Mines M1 2021 - Corrigé - Relu

Variables aléatoires entières symétriques à forte dispersion

Questions de cours

1. • X est d'espérance finie si et seulement si
   — $X(\Omega)$ est fini
   — ou $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable et la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente.
   • Soit X une variable aléatoire d'espérance finie.
   — si $X(\Omega)$ est fini, alors $|X|(\Omega) = \{|x|, x \in X(\Omega)\}$ est fini, donc $|X|$ est d'espérance finie
   — si $X(\Omega)$ est dénombrable, alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente, donc $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n| P(X = x_n)$ converge absolument, donc, d'après le théorème de transfert, $|X|$ est d'espérance finie.
   Dans tous les cas, on a bien $|X|$ d'espérance finie.
   • Réciproquement, soit $|X|$ d'espérance finie.
   — si $|X|(\Omega)$ est fini, alors $X(\Omega) \subset \{\pm x, x \in |X|(\Omega)\}$ est fini, donc X est d'espérance finie
   — si $|X|(\Omega)$ est dénombrable, alors d'après le théorème de transfert, $\sum\limits_{x\in X(\Omega)} |x| P(X = x)$ converge absolument, donc $\sum\limits_{x\in X(\Omega)} x P(X = x)$ converge absolument, donc X est d'espérance finie.
   Dans tous les cas, on a bien X d'espérance finie.
   • On a donc bien l'équivalence souhaitée.
2. Soit X une variable aléatoire.
   Si X est finie, la propriété est évidente.
   Supposons $X(\Omega)$ dénombrable. S'il existe un réel $M \geq 0$ tel que $P(|X| \leq M) = 1$, alors, pour tout $x \in X(\Omega)$ tel que $|x| > M$, on a $(X = x) \subset (|X| > M)$, donc

$$0 \leq P(X = x) \leq P(X > M) = 1 - P(X \leq M) = 0,$$

   donc $P(X = x) = 0$.
   En notant $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   — si $|x_n| > M$, alors $|x_n| P(X = x_n) = 0 \leq M P(X = x_n)$,
   — si $|x_n| \leq M$, alors $|x_n| P(X = x_n) \leq M P(X = x_n)$,
   donc, dans tous les cas, $|x_n P(X = x_n)| \leq M P(X = x_n)$. Or $\sum\limits_{n\geq 0} M P(X = x_n)$ converge (et vaut M, car $(X = x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements), donc, par comparaison, $\sum\limits_{n\geq 0} |x_n P(X = x_n)|$ converge, donc $\sum\limits_{n\geq 0} x_n P(X = x_n)$ converge absolument, donc X est d'espérance finie.

Généralités sur les variables aléatoires

3. Comme X est une variable aléatoire entière, on a $X(\Omega) \subset \mathbb{Z}$, donc $|X|(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
   De plus, comme X vérifie la condition $(\mathcal{D}_\alpha)$, on a $P(|X| \geq n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{n}$.
   Or la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\alpha}{n}$ diverge (harmonique et $\alpha \neq 0$), donc, par comparaison de série <u>à termes positifs,</u> $\sum\limits_{n\geq 0} P(|X| \geq n)$ diverge, donc $|X|$ n'est pas d'espérance finie, donc X n'est pas d'espérance finie (cf question 1)
4. • Pour tout $y \in f(X)(\Omega)$,

$$\{x \in X(\Omega) : f(x) = -y\} = \{x \in X(\Omega) : -f(x) = y\} \underset{f \text{ impaire}}{=} \{x \in X(\Omega) : f(-x) = y\} = \{-x, x \in X(\Omega) \text{ et } f(x) = y\},$$

   donc, comme $(f(X) = -y) = \bigcup\limits_{x\in X(\Omega), f(x)=-y} (X = x)$, où l'union est disjointe, on a :

$$\begin{aligned} P(f(X) = -y) &= \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ f(x)=-y}} P(X = x) = \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ f(x)=y}} P(X = -x) \\ &= \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ f(x)=y}} P(X = x) \quad \text{(car } X \text{ est symétrique)} \\ &= P(f(X) = y), \end{aligned}$$

donc $f(X)$ est symétrique.

• Si Z est symétrique et d'espérance finie, alors Z et $-Z$ ont la même loi, donc la même espérance. Or, par linéarité de l'espérance, $E(-Z) = -E(Z)$, donc on a

$$E(-Z) = E(Z) \Rightarrow -E(Z) = E(Z) \Rightarrow 2E(Z) = 0 \Rightarrow E(Z) = 0.$$

En particulier, ici, comme $f(X)$ est symétrique et d'espérance finie, on a $E(f(X)) = 0$.

5. Soit X et Y deux variables aléatoires symétriques indépendantes.

• Pour tout $(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$,

$$\begin{aligned} P((-X,-Y) = (x,y)) &= P(-X = x \cap -Y = y) = P(-X = x)P(-Y = y) \quad \text{(car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes)} \\ &= P(X = x)P(Y = y) \quad \text{(car } X \text{ et } Y \text{ sont symétriques)} \\ &= P(X = x \cap Y = y) \quad \text{(car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\ &= P((X,Y) = (x,y)), \end{aligned}$$

donc $(-X,-Y)$ et (X,Y) suivent la même loi.

• Pour tout $z \in (X+Y)(\Omega)$,

$$\begin{aligned} P(X+Y = z) &= \sum_{\substack{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ x+y=z}} P((X,Y) = (x,y)) \\ &= \sum_{\substack{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ x+y=z}} P((-X,-Y) = (x,y)) \\ &= P(-X-Y = z) = P(X+Y = -z), \end{aligned}$$

donc $X+Y$ est symétrique.

Deux sommes de séries

6. • Soit $\ell : u \in [0,1] \mapsto \dfrac{z}{1-uz}$.

Comme $|z| \leq 1$, pour tout $u \in [0,1[$, $|1-uz| \geq 1-u|z| \geq 1-u > 0$, donc $1-uz \neq 0$, donc $\ell(u)$ est bien défini.

Pour $u = 1$, $1-uz = 1-z \neq 0$ car on a supposé $z \neq 1$, donc $\ell(1)$ est bien défini.

ℓ est donc bien définie sur $[0,1]$. De plus, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$ comme quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

Par suite, comme ℓ est continue sur $[0,1]$ et $0 \in [0,1]$, $L : t \in [0,1] \mapsto \displaystyle\int_0^t \frac{z}{1-uz} du$ est la primitive de ℓ qui s'annule en 0.

Comme ℓ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$, L l'est aussi.

• On a donc, pour tout $t \in [0,1]$, $L'(t) = \ell(t) = \dfrac{z}{1-tz}$.

Montrons par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, $L^{(n)} : t \mapsto \dfrac{(n-1)!z^n}{(1-tz)^n}$ (HR_n).

Initialisation : Pour $n = 1$, on a bien $L' : t \mapsto \dfrac{z}{1-tz} = \dfrac{(0)!z^1}{(1-tz)^1}$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons HR_n vérfiée.

Alors

$$L^{(n+1)} = (L^{(n)})' : t \mapsto \frac{(n-1)!z^n \times (-n) \times (-z) \times (1-tz)^{n-1}}{(1-tz)^{2n}} = \frac{n!z^{n+1}}{(1-tz)^{n+1}}.$$

On a bien HR_{n+1}.

Conclusion : D'où, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $L^{(n)} : t \in [0,1] \mapsto \dfrac{(n-1)!z^n}{(1-tz)^n}$.

7. • Pour tout $t \in]0,1]$, $|1-tz| \geq |1| - |tz| = 1 - t|z| \geq 1-t$.

• De plus, pour avoir l'égalité, les deux inégalités doivent être des égalités, donc on doit avoir

— $1 - t|z| = 1-t \Leftrightarrow |z| = 1$

— et $|1-tz| = |1| - |tz|$. On est donc dans le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire utilisée ici :

$$|1| = |(1-tz) + tz| = |1-tz| + |tz|,$$

donc $1-tz$ et tz doivent être positivement liés, donc il existe $\lambda \geq 0$ tel que $1-tz = \lambda(tz)$, donc on a

$$1 = (1-tz) + tz = (1+\lambda)tz = \underbrace{((1+\lambda)t)}_{>0} z,$$

donc $z = \dfrac{1}{(1+\lambda)t} \in \mathbb{R}_+^*$.

Pour avoir l'égalité, on doit donc avoir $|z| = 1$ et $z \in \mathbb{R}_+^*$, donc $z = 1$, ce qui est exclu dans l'énoncé.
On a donc, pour tout $t \in]0,1]$, on a $1 - t < |1 - tz|$.

8. • Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \in]0,1] \mapsto \left|\frac{1-t}{1-tz}\right|^n$.
— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue (par morceaux) sur $]0,1]$ (le dénominateur ne s'annule pas)
— Pour tout $t \in]0,1]$, $f_n(t) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ (suite géométrique de raison $\left|\frac{1-t}{1-tz}\right| \in]-1,1[$ d'après la question précédente), donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,1[$ vers la fonction nulle, qui est continue (par morceaux) sur $]0,1]$.
— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in]0,1]$, $|f_n(t)| \leq 1 = \varphi(t)$ où φ est intégrable sur $]0,1]$ (car constante sur un intervalle borné)
D'où, d'après le théorème de convergence dominée, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur $]0,1]$ et

$$\int_0^1 \left|\frac{1-t}{1-tz}\right|^n dt = \int_0^1 f_n(t)dt \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^1 0dt = 0.$$

• Procédons de même en posant cette fois-ci, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n : t \in]0,1] \mapsto \frac{z^{n+1}(1-t)^n}{(1-tz)^{n+1}} = \left(\frac{z(1-t)}{1-tz}\right)^n \ell(t)$.
— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est continue (par morceaux) sur $]0,1]$ (le dénominateur ne s'annule pas)
— Pour tout $t \in]0,1]$, $g_n(t) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ (suite géométrique de raison $\frac{z(1-t)}{1-tz}$ où $\left|\frac{z(1-t)}{1-tz}\right| \leq \left|\frac{1-t}{1-tz}\right| < 1$ d'après la question précédente), donc la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,1[$ vers la fonction nulle, qui est continue (par morceaux) sur $]0,1]$.
— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in]0,1]$,

$$|g_n(t)| = \left|\frac{z(1-t)}{1-tz}\right|^n |\ell(t)| \leq 1.\|\ell\|_\infty^{[0,1]} = \varphi(t)$$

où φ est intégrable sur $]0,1]$ (car constante sur un intervalle borné).
$\|\ell\|_\infty^{[0,1]}$ *existe car* ℓ *est continue sur le segment* $[0,1]$.
D'où, d'après le théorème de convergence dominée, pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est intégrable sur $]0,1]$ et

$$\int_0^1 \frac{z^{n+1}(1-t)^n}{(1-tz)^{n+1}}dt = \int_0^1 g_n(t)dt \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^1 0dt = 0.$$

9. Comme L est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$, on a, d'après la formule de Taylor reste intégral,

$$\begin{aligned} L(1) &= \sum_{k=0}^n \frac{L^{(k)}(0)}{k!}(1-0)^k + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}L^{(n+1)}(t)dt = \underbrace{L(0)}_{=0} + \sum_{k=1}^n \frac{(k-1)!z^k}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\frac{n!z^{n+1}}{(1-tz)^{n+1}}dt \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{z^k}{k} + \int_0^1 \frac{z^{n+1}(1-t)^n}{(1-tz)^{n+1}}dt, \end{aligned}$$

donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{z^k}{k} = L(1) - \int_0^1 \frac{z^{n+1}(1-t)^n}{(1-tz)^{n+1}}dt \underset{n\to+\infty}{\to} L(1) \quad \text{(d'après la question précédente)},$$

donc $\sum_{n\geq1} \frac{z^n}{n}$ converge (car sa suite des sommes partielles converge) et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} = L(1).$$

10. • Pour tout $(t,u) \in \mathbb{R}^2$, $\gamma(t,u) = |1 + ue^{it}| = |(1 + u\cos t) + i\sin t| = \sqrt{(1+u\cos t)^2 + \sin^2 t}$, donc γ est continue sur $\mathbb{R}^2$ par opérations sur les fonctions usuelles.
Si on veut préciser, on peut dire que $h : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (t,u) & \mapsto (1+u\cos t)^2 + \sin^2 t \end{cases}$ *est continue sur* $\mathbb{R}^2$ *par opérations sur les fonctions usuelles, à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$ *et* $\sqrt{.}$ *est continue sur* $\mathbb{R}_+$*, donc, par composition,* γ *est continue sur* $\mathbb{R}^2$.
• Soit $a \in]0,\pi[$.
$[-a,a] \times [0,1]$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$ et γ est continue sur $\mathbb{R}^2$, espace vectoriel de dimension finie, donc elle est bornée sur $[-a,a] \times [0,1]$ et atteint ses bornes.
Il existe donc $(t_a,u_a) \in [-a,a] \times [0,1]$ tel que pour tout $(t,u) \in [-a,a] \times [0,1]$

$$\gamma(t,u) \geq \gamma(t_a,u_a) = m_a.$$

Enfin,

$$\begin{aligned}\gamma(t_a,u_a) &= |1+u_a e^{it_a}| = |e^{-it_a}+u_a| = \sqrt{(u_a+\cos t_a)^2+\sin^2 t_a} = \sqrt{u_a^2+1+2u_a\cos(t_a)}\\ &= \begin{cases} 1>0 & \text{si } u_a=0\\ \sqrt{u_a^2+1+2\underbrace{u_a\cos(t_a)}_{>-1 \text{ car } t_a\in]0,\pi[}} > \sqrt{u_a^2+1-2u_a} = \sqrt{(u_a-1)^2} = |u_a-1|\geq 0 & \text{si } u_a>0\end{cases}\end{aligned}$$

On a donc bien $m_a=\gamma(t_a,u_a)>0$. *L'énoncé disait "en déduire". J'ai donc été amené à utiliser le théorème des bornes atteintes pour utiliser la première partie de la question. Cependant, il aurait été plus simple de s'en passer... Dans la question suivante, je redémontre la même chose sans passer par tout ça...*

11. Soit $f:(t,u)\in]-\pi,\pi[\times[0,1]\mapsto \dfrac{e^{it}}{1+ue^{it}} = \dfrac{1}{e^{-it}+u}$.
— Pour tout $t\in]-\pi,\pi[$, $u\mapsto f(t,u)$ est continue sur le segment $[0,1]$ (car le dénominateur ne s'annule pas), donc intégrable sur $[0,1]$
— Pour tout $u\in[0,1]$, $t\mapsto f(t,u)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi,\pi[$ (car le dénominateur ne s'annule pas) et, pour tout $t\in]-\pi,\pi[$,

$$u\mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(t,u) = \frac{ie^{-it}}{(e^{-it}+u)^2}$$

est continue (par morceaux) sur $[0,1]$.
— Pour tout $a\in]0,\pi[$, pour tout $t\in[-a,a]$, pour tout $u\in[0,1]$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,u)\right| &= \frac{1}{|e^{-it}+u|^2} = \frac{1}{|(u+\cos t)-i\sin(t)|^2}\\ &= \frac{1}{(u+\cos t)^2+\sin^2 t} = \frac{1}{u^2+1+2u\cos t}\\ &\geq \frac{1}{u^2+1+2u\cos a} = \varphi(u),\end{aligned}$$

où φ est intégrable sur $[0,1]$ car continue sur le segment $[0,1]$ (en effet, $u\mapsto u^2+1+2u\cos a$ est un trinôme et $\Delta=4\cos^2 a-4<0$, donc il ne s'annule pas sur $[0,1]$).

D'où, d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a,a]$.
Ceci étant valable pour tout $a\in]0,\pi[$, F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi,\pi[$ et, pour tout $t\in]-\pi,\pi[$,

$$F'(t) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(t,u)du = \int_0^1 \frac{ie^{-it}}{(e^{-it}+u)^2}du = \int_0^1 \frac{ie^{it}}{(1+ue^{it})^2}du.$$

12. Pour tout $t\in]-\pi,\pi[$,

$$\begin{aligned}F'(t) &= \int_0^1 \frac{ie^{it}}{(1+ue^{it})^2}du = \left[i\frac{-1}{1+ue^{it}}\right]_0^1\\ &= i\left(-\frac{1}{1+e^{it}}+1\right) = i\frac{e^{it}}{1+e^{it}} = i\frac{e^{it/2}}{e^{it/2}+e^{-it/2}}\\ &= \frac{i\cos(t/2)-\sin(t/2)}{2\cos(t/2)} = -\frac{\tan(t/2)}{2}+\frac{i}{2}.\end{aligned}$$

D'où, pour tout $t\in]-\pi,\pi[$, comme $0\in]-\pi,\pi[$, on a

$$F(t) = F(0)+\int_0^t F'(x)dx = F(0)+\left[\ln(|\cos(x/2)|)+\frac{ix}{2}\right]_0^t = F(0)+\ln(\cos(t/2))+\frac{it}{2},$$

car, comme $t/2\in]-\pi/2,\pi/2[$, on a $\cos(t/2)>0$. De plus, $F(0)=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+u}du = [\ln(1+u)]_0^1 = \ln(2)$, donc

$$\forall t\in]-\pi,\pi[,\quad F(t) = \ln(2\cos(t/2))+\frac{it}{2}.$$

13. Soit $\theta\in]0,2\pi[$.
- $\pi-\theta\in]-\pi,\pi[$, donc, d'après la question précédente,

$$F(\pi-\theta) = \ln(2\cos(\pi/2-\theta/2))+i\frac{\pi-\theta}{2} = \ln(2\sin(\theta/2))+i\frac{\pi-\theta}{2}.$$

- Or, on a aussi

$$F(\pi-\theta) = \int_0^1 \frac{e^{i(\pi-\theta)}}{1+ue^{i(\pi-\theta)}}du = -\int_0^1\frac{e^{-i\theta}}{1-ue^{i\theta}}du = -L(1),$$

où L a été introduite dans la question 6, en prenant $z = e^{-i\theta}$, qui vérifie bien $|z| \leq 1$ et $z \neq 1$, car $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$.
D'après la question 9, on a donc

$$F(\pi - \theta) = -L(1) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-in\theta}}{n}.$$

De plus, comme $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{-in\theta}}{n}$ converge, $\sum_{n\geq 1} \mathrm{Re}\left(\frac{e^{-in\theta}}{n}\right) = \sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n}$ et $\sum_{n\geq 1} \mathrm{Im}\left(\frac{e^{-in\theta}}{n}\right) = \sum_{n\geq 1} -\frac{\sin(n\theta)}{n}$ convergent et

$$\ln(2\sin(\theta/2)) + i\frac{\pi - \theta}{2} = F(\pi - \theta) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-in\theta}}{n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} + i\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n}.$$

En identifiant parties réelle et imaginaire, on obtient bien :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi - \theta}{2}.$$

Fonction caractéristique d'une variable aléatoire symétrique

14. • Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire $\cos(tX)$ est bornée (à valeurs dans $[-1,1]$), donc, d'après la question 2, elle admet une espérance, donc $\Phi_X(t)$ existe.
Φ_X est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.
• Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $-t \in \mathbb{R}$ et, pour tout $\omega \in \Omega$, $\cos(-tX(\omega)) = \cos(tX(\omega))$, donc les deux variables $\cos(tX)$ et $\cos(-tX)$ sont égales, donc $E(\cos(tX)) = E(\cos(-tX))$, i.e. $\Phi_X(t) = \Phi_X(-t)$.
Φ_X est donc bien paire.
• Enfin, pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout $\omega \in \Omega$, $-1 \leq \cos(tX(\Omega)) \leq 1$, donc, par croissance de l'espérance,

$$E(-1) \leq E(\cos(tX)) \leq E(1), \quad \text{i.e.} \quad -1 \leq \Phi_X(t) \leq 1.$$

On a donc bien $|\Phi_X(t)| \leq 1$.

15. • Supposons $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ fini.
D'après le théorème de transfert,

$$\Phi_X : t \mapsto E(\cos(tX)) = \sum_{k=1}^{n} \cos(tx_k)P(X = x_k)$$

est continue comme combinaison linéaire (finie!!!) de fonctions continues.
• Supposons $X(\Omega = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ dénombrable.
D'après le théorème de transfert,

$$\Phi_X : t \mapsto E(\cos(tX)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(tx_n)P(X = x_n).$$

Posons alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \mapsto \cos(tx_n)P(X = x_n)$.
— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $\mathbb{R}$
— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|f_n(t)| \leq P(X = x_n),$$

donc $\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}} \leq P(X = x_n)$.
Or $\sum_{n\geq 0} P(X = x_n)$ converge (et sa somme vaut 1, car $((X = x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements), donc, par comparaison, $\sum_{n\geq 0} \|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}}$ converge, donc $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$.

D'où, d'après le théorème de continuité des séries de fonctions, $\Phi_X = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}$.

16. *Afin d'éviter les problèmes posés par les séries indéxées sur $\mathbb{Z}$, qui, selon moi, sont hors-programme, je montre d'abord un premier point, qui permettra de se ramener à une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$.*
• Soit X une variable aléatoire quelconque.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout $\omega \in \Omega$, $t|X|(\omega) = \pm tX(\omega)$, donc, par parité de la fonction cos, on a

$$\cos(t|X|(\omega)) = \cos(tX(\omega)),$$

donc les deux variables $\cos(tX)$ et $\cos(t|X|)$ sont égales, donc ont la même espérance, donc $\Phi_X(t) = \Phi_{|X|}(t)$.
Ceci étant valable pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\Phi_X = \Phi_{|X|}$.
• Revenons à la question posée, en supposant donc que X est une variable entière symétrique vérifiant la condition $(\mathcal{D}_\alpha)$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, d'après le théorème de transfert appliqué à la variable $|X|$, comme $|X|(\Omega) \subset \mathbb{N}$, on a :

$$\Phi_X(t) = \Phi_{|X|}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(nt)P(|X| = n).$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} P(|X| \geq n) &= P(|X| = n \cup |X| > n) = P(|X| = n) + P(|X| > n) \quad \text{(incompatibles)} \\ &= P(|X| = n) + P(|X| \geq n+1) \quad (\text{car } |X|(\Omega) \subset \mathbb{N}), \end{aligned}$$

donc on a $P(|X| = n) = P(|X| \geq n) - P(|X| \geq n+1) = R_n - R_{n+1}$, et, par suite, on a bien

$$\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(nt) P(|X| = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} (R_n - R_{n+1}) \cos(nt).$$

Cette égalité étant valable pour tout $t \in \mathbb{R}$, elle est valable pour tout $t \in]0, 2\pi[$.

• Soit $t \in]0, 2\pi[$. Montrons que $\sum_{n \geq 0} R_n \cos(nt)$ converge.

Comme X vérifie la condition $(\mathcal{D}_\alpha)$, on a $P(|X| \geq n) = \dfrac{\alpha}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, donc

$$R_n \cos(nt) = \alpha \frac{\cos(nt)}{n} + \underbrace{\cos(nt)}_{\text{borné}} O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \alpha \frac{\cos(nt)}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \alpha \frac{\cos(nt)}{n} + w_n,$$

où $w_n = R_n \cos(nt) - \alpha \dfrac{\cos(nt)}{n} = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Or $\sum_{n \geq 1} \dfrac{\cos(nt)}{n}$ converge (d'après la question 13 avec $t \in]0, 2\pi[$) et $\sum_{n \geq 1} w_n$ converge (par comparaison, car $w_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$), donc $\sum_{n \geq 0} R_n \cos(nt)$ converge comme combinaison linéaire de séries convergentes.

• Soit $t \in]0, 2\pi[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} (R_k - R_{k+1}) \cos(kt) &= \sum_{k=0}^{n} R_k \cos(kt) - \sum_{k=0}^{n} R_{k+1} \cos(kt) \\ &= \sum_{k=0}^{n} R_k \cos(kt) - \sum_{j=1}^{n+1} R_j \cos((j-1)t) \quad (\text{en posant } j = k+1) \\ &= R_0 \cos(0) + \sum_{k=1}^{n} R_k \cos(kt) - \sum_{j=1}^{n} R_j \cos((j-1)t) - R_{n+1} \cos(nt) \\ &= P(|X| \geq 0) + \sum_{k=1}^{n} R_k (\cos(kt) - \cos((k-1)t)) - R_{n+1} \cos(nt) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} R_k (\cos(kt) - \cos((k-1)t)) - R_{n+1} \cos(nt), \end{aligned}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n} R_k (\cos(kt) - \cos((k-1)t)) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} (R_k - R_{k+1}) \cos(kt)}_{\to \Phi_X(t)} - 1 + \underbrace{R_{n+1}}_{\sim \alpha/(n+1) \to 0} \underbrace{\cos(nt)}_{\text{borné}} \underset{n \to +\infty}{\to} -1 + \Phi_X(t),$$

donc $\sum_{n \geq 1} R_n \left[\cos(nt) - \cos((n-1)t)\right]$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \left[\cos(nt) - \cos((n-1)t)\right] = \Phi_X(t) - 1. \quad \text{cqfd.}$$

Quel est l'intérêt du troisième point, suggéré par l'énoncé ?

17. • Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : t \in \mathbb{R} \mapsto \left(R_n - \dfrac{\alpha}{n}\right) e^{int}$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $\mathbb{R}$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|f_n(t)| = \left| R_n - \frac{\alpha}{n} \right| . |e^{int}| = \left| R_n - \frac{\alpha}{n} \right|,$$

donc $\|f_n\|_\infty = \left| R_n - \dfrac{\alpha}{n} \right| = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Or $\sum_{n \geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge (Riemann et $2 > 1$), donc, par comparaison, $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_\infty$ converge, donc $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de continuité des séries de fonctions, $f : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc, en particulier,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right) e^{int} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) = f(t) \underset{t \to 0^+}{\to} f(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right).$$

• D'où, pour tout $t \in]0, 2\pi[$, comme pour tout $n \geq 1$,

$$R_n e^{int} = \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right) e^{int} + \alpha \frac{e^{int}}{n}$$

où $\sum\limits_{n\geq 1} \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right) e^{int}$ et $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{e^{int}}{n}$ convergent (1er point de cette question, où on a CVN, donc CVS, et question 9 avec $z = e^{it}$ pour la deuxième), la série $\sum\limits_{n\geq 1} R_n e^{int}$ converge comme combinaison linéaire de séries convergentes et

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} R_n e^{int} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right) e^{int} + \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{int}}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right) e^{int} + \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{n} + i\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{n} \\
&= C + o(1) - \alpha \ln(2\sin(t/2)) + i\alpha \frac{\pi - t}{2} \quad \text{(d'après la question 13 avec } \theta = t \in]0, 2\pi[) \\
&= -\alpha \ln(t) + C + o(1) - \alpha \underbrace{\ln \underbrace{\left(\frac{2\sin(t/2)}{t}\right)}_{\sim 2(t/2)/t \to 1}}_{\to 0} + i\alpha \underbrace{\frac{\pi - t}{2}}_{\to \pi/2} \\
&= -\alpha \ln(t) + C + i\alpha \frac{\pi}{2} + \underset{t\to 0^+}{o}(1).
\end{aligned}$$

En passant aux parties réelle et imaginaire, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos(nt) = -\alpha \ln(t) + C + o(1) = \underset{t\to 0^+}{O}(\ln(t)) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin(nt) = \frac{\pi\alpha}{2} + o(1).$$

Rq : On a en fait obtenu beaucoup mieux que le $O(.)$ demandé.

18. • Pour tout $t \in]0, 2\pi[$,

$$\cos((n-1)t) = \cos(nt)\cos(t) + \sin(nt)\sin(t),$$

donc

$$\begin{aligned}
\Phi_X(t) &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \left[\cos(nt) - \cos((n-1)t)\right] \quad \text{(d'après la question 16)} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \left[\cos(nt)(1 - \cos(t)) - \sin(nt)\sin(t)\right] \\
&= 1 + (1 - \cos(t)) \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos(nt) - \sin(t) \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin(nt) \quad \text{(car ces deux séries convergent)} \\
&= 1 + O(t^2)O(\ln(t)) - (t + o(t))\left(\frac{\pi\alpha}{2} + o(1)\right) \quad \text{(d'après la question précédente)} \\
&= 1 + O(t^2 \ln(t)) - \frac{\pi\alpha}{2} t + o(t) \\
&= 1 - \frac{\pi\alpha}{2} t + o(t)
\end{aligned}$$

car $t\ln(t) = \underset{t\to 0}{o}(1)$, donc $O(t^2\ln(t)) = o(t)$.

• Φ_X admet un développement limité à l'ordre 1 en 0^+, donc Φ_X est dérivable à droite en 0 et $(\Phi_X)'_d(0) = -\frac{\pi\alpha}{2}$.
Comme Φ_X est paire, Φ_X est aussi dérivable à gauche en 0 et $(\Phi_X)'_g(0) = \frac{\pi\alpha}{2}$.
Comme $(\Phi_X)'_g(0) \neq (\Phi_X)'_d(0)$ (car $\alpha \neq 0$), Φ_X n'est pas dérivable en 0.

Convergence simple de la suite des fonctions caractéristiques des variables M_n

19. Soit X et Y deux variables aléatoires symétriques indépendantes.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\cos(t(X+Y)(\omega)) = \cos(tX(\omega) + tY(\omega)) = \cos(tX(\omega))\cos(tY(\omega)) - \sin(tX(\omega))\sin(tY(\omega)),$$

donc

$$\cos(t(X+Y)) = \cos(tX)\cos(tY) - \sin(tX)\sin(tY).$$

De plus, $\cos(tX)$ et $\cos(tY)$ sont indépendantes (car X et Y le sont) et admettent une espérance, donc $\cos(tX)\cos(tY)$ admet une espérance et

$$E(\cos(tX)\cos(tY)) = E(\cos(tX))E(\cos(tY)) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t).$$

De plus, comme $\sin(tX)$ et $\sin(tY)$ sont bornées, elle admettent une espérance.
Comme X et Y sont symétriques, $w \mapsto \sin(tw)$ est impaire et $\sin(tX)$ et $\sin(tY)$ admettent une espérance, on a $E(\sin(tX)) = 0$ et $E(\sin(tY)) = 0$ d'après la question 4.
Comme $\sin(tX)$ et $\sin(tY)$ sont indépendantes (car X et Y le sont) et admettent une espérance, $\sin(tX)\sin(tY)$ admet une espérance et

$$E(\sin(tX)\sin(tY)) = E(\sin(tX))E(\sin(tY)) = 0 \times 0 = 0.$$

Enfin, $\cos(t(X+Y)) = \cos(tX)\cos(tY) - \sin(tX)\sin(tY)$ admet une espérance comme combinaison linéaire de variables admettant une espérance et, par linéarité de l'espérance,

$$\Phi_{X+Y}(t) = E(\cos(t(X+Y))) = E(\cos(tX)\cos(tY)) - E(\sin(tX)\sin(tY)) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t).$$

20. Comme la somme de deux variables symétriques indépendantes est encore symétrique (question 5) et grâce au résultat sur l'indépendance de X_{n+1} et $\sum_{i=1}^{n} X_i$ admis au début de l'énoncé, on peut montrer par récurrence immédiate que $X_1 + \ldots + X_n$ est symétrique.
On a alors $M_n = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$ qui est aussi symétrique.
De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\Phi_{M_n}(t) &= E(\cos(tM_n)) = E\left(\cos\left(\frac{t}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right) = \Phi_{X_1+\cdots+X_n}(t/n) \\
&= \Phi_{X_1}(t/n) \times \cdots \times \Phi_{X_n}(t/n) \\
&\quad \text{(par récurrence immédiate avec la question 19 et l'indépendance donnée en début de problème)} \\
&= (\Phi_{X_1}(t/n))^n \quad \text{(car toutes les variables ont la même loi).}
\end{aligned}$$

21. Comme X_1 est une variable aléatoire entière symétrique vérifiant la condition $(\mathcal{D}_\alpha)$, on a

$$\Phi_{X_1}(h) = 1 - \frac{\pi\alpha}{2}h + \underset{h\to 0^+}{o}(h).$$

Soit $t \in \mathbb{R}$.
Comme Φ_{X_1} est paire (question 14), on a

$$\Phi_{X_1}(t/n) = \Phi_{X_1}\underbrace{(|t|/n)}_{\underset{n\to+\infty}{\to} 0^+} = 1 - \frac{\pi\alpha}{2}\frac{|t|}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right),$$

donc $\Phi_{X_1}(t/n)$ est en particulier strictement positif au voisinage de 0^+ et

$$\begin{aligned}
\Phi_{M_n}(t) &= (\Phi_{X_1}(t/n))^n \quad \text{(d'après la question précédente)} \\
&= \exp\left(n\ln(\Phi_{X_1}(t/n))\right) \\
&= \exp\left(n\ln\left(1 - \frac{\pi\alpha}{2}\frac{|t|}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\
&= \exp\left(n\left(-\frac{\pi\alpha}{2}\frac{|t|}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\
&= \exp\left(-\frac{\pi\alpha}{2}|t| + \underset{n\to+\infty}{o}(1)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{\to} \exp\left(-\frac{\pi\alpha|t|}{2}\right) \quad \text{(par continuité de la fonction exp)}
\end{aligned}$$

22. $\varphi : t \mapsto \exp\left(-\frac{\pi\alpha|t|}{2}\right)$ est bornée sur $\mathbb{R}$, ainsi que Φ_{M_n} (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$), donc $\|\Phi_{M_n} - \varphi\|_\infty$ existe.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, comme $2n\pi \in \mathbb{R}$,

$$\|\Phi_{M_n} - \varphi\|_\infty \geq |\Phi_{M_n}(2n\pi) - \varphi(2n\pi)| = \left|(\Phi_{X_1}(2\pi))^n - \exp\left(-n\pi^2\alpha|t|\right)\right| = 1 - \exp\left(-n\pi^2\alpha|t|\right),$$

car X_1 est à valeurs entières, donc $\cos(2\pi X_1) = 1$.
Or $\lim_{n\to+\infty} 1 - \exp\left(-n\pi^2\alpha|t|\right) = 1$, donc $(\|\Phi_{M_n} - \varphi\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0, donc la convergence de (Φ_{M_n}) vers φ n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.