte que

$$\Omega = H_{\lambda^{-1}} \circ T_{-(x_0, y_0)}(\Omega_{x_0, y_0, \lambda})$$

Soit $(x, y) \in \Omega_{x_0, y_0, \lambda}$; posons $(x', y') = H_{\lambda^{-1}} \circ T_{-(x_0, y_0)}(x, y)$. C'est un élément de Ω et il existe donc $r > 0$ tel que $D((x', y'), r) \subset \Omega$. On a alors

$$D((x, y), |\lambda|r) = T_{(x_0, y_0)} \circ H_\lambda(D((x', y'), r)) \subset T_{(x_0, y_0)} \circ H_\lambda(\Omega) = \Omega_{x_0, y_0, \lambda}$$

Ceci montre que $\Omega_{x_0, y_0, \lambda}$ est un ouvert.

On peut aussi conclure en remarquant que $\Omega_{x_0, y_0, \lambda}$ est l'image réciproque de Ω par l'application continue $H_{\lambda^{-1}} \circ T_{-(x_0, y_0)}$.

IIB.3 Posons $h(x, y) = g(\lambda(x, y) + (x_0, y_0))$. On a alors (quand g est de classe C^2 , h l'est aussi par théorèmes d'opérations)

$$\partial_{i,i} h(x, y) = \lambda^2 \partial_{i,i} g(\lambda(x, y) + (x_0, y_0))$$

et le caractère harmonique de g entraîne immédiatement celui de h .

IIC.1 h_1 et h_2 sont de classe C^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par théorèmes d'opérations. De plus

$$\partial_1 h_1(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad \partial_{1,1} h_1(x, y) = \frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\partial_2 h_1(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2}, \quad \partial_{2,2} h_1(x, y) = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

et on a donc $\Delta(h_1) = 0$, c'est à dire h_1 harmonique. En remarquant que $h_2 = \frac{1}{2} \partial_1 h_1$, on en déduit avec les questions précédentes que h_2 est aussi harmonique.

IIC.2 Notons φ_t l'application proposée. On a

$$\varphi_t = -1 + \cos(t) \partial_1 h_1 + \sin(t) \partial_2 h_1$$

qui est harmonique comme combinaison linéaire de fonctions harmoniques.

IID.1 On remarque que (en utilisant les notations introduites en question précédente)

$$N_t(x, y) = \varphi_t(x - \cos(t), y - \sin(t))$$

On est dans le cas de la question **II.B.3** avec $\lambda = 1$, $(x_0, y_0) = (-\cos(t), -\sin(t))$ et $g = \varphi_t$. Cette question indique que N_t est harmonique sur l'image Ω de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par $(x, y) \mapsto (x + \cos(t), y + \sin(t))$ c'est à dire sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(\cos(t), \sin(t))\}$. $D(0, 1)$ étant inclus dans Ω , N_t est harmonique sur $D(0, 1)$.

IID.2 Par théorèmes d'opérations, $t \mapsto N(x, y, t)$ est de classe C^∞ sur son domaine. Les seuls t qui peuvent poser problème sont ceux tels que $(x, y) = (\cos(t), \sin(t))$ et il n'y en a pas puisque $(x, y) \in D(0, 1)$. N_t est donc définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et donc en particulier elle est continue sur $[0, 2\pi]$.

IID.3 Après un calcul au brouillon (coefficients indéterminés), on devine que $\alpha = \beta = 1$ convient. On le vérifie.

$$\begin{aligned} -1 + \frac{1}{1 - ze^{-it}} + \frac{1}{1 - \bar{z}e^{it}} &= \frac{-(1 - ze^{-it})(1 - \bar{z}e^{it}) + 1 - \bar{z}e^{it} + 1 - ze^{-it}}{(1 - ze^{-it})(1 - \bar{z}e^{it})} \\ &= \frac{1 - z\bar{z}}{(z - e^{it})(\bar{z} - e^{-it})} \\ &= \frac{1 - (x^2 + y^2)}{|z - e^{it}|^2} \\ &= \frac{1 - (x^2 + y^2)}{(x - \cos(t))^2 + (y - \sin(t))^2} \\ &= N(x, y, t) \end{aligned}$$

IID.4 En utilisant le DSE de $\frac{1}{1+u}$ (valable sur $] -1, 1[$) et comme $|ze^{-it}| = |z| < 1$, on a

$$\forall t \in [0, 2\pi], \quad \frac{1}{1 - ze^{-it}} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k e^{-ikt}$$

Soit $f_k : t \mapsto z^k e^{-ikt}$. (f_k) est une suite de fonctions continues sur $[0, 2\pi]$ et $\|f_k\|_{\infty, [0, 2\pi]} = |z|^k$ est le terme général d'une série convergente (géométrique de raison $|z| < 1$). $\sum (f_k)$ est donc

normalement convergente sur le SEGMENT $[0, 2\pi]$. On est dans un des cas d'interversion somme-intégrale et on peut écrire

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - ze^{-it}} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \int_0^{2\pi} e^{-ikt} dt = 2\pi$$

toutes les intégrales étant nulles sauf celle pour $k = 0$. En conjuguant, on a aussi

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - \bar{z}e^{it}} = 2\pi$$

Avec la question précédente, on a alors

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N(x, y, t) dt = 1$$

3 Problème de Dirichlet sur le disque unité de $\mathbb{R}^2$

IIIA.1a Il s'agit d'utiliser le théorème de régularité des intégrales à paramètres. Ici, y est fixé et on pose $g(x, t) = N(x, y, t)f(\cos(t), \sin(t))$ pour $t \in [0, 2\pi]$ et $x \in I_y = \{x / x^2 + y^2 < 1\}$.

- Pour tout $x \in I_y$, $t \mapsto g(x, t)$ est continue sur le segment $[0, 2\pi]$ et donc intégrable sur ce segment.
- $x \mapsto g(x, t)$ est de classe C^2 sur I_y et ses dérivées sont $x \mapsto \partial_1 N_t(x, y)f(\cos(t), \sin(t))$ et $x \mapsto \partial_{1,1} N_t(x, y)f(\cos(t), \sin(t))$.
- Pour tout $x \in I_y$, $t \mapsto \partial_1 N_t(x, y)f(\cos(t), \sin(t))$ et $t \mapsto \partial_{1,1} N_t(x, y)f(\cos(t), \sin(t))$ sont continues sur $[0, 2\pi]$.
- Soit $[a, b] \subset I_y$.

Les applications $(x, t) \mapsto \partial_1 N_t(x, y)f(\cos(t), \sin(t))$ et $(x, t) \mapsto \partial_{1,1} N_t(x, y)f(\cos(t), \sin(t))$ sont continues sur le compact $[a, b] \times [0, 2\pi]$. On peut donc les majorer sur ce compact par des constantes. Les majorants sont indépendants de x et intégrables que $[0, 2\pi]$ (une fonction constante est intégrable sur un segment).

Le théorème s'applique et permet d'affirmer que N_f admet des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 par rapport à sa première variables. Ces dérivées s'obtiennent en dérivant partiellement sous l'intégrale. De façon plus générale,

$$\partial_{i,j} N_f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \partial_{i,j} N_t(x, y)f(\cos(t), \sin(t)) dt$$

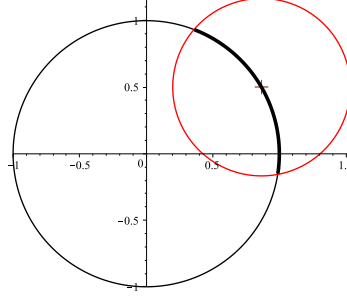
Ceci est vrai pour tout $(x, y) \in D(0, 1)$ et pour tous $i, j \in \{1, 2\}$, la même preuve permettant de conclure pour tout type de dérivation partielle à tout ordre. Un abus de notation (au vu des notations du préambule qui se contente de parler de fonctions de deux variables) donne $\partial_{i,j} N_t(x, y) = \partial_{i,j} N(x, y, t)$ et la formule de l'énoncé.

IIIA.1a En particulier, le caractère harmonique de N_t et la linéarité du passage à l'intégrale donnent le caractère harmonique de u qui est égale à N_f sur $D(0, 1)$.

IIIA.2a Pour visualiser la situation, on considère le point $M(t_0) = (\cos(t_0), \sin(t_0))$ sur le cercle unité. On s'intéresse alors à la boule $\bar{D}(M(t_0), \delta)$. Elle permet d'isoler un arc de cercle de $C(0, 1)$ (en gras ci-dessous) qui donne les valeurs convenable de l'angle t (on voit sur le dessin particulier qu'il y aura deux intervalles $[0, t_1]$ et $[t_2, 2\pi]$).

De façon générale, $C(M(t_0), \delta) \cap C(0, 1)$ étant une intersection de deux cercles peut contenir 0, 1 ou 2 points.

- Dans le premier ou le second cas, $\bar{D}(0, 1) \subset \bar{D}(M(t_0), \delta)$ et $I_0^\delta = [0, 2\pi]$.
- Dans le troisième cas, les points d'intersections sont $M(t_1)$ et $M(t_2)$ avec $t_0 - \pi < t_1 < t_0 < t_2 < t_0 + \pi$. Les t convenables sont ceux de $[0, 2\pi]$ tels que $M(t)$ est sur l'arc $M(t_1)M(t_2)$. Si $[t_1, t_2] \subset [0, 2\pi]$, on a $I_0^\delta = [t_1, t_2]$. Si $t_1 < 0$ alors $t_2 \in [0, 2\pi]$ et $I_0^\delta = [0, t_2] \cup [2\pi - t_1, 2\pi]$. Sinon, $t_2 > 2\pi$ et $I_0^\delta = [0, t_2 - 2\pi] \cup [t_1, 2\pi]$.



IIIA.2b Notons $M_0 = (x_0, y_0) = (\cos(t_0), \sin(t_0))$. f étant continue en M_0 , il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in \bar{D}(M_0, \delta), |f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq \frac{\varepsilon}{4\pi}$$

Pour tout $t \in I_0^\delta$, et en notant $M(t) = (\cos(t), \sin(t))$, on a alors (par définition de I_0^δ) $|f(M(t)) - f(M(t_0))| \leq \frac{\varepsilon}{4\pi}$ et donc (on majore par inégalité triangulaire)

$$\left| \int_{I_0^\delta} N(x, y, t) (f(M(t)) - f(M(t_0))) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_{I_0^\delta} |N(x, y, t)| dt$$

Comme N est positive et $I_0^\delta \subset [0, 2\pi]$, on en déduit (en utilisant **II.D4**) que

$$\left| \int_{I_0^\delta} N(x, y, t) (f(M(t)) - f(M(t_0))) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_{[0, 2\pi]} N(x, y, t) dt = \frac{\varepsilon}{2}$$

IIIA.2c Posons $M = (x, y)$, $M(t) = (\cos(t), \sin(t))$ et $M_0 = M(t_0)$. On suppose donc que $\|M - M_0\| \leq \delta/2$ et que $\|M(t) - M_0\| > \delta$ (par définition de I_0^δ). Par inégalité triangulaire (seconde forme) on a

$$\|M - M(t)\| \geq \|M(t) - M_0\| - \|M_0 - M\| \geq \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2} \geq 0$$

En élevant au carré (opération croissante sur $\mathbb{R}^+$) puis en passant à l'inverse (opération décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$) on en déduit que

$$\frac{1}{(x - \cos(t))^2 + (y - \sin(t))^2} \leq \frac{4}{\delta^2}$$

et ainsi

$$|N(x, y, t)| = N(x, y, t) \leq 4 \frac{1 - (x^2 + y^2)}{\delta^2}$$

IIIA.2d f étant continue sur $C(0, 1)$ qui est compact (fermé et borné), elle est bornée et on peut considérer $\|f\|_\infty = \sup_{C(0, 1)} |f|$. Une majoration grossière donne

$$\left| \int_{t \in [0, 2\pi] \setminus I_0^\delta} N(x, y, t) (f(M(t)) - f(M_0)) dt \right| \leq 2\|f\|_\infty \int_{t \in [0, 2\pi] \setminus I_0^\delta} N(x, y, t) dt$$

Si on impose $\|M - M_0\| \leq \delta/2$, on peut alors utiliser la question précédente pour affirmer (majoration grossière de $N(x, y, t)$ par une constante et multiplication par 2π qui majore la taille de l'intervalle d'intégration)

$$\left| \int_{t \in [0, 2\pi] \setminus I_0^\delta} N(x, y, t) (f(M(t)) - f(M_0)) dt \right| \leq 16\pi\|f\|_\infty \frac{1 - (x^2 + y^2)}{\delta^2} = c(1 - (x^2 + y^2))$$

Si $M = (x, y)$ est proche de $M_0 = (\cos(t_0), \sin(t_0))$ alors $x^2 + y^2 = \|M\|^2$ est proche de $\|M_0\|^2 = 1$. Il existe donc η_1 tel que si $\|M - M_0\| \leq \eta_1$ alors $c(1 - (x^2 + y^2)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (c est une constante, elle ne dépend que de δ). En posant $\eta = \min(\eta_1, \delta/2)$, on peut alors tout combiner pour obtenir

$$\left| \int_{t \in [0, 2\pi] \setminus I_0^\delta} N(x, y, t)(f(M(t)) - f(M_0)) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

IIIA.3 Il s'agit de montrer que

$$\forall t_0 \in [0, 2\pi], \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \|(x, y) - (\cos(t_0), \sin(t_0))\| \leq \eta \Rightarrow |u(x, y) - u(\cos(t_0), \sin(t_0))| \leq \varepsilon$$

On se donne donc t_0 et ε . Notons que l'expression de $|u(x, y) - u(\cos(t_0), \sin(t_0))|$ peut prendre deux formes :

- si $(x, y) \in C(0, 1)$, elle s'écrit $|f(x, y) - f(\cos(t_0), \sin(t_0))|$ et par continuité de f , il existe un η_1 tel qu'elle soit $\leq \varepsilon$ pour $\|(x, y) - (\cos(t_0), \sin(t_0))\| \leq \eta_1$.
- sinon elle s'écrit

$$|u(x, y) - u(\cos(t_0), \sin(t_0))| = \left| \int_0^{2\pi} N(x, y, t)(f(M(t)) - f(M_0)) dt \right|$$

IIIA.2b donne une valeur de δ pour laquelle **IIIA.2d** donne une valeur η_2 . On a alors, en découpant l'intégrale sur I_0^δ et son complémentaire,

$$|u(x, y) - u(\cos(t_0), \sin(t_0))| \leq \varepsilon$$

quand $\|(x, y) - (\cos(t_0), \sin(t_0))\| \leq \eta_2$.

En prenant $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$, on obtient une valeur convenable pour conclure.

On conclut alors que $u \in \mathcal{D}_f$, c'est à dire que u est solution sur le disque unité du problème de Dirichlet associé à f .

IIIB.1a u_n admet un maximum local en $(\tilde{x}, \tilde{y})$ qui est intérieur à $D(0, 1)$. Avec la question **IA.1a**, $x \mapsto u_n(x, \tilde{y})$ ne prend que des valeurs $\geq u_n(\tilde{x}, \tilde{y})$ sur un intervalle ouvert contenant $\tilde{x}$.

Or, si une fonction $g \in \mathcal{C}^2(a, b]$ atteint un maximum en c , $g'(c) = 0$ (résultat du cours de première année) et alors (Taylor-Young) $g(c + h) - g(c) = \frac{h^2}{2}g''(c) + o(h^2)$ et donc $g''(c) \leq 0$ (sinon, $g(c + h) - g(c) \sim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{2}g''(c)$ est localement strictement positive ce qui est en contradiction avec la maximalité locale en c).

On en déduit que $\partial_1 u_n(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$ et $\partial_{1,1} u_n(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq 0$.

IIIB.1b Un calcul direct donne (sachant que u est harmonique)

$$\forall (x, y) \in D(0, 1), \Delta u_n(x, y) = \frac{4}{n} > 0$$

et la question précédente montre, par l'absurde, que u_n n'admet pas de maximum local sur $D(0, 1)$.

IIIB.2 Cependant, u_n étant continue sur le compact $\bar{D}(0, 1)$ admet un maximum sur ce compact et il est donc atteint en un point de $C(0, 1)$ où u_n prend la valeur $1/n$ (car u est nulle sur le cercle). On a ainsi

$$\forall (x, y) \in \bar{D}(0, 1), u_n(x, y) \leq \frac{1}{n}$$

IIIB.3 Ce qui précède est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On peut (à x, y fixé quelconque) passer à la limite $n \rightarrow +\infty$ pour en déduire que

$$\forall (x, y) \in \bar{D}(0, 1), u(x, y) \leq 0$$

Mais $-u$ est clairement solution du même problème que u et on a donc aussi la positivité de u . Finalement

$$\forall (x, y) \in \bar{D}(0, 1), u(x, y) = 0$$

III.C On a construit un élément u de $\mathcal{D}_f$ (existence d'une solution). Si v est un autre élément, alors $u - v$ est solution de $\mathcal{D}_0$ et est donc nulle d'après **III.B**. Il y a donc aussi unicité d'une solution.

4 Retour sur les polynômes harmoniques

IVA.1 La linéarité de ϕ_{m-2} est immédiate :

$$\phi_{m-2}(Q_1 + \lambda Q_2) = \phi_{m-2}(Q_1) + \lambda \phi_{m-2}(Q_2)$$

Si $Q \in \mathcal{P}_{m-2}$ alors $\tilde{Q} \in \mathcal{P}_m$ et donc $\Delta\tilde{Q} \in \mathcal{M}_{m-2}$ (une dérivation partielle faisant perdre au moins un degré). On en déduit que

$$\text{Im}(\phi_{m-2}) \subset \mathcal{P}_{m-2}$$

c'est à dire que ϕ_{m-2} est un endomorphisme de $\mathcal{P}_{m-2}$.

Soit $Q \in \ker(\phi_{m-2})$. On a alors $\Delta\tilde{Q} = 0$. $\tilde{Q}$ est ainsi solution de $\mathcal{D}_0$ (puisque $\tilde{Q}$ est nulle sur $C(0,1)$). D'après la question **III.B**, $\tilde{Q} = 0$. Or, $Q \mapsto (1 - x^2 - y^2)Q$ est injective (elle est linéaire ; si $(1 - x^2 - y^2)Q$ alors Q s'annule sur $D(0,1)$ et est nul d'après **IA.1**). On en déduit que $Q = 0$ et ϕ_{m-2} est donc injective.

IVA.2 ϕ_{m-2} est un isomorphisme de $\mathcal{P}_{m-2}$ (application linéaire injective d'un espace de dimension dans lui même, ce qui entraîne la bijectivité). Comme $\Delta(-P) \in \mathcal{P}_{m-2}$, il admet donc un antécédent T par ϕ_{m-2} . On a alors $\Delta\tilde{T} = \Delta(-P)$ c'est à dire que $P + \tilde{T}$ est harmonique. On a donc montré qu'il existe $T \in \mathcal{P}_{m-2}$ tel que $P + (1 - x^2 - y^2)T$ soit harmonique.

IVA.3 $u = P + (1 - x^2 - y^2)T$ est harmonique et est égale à P_C sur le cercle unité. C'est donc une solution de $\mathcal{D}_{P_C}$. Avec **III.C** on peut dire que c'est l'unique solution. Et comme $T \in \mathcal{P}_{m-2}$, cette solution est dans $\mathcal{P}_m$.

IVA.4 On sait (**IVA.2**) que l'on peut trouver des réels a, b, c tels que $x^3 + (1 - x^2 - y^2)T(x, y)$ soit harmonique. Une recherche par coefficients indéterminés au brouillon montre que $T(x, y) = \frac{3}{4}x$ convient. D'après la question précédente,

$$\mathcal{D}_{P_C} = \{(x, y) \mapsto x^3 + \frac{3x}{4}(1 - x^2 - y^2)\}$$

IVB.1 L'existence d'une décomposition est donnée par la question **IVA.2** (on peut toujours trouver un $m \geq 2$ tel que $P \in \mathcal{P}_m$). Supposons que l'on puisse trouver deux décompositions. On a alors H_1, H_2 harmoniques et Q_1, Q_2 polynômes tels que

$$H_1(x, y) + (1 - x^2 - y^2)Q_1(x, y) = H_2(x, y) + (1 - x^2 - y^2)Q_2(x, y)$$

Posons $Q = Q_1 - Q_2$; il existe $m \geq 2$ tel que $Q \in \mathcal{P}_{m-2}$. La relation précédente donne $\Delta\tilde{Q} = 0$ et donc $Q \in \ker(\phi_{m-2})$. Ceci donne (par injectivité) la nullité de Q et donc $Q_1 = Q_2$. $H_1 = H_2$ en découle. On a ainsi prouvé l'unicité de la décomposition.

IVB.2 Soit $m \geq 2$. Montrons que

$$\mathcal{P}_m = \mathcal{H}_m \oplus (1 - x^2 - y^2)\mathcal{P}_{m-2}$$

- L'injectivité de ϕ_{m-2} donne le caractère direct de la somme (l'intersection des espaces est égale au noyau de ϕ_{m-2} et réduite au polynôme nul).
- Soit $P \in \mathcal{P}_m$. La question **IVA.2** donne $T \in \mathcal{P}_{m-2}$ tel que $H = P + (1 - x^2 - y^2)T$ soit harmonique. Comme c'est un élément de $\mathcal{P}_m$, $H \in \mathcal{H}_m$. Ainsi, $P = H - (1 - x^2 - y^2)T \in \mathcal{H}_m \oplus (1 - x^2 - y^2)\mathcal{P}_{m-2}$.

Comme $T \mapsto (1 - x^2 - y^2)T$ est injective (vu plus haut en **IVA.1**), $(1 - x^2 - y^2)\mathcal{P}_{m-2}$ et $\mathcal{P}_{m-2}$ ont même dimension et donc

$$\dim(\mathcal{H}_m) = \dim(\mathcal{P}_m) - \dim(\mathcal{P}_{m-2}) = 2m + 1$$

Le résultat reste vrai pour $m \in \{0, 1\}$ (dans ces deux cas $\mathcal{H}_m = \mathcal{P}_m$).

IVB.3 Pour trouver une base $\mathcal{H}_3$, il nous suffit d'exhiber 7 polynômes harmoniques de degré ≤ 3 et indépendants. Certains sont immédiats comme $1, x, y, xy$. Il est clair que $x^2 - y^2$ convient aussi. En question **IVA.4** on a trouvé un polynôme convenable de degré 3. Par symétrie des rôles, on en trouve un autre. On obtient ainsi une famille de 7 éléments de $\mathcal{H}_3$ dont on vérifie aisément l'indépendance.

$$\mathcal{H}_3 = \text{Vect} \left(1, x, y, xy, x^2 - y^2, x^3 + \frac{3x}{4}(1 - x^2 - y^2), y^3 + \frac{3y}{4}(1 - x^2 - y^2) \right)$$

IVC.1 On peut interpréter le problème de la manière suivante : on dispose m objets indiscernables en ligne (on obtient une ligne $O O O \cdots O$) et on veut les regrouper en n paquets de taille ≥ 0 . Il s'agit alors de placer $n - 1$ "symboles de séparation" (par exemple $i_1 = 0, i_2 = 2, i_3 = 1, i_4 = 0, i_5 = 0$ correspond à $|O O|O||$). Il s'agit donc de choisir $n - 1$ emplacements parmi les $n + m - 1$ symboles. Le nombre de possibilités est $\binom{n+m-1}{n-1} = \binom{n+m-1}{m}$. On obtient ici le nombre des "monômes" de degré m . On peut alors compter les nombre d'éléments de la base "canonique" de $\mathcal{P}_m$:

$$\dim(\mathcal{P}_m) = \sum_{k=0}^m \binom{n+k-1}{k}$$

IVC.2 On va cette fois obtenir

$$\mathcal{P}_m = \mathcal{H}_m \oplus (1 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2)\mathcal{P}_{m-2}$$

et encore

$$\dim(\mathcal{H}_m) = \dim(\mathcal{P}_m) - \dim(\mathcal{P}_{m-2})$$

La question précédente donne

$$\dim(\mathcal{H}_m) = \binom{n+m-1}{m} + \binom{n+m-2}{m-1}$$