

# Concours Commun Mines-Ponts PC 2021 Maths 1

## Un corrigé

### Questions de cours

1 – Soit  $X$  une variable aléatoire discrète. Son univers image peut s'écrire  $X(\Omega) = \{x_n, n \in I\}$  avec  $I$  fini ou  $I$  dénombrable, donc en bijection avec  $\mathbb{N}$ . Nous choisirons pour toute la suite de prendre  $I$  fini ou  $I = \mathbb{N}$  et les  $x_n$  deux à deux distincts.

On énonce alors :  $X$  est d'espérance finie si et seulement si :

$I$  est fini ou la série  $\sum_n x_n P(X = x_n)$  converge absolument.

2 – Comme toute variable aléatoire finie a une espérance finie, il suffit d'étudier le cas  $I = \mathbb{N}$ . On suppose que  $X$  est bornée au sens de l'énoncé, donc qu'il existe  $M \geq 0$  tel que  $P(|X| \leq M) = 1$ . On a alors pour  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $|x_n| \leq M$ , on a :

$$|x_n| P(X = x_n) \leq M \cdot P(X = x_n)$$

Cette inégalité reste valide lorsque  $|x_n| > M$  car on a  $P(|X| = x_n) \leq P(|X| > M) = 0$ . Or la série numérique  $\sum_n P(X = x_n)$  converge, et par comparaison de séries à termes positifs, la série

$\sum_n |x_n| P(X = x_n)$  converge également. On a montré :

Toute variable aléatoire bornée a une espérance finie.

### Généralités sur les variables aléatoires

3 – Comme  $X$  est entière,  $|X|$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . On sait d'après le cours qu'il y a équivalence entre  $|X|$  est d'espérance finie et la convergence de la série  $\sum_{n \geq 1} P(|X| \geq n)$ .

Comme  $X$  vérifie  $\mathcal{D}_\alpha$ , on a  $P(|X| \geq n) = \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$  et donc  $P(|X| \geq n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\alpha}{n}$  et la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{\alpha}{n}$

diverge. Par comparaison de séries à termes positifs, la série  $\sum_{n \geq 1} P(|X| \geq n)$  diverge et donc  $|X|$

n'est pas d'espérance finie ; par définition,  $X$  n'est alors pas d'espérance finie.

Si  $X^2$  était d'espérance finie, on sait d'après le cours que  $X$  serait d'espérance finie, ce qui n'est pas le cas. En conclusion :

Si  $X$  est une variable aléatoire entière vérifiant  $\mathcal{D}_\alpha$ , alors ni  $X$  ni  $X^2$  n'ont une espérance finie.

4 – Comme  $X$  est symétrique,  $X$  et  $-X$  ont même loi. D'après le théorème que l'énoncé nous invite à admettre, il en va de même pour  $f(X)$  et  $f(-X)$ .

Or par imparité,  $f(-X) = -f(X)$ , donc  $f(X)$  et  $-f(X)$  ont même loi, ce qui signifie :

Si  $X$  est symétrique et  $f$  impaire, alors  $f(X)$  est symétrique.

Si on suppose de plus  $f(X)$  d'espérance finie : comme  $f(X)$  et  $-f(X)$  ont même loi, on a alors  $E(f(X)) = E(-f(X))$  et par linéarité de l'espérance  $E(f(X)) = -E(f(X))$  ce qui amène :  $E(f(X)) = 0$ .

5 – Soit  $Z = (X, Y)$  et  $(x, y) \in Z(\Omega)$ . Alors :

$$\begin{aligned} P(-Z = (x, y)) &= P((X = -x) \cap (Y = -y)) \\ &= P(X = -x)P(Y = -y) \quad (\text{par indépendance}) \\ &= P(X = x)P(Y = y) \quad (\text{par symétrie de } X \text{ et } Y) \\ &= P((X = x) \cap (Y = y)) \quad (\text{par indépendance}) \\ &= P(Z = (x, y)) \end{aligned}$$

On vient de montrer que  $Z$  et  $-Z$  ont même loi. On applique à nouveau le théorème admis de l'énoncé avec  $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x + y \end{cases}$ . Ainsi  $\varphi(Z)$  et  $\varphi(-Z)$  ont même loi, ce qui signifie que

$X + Y$  et  $-X - Y$  ont même loi et donc que :  $X + Y$  est symétrique.

## Deux sommes de séries

6 – Vérifions que la fonction  $u \mapsto 1 - zu$  ne s'annule pas sur  $[0, 1]$ . Si  $z = 0$  c'est bien le cas, donc on suppose désormais  $z \neq 0$  et  $1 - zu$  ne s'annule que pour  $u = \frac{1}{z}$ . Si de plus  $u \in [0, 1]$  alors  $z \in [1, +\infty[$  ce qui contredit que  $|z| \leq 1$  et  $z \neq 1$ .

Donc  $u \mapsto 1 - zu$  ne s'annule pas sur  $[0, 1]$  et d'après les théorème généraux la fonction

$$f : u \mapsto \frac{z}{1 - uz}$$
 est continue sur  $[0, 1]$ , d'où l'existence pour  $t \in [0, 1]$  de  $\int_0^t \frac{z du}{1 - uz}$ .

Toujours d'après la continuité de  $f$  définie ci-dessus,  $L$  est une primitive de  $f$  qui est de plus  $C^\infty$  sur  $[0, 1]$ . Ainsi :  $L$  est définie et de classe  $C^\infty$  sur  $[0, 1]$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$  on appelle  $HR_n$  la propriété : ' $\forall t \in [0, 1], f^{(n)}(t) = \frac{z^{n+1} n!}{(1 - tz)^{n+1}}$ '.

- $HR_0$  signifie :  $\forall x \in [0, 1], f(t) = \frac{z}{1 - tz}$ , ce qui est vraie.
- Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $HR_n$  soit vraie. Alors on a sur  $[0, 1]$  :

$$f^{(n+1)}(t) = -(n+1)z^{n+1}n! \frac{(-z)}{(1-tz)^{n+2}} = \frac{(n+1)!z^{n+2}}{(1-tz)^{n+2}}$$

Donc  $HR_{n+1}$  est vraie.

Par suite pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in [0,1]$  on a  $L^{(n)}(t) = f^{(n-1)}(t)$ , c'est-à-dire :  $L^{(n)}(t) = \frac{z^n (n-1)!}{(1-tz)^n}$ .

7 – Soit  $t \in ]0,1]$ . On a  $1 = |1-tz+tz| \leq |1-tz| + |tz| \leq |1-tz| + t$  (car  $t \geq 0$  et  $|z| \leq 1$ ).

On en déduit :  $1-t \leq |1-tz|$ .

Si on avait égalité, les deux inégalités seraient des égalités. Ainsi  $|tz| = t$  et comme  $t > 0$  on aurait  $|z| = 1$ . On aurait également  $|1-tz+tz| = |1-tz| + |tz|$  et d'après le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire,  $1-tz$  et  $tz$  seraient positivement liés et donc 1 et  $tz$  le seraient également. Donc  $z$  serait réel et positif. Comme  $|z| = 1$  on aurait alors  $z = 1$  ce qui n'est pas le cas. Il n'y a donc pas égalité et :  $1-t < |1-tz|$ .

8 – Je pose pour  $t \in [0,1]$  et  $n \in \mathbb{N}$  :  $f_n(t) = \left| \frac{1-t}{1-tz} \right|^n$ . Il a déjà été vu à la question 6 que  $1-tz$  ne s'annule pas sur  $[0,1]$ , donc  $f_n$  est continue sur  $[0,1]$  et à ce titre intégrable sur  $[0,1]$  et *a fortiori* sur  $]0,1]$ .

On a pour  $t \in ]0,1]$  :  $0 \leq f_n(t) = \left( \frac{1-t}{|1-tz|} \right)^n$  et avec la majoration de la question 7 :  $0 \leq \frac{1-t}{|1-tz|} < 1$

, donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1-t}{|1-tz|} \right)^n = 0$  et la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers la fonction nulle sur  $]0,1]$  qui est continue sur  $]0,1]$ .

On a enfin la domination, pour tout  $t \in [0,1]$  et tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $|f_n(t)| \leq 1$  et la fonction constante à 1 est intégrable sur  $[0,1]$  (continuité sur un segment) donc *a fortiori* sur  $]0,1]$ . Toutes les hypothèses du théorème de convergence dominée sont remplies et on peut conclure :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \left| \frac{1-t}{1-tz} \right|^n dt = 0.$$

Pour  $\int_0^1 \frac{z^{n+1}(1-t)^n}{(1-tz)^{n+1}} dt$ , on n'a aucun problème d'existence pour les mêmes raisons. On a :

$$\left| \int_0^1 \frac{z^{n+1}(1-t)^n}{(1-tz)^{n+1}} dt \right| \leq \int_0^1 \frac{1}{|1-tz|} \left| \frac{1-t}{1-tz} \right|^n dt$$

En tant que fonction continue sur un segment, la fonction  $t \mapsto \frac{1}{|1-tz|}$  est bornée sur  $[0,1]$  et à ce titre majorée par une constante  $M$ . Ainsi :

$$\left| \int_0^1 \frac{z^{n+1}(1-t)^n}{(1-tz)^{n+1}} dt \right| \leq M \int_0^1 \left| \frac{1-t}{1-tz} \right|^n dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Ce qui établit :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{z^{n+1}(1-t)^n}{(1-tz)^{n+1}} dt = 0$ .

9 – On écrit la formule de Taylor avec reste intégral pour  $L$  entre 0 et 1 à l'ordre  $n$  (licite :  $L$  est  $C^\infty$ ) :  $L(1) = \sum_{k=0}^n \frac{L^{(k)}(0)}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} L^{(n+1)}(t) dt$ . Avec la question 6, on a  $L^{(k)}(0) = z^k (k-1)!$  pour  $k \geq 1$  et  $L(0) = 0$ . Ainsi :

$$L(1) = \sum_{k=1}^n \frac{z^k}{k} + \underbrace{\int_0^1 \frac{z^{n+1}(1-t)^n}{(1-tz)^{n+1}} dt}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0}$$

Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{z^k}{k} = L(1)$ , ce qui montre : La série  $\sum_n \frac{z^n}{n}$  converge et que  $L(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$ .

10 – Les fonctions  $p_1 : (t, u) \mapsto t$  et  $p_2 : (t, u) \mapsto u$  sont continues car linéaires sur l'espace de dimension finie  $\mathbb{R}^2$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . La fonction  $e_1 : t \mapsto e^{it}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . Par composition  $e_2 : (t, u) \mapsto e^{it}$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$  car  $e_2 = e_1 \circ p_1$ . Par somme et produit de fonctions continues, la fonction  $q : (t, u) \mapsto 1 + ue^{it}$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$  car  $q = 1 + p_2 e_2$ , à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . Enfin la fonction  $m : z \mapsto |z|$  est continue sur  $\mathbb{C}$  (car 1-lipschitzienne), et comme  $\gamma = m \circ q$ , on a :  $\gamma$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

Or  $[-a, a] \times [0, 1]$  est un compact de  $\mathbb{R}^2$  et par continuité sur un compact, il existe  $(t_0, u_0) \in [-a, a] \times [0, 1]$  tel que  $\forall (u, t) \in [-a, a] \times [0, 1], \gamma(u, t) \geq \gamma(u_0, t_0)$ . On pose alors  $m_a = \gamma(u_0, t_0)$  et on a bien :  $\forall (u, t) \in [-a, a] \times [0, 1], \gamma(u, t) \geq m_a$ .

Comme  $a \in ]0, \pi[$  on a  $t_0 \in ]-\pi, \pi[$  et donc  $e^{it_0} \neq -1$  et comme  $|u_0| \leq 1$  on a  $u_0 e^{it_0} \neq -1$ , donc  $m_a > 0$ .

11 – On définit  $\varphi : \begin{cases} ]-\pi, \pi[ \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \\ (t, u) \mapsto \frac{e^{it}}{1 + ue^{it}} \end{cases}$ . On a déjà établi que le dénominateur ne s'annule pas

ce qui permet d'affirmer :

- Pour tout  $t \in ]-\pi, \pi[$ , l'application  $u \mapsto \varphi(t, u)$  est continue et à ce titre intégrable sur le segment  $[0, 1]$ .
- Pour tout  $u \in [0, 1]$ , l'application  $t \mapsto \varphi(t, u)$  est de classe  $C^1$  sur  $]-\pi, \pi[$  de dérivée donnée par :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, u) = \frac{ie^{it}(1+ue^{it}) - iu(e^{it})^2}{(1+ue^{it})^2} = \frac{ie^{it}}{(1+ue^{it})^2}$$

- Pour tout  $t \in ]-\pi, \pi[$ , l'application  $u \mapsto \varphi(t, u)$  est continue sur  $[0, 1]$ .
- Soit  $a \in ]0, \pi[$  et  $(t, u) \in [-a, a] \times [0, 1]$ . On a la domination :  $\left| \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, u) \right| \leq \frac{1}{m_a^2}$  et la fonction  $u \mapsto \frac{1}{m_a^2}$  est indépendante de  $t$  et intégrable sur  $[0, 1]$  (continuité sur un segment).

Il résulte de tous ces points :

$$F \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } ]-\pi, \pi[ \text{ et } \forall t \in ]-\pi, \pi[, F'(t) = \int_0^1 \frac{ie^{it}}{(1+ue^{it})^2} du.$$

12 – On a alors sur  $]-\pi, \pi[$  :  $F'(t) = \left[ \frac{-i}{1+ue^{it}} \right]_{u=0}^{u=1} = i - \frac{i}{1+e^{it}} = i \frac{e^{it}}{1+e^{it}}$  ; avec l'angle moitié :

$$F'(t) = i \frac{e^{it/2}}{e^{it/2} + e^{-it/2}} = i \frac{\cos(t/2) + i \sin(t/2)}{2 \cos(t/2)}, \text{ et finalement :}$$

$$\forall t \in ]-\pi, \pi[, F'(t) = \frac{i}{2} - \frac{1}{2} \tan\left(\frac{t}{2}\right).$$

Il s'en suit que sur  $]-\pi, \pi[$  :  $F(t) = \frac{it}{2} + \ln\left(\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right) + C$  avec  $C \in \mathbb{C}$ .

Or  $F(0) = \int_0^1 \frac{du}{1+u} = \ln(2)$ , donc  $C = \ln(2)$ . Par ailleurs pour  $t \in ]-\pi, \pi[$  on a  $\left| \frac{t}{2} \right| \leq \frac{\pi}{2}$  et

$$\cos\left(\frac{t}{2}\right) \geq 0 \text{ et finalement : } \forall t \in ]-\pi, \pi[ F(t) = \frac{it}{2} + \ln\left(2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right).$$

13 – Il a été vu à la question 9 que pour  $|z| \leq 1$  et  $z \neq 1$  :  $\int_0^1 \frac{z du}{1-uz} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$ .

En particulier pour  $z = e^{i\theta}$  avec  $\theta \in ]0, 2\pi[$ , on a bien  $|z| \leq 1$  et  $z \neq 1$  et par suite

$$\int_0^1 \frac{e^{i\theta} du}{1-ue^{i\theta}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n}. \text{ Par ailleurs, comme } \theta - \pi \in ]-\pi, \pi[ \text{ on a :}$$

$$F(\theta - \pi) = \frac{i(\theta - \pi)}{2} + \ln\left(2 \cos\left(\frac{\theta - \pi}{2}\right)\right) = \frac{i(\theta - \pi)}{2} + \ln\left(2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

Or  $F(\theta - \pi) = \int_0^1 \frac{-e^{i\theta}}{1-ue^{i\theta}} du = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n}$ , donc  $\frac{i(\theta - \pi)}{2} + \ln\left(2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n}$ . En séparant

les parties réelles et imaginaires on obtient alors :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln\left(2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi - \theta}{2}.$$

## Fonction caractéristique d'une variable aléatoire symétrique

14 – La variable aléatoire  $\cos(tX)$  étant bornée (par 1), elle a une espérance finie, et on en déduit d'une part que  $\phi_X$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et d'autre part que  $\forall t \in \mathbb{R}, |\phi_X(t)| \leq 1$ .

15 – On écrit  $X(\Omega) = \{x_n, n \in I\}$  avec  $I$  fini ou  $I = \mathbb{N}$ , les  $x_n$  étant 2 à 2 distincts. On a alors avec le théorème de transfert :

a) Si  $I$  est fini, alors on a sur  $\mathbb{R}$   $\phi_X(t) = \sum_{n \in I} \cos(tx_n)P(X = x_n)$ , et  $\phi_X$  est continue en tant que somme finie de fonctions continues.

b) Sinon, on prend  $I = \mathbb{N}$  et  $\forall t \in \mathbb{R}, \phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(tx_n)P(X = x_n)$  (la série converge d'après le théorème de transfert car on sait l'existence de l'espérance). On pose alors pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $t$  réel :  $f_n(t) = \cos(tx_n)P(X = x_n)$ . On remarque qu'on a alors la majoration indépendante de  $t$  :  $|f_n(t)| \leq P(X = x_n)$  et la série  $\sum_n P(X = x_n)$  converge (de somme égale à 1). Donc la série de fonctions  $\sum_n f_n$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$  et les  $f_n$  sont en outre toutes continues sur  $\mathbb{R}$ . Il s'en suit que :

$$\boxed{\phi_X = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

16 – Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a l'inclusion entre évènements :  $(|X| \geq n+1) \subset (|X| \geq n)$ , donc :

$$P[(|X| \geq n) \setminus (|X| \geq n+1)] = P(|X| \geq n) - P(|X| \geq n+1) = R_n - R_{n+1}.$$

Ou en d'autres termes, sachant que  $|X|$  est entière :  $P(|X| = n) = R_n - R_{n+1}$ .

Par ailleurs on a par parité  $\cos(X) = \cos(|X|)$  et comme  $X$  est entière  $|X|$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

Donc  $\phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(nt)P(|X| = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(nt)(R_n - R_{n+1})$ . On va maintenant chercher à séparer en deux séries. On établit préalablement la convergence de  $\sum_n R_n \cos(nt)$  qui entrainera par différence celle de  $\sum_n R_{n+1} \cos(nt)$ .

Comme  $X$  vérifie  $\mathcal{D}_\alpha$  on a  $R_n \cos(nt) = \alpha \frac{\cos(nt)}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . On a déjà établi la convergence de

la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(nt)}{n}$  à la question 13 pour  $t \in ]0, 2\pi[$ , et la série à termes positifs  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  converge

ce qui amène la convergence absolue de  $\sum_{n \geq 1} r_n$ . Il s'en suit que  $\sum_n R_n \cos(nt)$  converge et donc

$\sum_n R_{n+1} \cos(nt)$  également. On a alors pour  $t \in ]0, 2\pi[$  :

$$\phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(nt) R_n - \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(nt) R_{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(nt) R_n - \sum_{n=1}^{+\infty} \cos((n-1)t) R_n$$

Et finalement  $\forall t \in ]0, 2\pi[$ ,  $\phi_X(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} [\cos(nt) - \cos((n-1)t)] R_n$ .

17 – On sait que  $R_n - \frac{\alpha}{n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ , donc par un raisonnement vu ci-dessus, la série numérique

$\sum_{n \geq 1} \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right)$  converge absolument. On pose alors pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t$  réel  $f_n(t) = \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right) e^{int}$ .

On a la majoration  $|f_n(t)| \leq \left|R_n - \frac{\alpha}{n}\right|$  et avec la convergence absolue ci-dessus on en déduit que

la série de fonctions continues  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$  et donc que  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$  est

continue sur  $\mathbb{R}$ . On pose alors  $C = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right)$  et on a par continuité :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right) e^{int} = C \in \mathbb{R}.$$

En prenant la partie réelle, on a  $\lim_{t \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right) \cos(nt) = C$ . Comme  $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(nt)}{n}$  converge, on

peut séparer et on a  $\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos(nt) - \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{n} \underset{t \rightarrow 0}{=} C + o(1)$  (formule (1))

Or on a vu à la question 13 que sur  $]0, 2\pi[$  :  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{n} = -\ln\left(2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)$ . Or :

$$\ln\left(2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)\right) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} \ln(t + o(t^2)) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} \ln(t) + \ln(1 + o(t)) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} \ln(t) + o(t)$$

La formule (1) devient alors  $\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos(nt) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} \alpha \ln(t) + C + o(1)$ , et donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos(nt) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} O(\ln(t)).$$

En raisonnant cette fois sur les parties imaginaires, on a  $\lim_{t \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right) \sin(nt) = 0$  et en

séparant avec une convergence assurée par la question 13 :  $\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin(nt) - \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{n} \underset{t \rightarrow 0}{=} o(1)$

. Or pour  $t \in ]0, 2\pi[$  on a  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{n} = \frac{\pi - t}{2} \underset{t \rightarrow 0^+}{=} \frac{\pi}{2} + o(1)$ , d'où :  $\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin(nt) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} \alpha \frac{\pi}{2} + o(1)$

18 – On écrit d'abord :  $\cos(nt) - \cos((n-1)t) = \cos(nt) - \cos(nt)\cos(t) - \sin(nt)\sin(t)$  et donc sur  $]0, 2\pi[$  :

$$\phi_X(t) = 1 + (1 - \cos(t)) \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos(nt) - \sin(t) \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin(nt)$$

Et avec les résultats de la question 17, on a quand  $t$  tend vers  $0^+$  :

$$\phi_X(t) = 1 + (1 - \cos(t))O(\ln(t)) - \sin(t) \left( \alpha \frac{\pi}{2} + o(1) \right)$$

Or  $1 - \cos(t) \sim \frac{t^2}{2}$  donc  $(1 - \cos(t))O(\ln(t)) = O(t^2 \ln(t)) = o(t)$  et  $\sin(t) = t + o(t)$ . En

assemblant tout, on a :  $\boxed{\phi_X(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} 1 - \frac{\pi\alpha}{2}t + o(t)}$ .

Il s'en suit que  $\phi_X$  a une dérivée à droite en 0 et que  $(\phi_X)_d'(0) = -\frac{\pi\alpha}{2}$ . Par parité de  $\phi_X$ ,  $\phi_X$

a une dérivée à gauche en 0 qui est  $(\phi_X)_g'(0) = \frac{\pi\alpha}{2}$ . Les dérivées à droite et gauche n'étant pas

égales, on conclut :  $\boxed{\phi_X \text{ n'est pas dérivable en } 0, \text{ mais a une dérivée à droite et à gauche en } 0}$ .

## Convergence simple de la suite des fonctions caractéristiques des variables $M_n$

19 – Comme  $X$  et  $Y$  sont symétriques,  $X + Y$  l'est aussi (question 5) d'où l'existence, pour  $t \in \mathbb{R}$ , de  $\phi_{X+Y}(t)$  (question 14). On a alors :

$$\phi_{X+Y}(t) = E(\cos((X+Y)t)) = E(\cos(Xt)\cos(Yt)) - E(\sin(Xt)\sin(Yt))$$

Comme  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, il en est de même de  $\cos(Xt)$  et  $\cos(Yt)$  d'une part, et de  $\sin(Xt)$  et  $\sin(Yt)$  d'autre part. Donc :

$$\phi_{X+Y}(t) = E(\cos(Xt))E(\cos(Yt)) - E(\sin(Xt))E(\sin(Yt)).$$

La fonction  $x \mapsto \sin(xt)$  est impaire, donc avec la question 4  $E(\sin(Xt)) = 0$  et il reste :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t)}$$

20 – On appelle  $HR_n$  la propriété :  $nM_n$  est symétrique et  $\forall t \in \mathbb{R}, \phi_{nM_n}(t) = (\phi_{X_1}(t))^n$ . Comme  $M_1 = X_1$ ,  $HR_1$  est trivialement vraie.

Soit  $n \geq 1$  tel que  $HR_n$  est vraie. Alors  $nM_n = \sum_{k=1}^n X_k$  est symétrique, tout comme  $X_{n+1}$  et

d'après un résultat que l'énoncé nous demande d'admettre,  $\sum_{k=1}^n X_k$  et  $X_{n+1}$  sont indépendantes.

On a alors avec la question 5 que  $\sum_{k=1}^{n+1} X_k = (n+1)M_{n+1}$  est symétrique, et avec la question 19 :

$\forall t \in \mathbb{R}, \phi_{nM_n + X_{n+1}}(t) = \phi_{nM_n}(t)\phi_{X_{n+1}}(t) = (\phi_{X_1}(t))^n \phi_{X_{n+1}}(t)$ . Or  $X_1$  et  $X_{n+1}$  ont même loi ; il en va de même pour  $\cos(tX_1)$  et  $\cos(tX_{n+1})$ , donc  $\phi_{X_1}(t) = \phi_{X_{n+1}}(t)$  et finalement

$\forall t \in \mathbb{R}, \phi_{(n+1)M_{n+1}}(t) = (\phi_{X_1}(t))^{n+1}$  ce qui finit de prouver que  $HR_{n+1}$  est vraie.

Donc  $HR_n$  est vraie pour tout  $n \geq 1$ . En particulier  $nM_n$  est symétrique ce qui entraîne clairement que  $M_n$  est symétrique.

En outre pour  $t \in \mathbb{R}$  :  $\phi_{M_n}(t) = E(\cos(tM_n)) = E\left(\cos\left(\frac{t}{n}nM_n\right)\right) = \phi_{nM_n}\left(\frac{t}{n}\right) = \left(\phi_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n$ . On

a bien établi :  $M_n$  est symétrique et  $\forall t \in \mathbb{R}, \phi_{M_n}(t) = \left(\phi_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n$ .

21 – Pour  $t > 0$ ,  $\left(\frac{t}{n}\right)_{n \geq 1}$  tend vers 0 par valeurs supérieures, donc avec la question 18 dont les

hypothèses sont bien vérifiées par  $X_1$  :  $\phi_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right)_{n \rightarrow +\infty} = 1 - \frac{\pi\alpha}{2} \frac{t}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ . De là :

$$\phi_{M_n}(t)_{n \rightarrow +\infty} = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{\pi\alpha}{2} \frac{t}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$$

Or  $n \ln\left(1 - \frac{\pi\alpha}{2} \frac{t}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n \rightarrow +\infty} \sim -\frac{\pi\alpha t}{2}$  et en composant des limites :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_{M_n}(t) = \exp\left(-\frac{\pi\alpha t}{2}\right)$ .

Or  $\phi_{M_n}$  étant clairement paire on a pour  $t \neq 0$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_{M_n}(t) = \exp\left(-\frac{\pi\alpha|t|}{2}\right)$ , et avec la question

15 on a la continuité de  $\phi_{M_n}$  ce qui permet d'étendre le résultat à  $t = 0$ . Ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_{M_n}(t) = \exp\left(-\frac{\pi\alpha|t|}{2}\right).$$

22 – Pour  $t \in \mathbb{R}$ , on a  $\phi_{M_n}(2n\pi) = \left(\phi_{X_1}\left(\frac{2n\pi}{n}\right)\right)^n = \left(\phi_{X_1}(2\pi)\right)^n$ . Or  $\phi_{X_1}(2\pi) = E(\cos(2\pi X_1))$  et comme  $X_1$  est à valeurs entières,  $\phi_{X_1}(2\pi) = 1$  et donc  $\phi_{M_n}(2n\pi) = 1$ .

Soit  $f : t \mapsto \exp\left(-\frac{\pi\alpha|t|}{2}\right)$ . On a alors :

$$\|\phi_{M_n} - f\|_{\infty} \geq |\phi_{M_n}(2n\pi) - f(2n\pi)| = |1 - \exp(-\pi\alpha n\pi)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Il s'en suit que la convergence n'est pas uniforme.