CORRIGÉ du SUJET de MATHÉMATIQUES
ENS-X PSI 2021

Préliminaires.

1.(a). Si $x > 0$, la fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $e^{-t}t^{x-1} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$ avec $1-x<1$ d'où l'intégrabilité sur $]0,1]$, et par croissances comparées on a $e^{-t}t^{x-1} = o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$ lorsque $t \to +\infty$ d'où l'intégrabilité sur $[1,+\infty[$. Ceci prouve l'existence de $\Gamma(x)$ pour $x>0$.
Il peut être utile de remarquer que $\Gamma(x) > 0$ pour tout $x > 0$ puisque la fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est continue, positive et non partout nulle sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b). Pour $x>0$, une intégration par parties sans difficulté donne la relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Partant de $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$, une récurrence immédiate donne $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2.(a).i. Par le théorème des bornes atteintes, comme le pavé $[0,a]^2$ est une partie fermée bornée du plan $\mathbb{R}^2$, on peut affirmer l'existence de $\|f\|_\infty = \max\limits_{(t,u)\in[0,a]^2} \big|f(t,u)\big|$.

Soit $t \in [0,a]$ fixé. Soit (α_n) une suite de réels appartenant à l'intervalle $[-t, a-t]$ et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $u \in [0,t]$, posons

$$g_n(u) = \big|f(t+\alpha_n, u) - f(t,u)\big| \ .$$

Les fonctions g_n sont continues sur $[0,u]$, la continuité des applications partielles $t \mapsto f(t,u)$ montre que (g_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,t]$, enfin on a la domination

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall u \in [0,t] \qquad \big|g_n(u)\big| \leq 2\,\|f\|_\infty$$

la fonction constante $u \mapsto 2\,\|f\|_\infty$ étant intégrable sur le segment $[0,t]$. Par le théorème de convergence dominée, on déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} h(\alpha_n) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^t g_n(u)\,\mathrm{d}u = 0 \ .$$

Par caractérisation séquentielle de la limite, on a prouvé que $\lim\limits_{\eta\to 0} h(\eta) = 0$.

ii. Posons $\varphi(t) = \displaystyle\int_0^t f(t,u)\,\mathrm{d}u$ pour $t \in [0,a]$. Fixons $t \in [0,a]$ et montrons que $\lim\limits_{\eta\to0} \varphi(t+\eta) = \varphi(t)$. On a

$$\begin{aligned}\varphi(t+\eta) - \varphi(t) &= \int_0^{t+\eta} f(t+\eta,u)\,\mathrm{d}u - \int_0^t f(t,u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_t^{t+\eta} f(t+\eta,u)\,\mathrm{d}u + \int_0^t \big(f(t+\eta,u) - f(t,u)\big)\,\mathrm{d}u \ .\end{aligned}$$

Par les techniques classiques de majoration (*inégalité triangulaire et son extension aux intégrales*), on obtient

$$\big|\varphi(t+\eta) - \varphi(t)\big| \leq |\eta|\,\|f\|_\infty + h(\eta)$$

et ce majorant tend vers 0 lorsque η tend vers 0, d'où la conclusion.

iii. Avec les notations introduites dans le corrigé de la question précédente, on a $F(x) = \displaystyle\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \in [0,a]$. Comme φ est continue sur $[0,a]$, il résulte du théorème fondamental de l'analyse que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,a]$ avec $F' = \varphi$. Donc

$$\forall x \in [0,a] \qquad F'(x) = \int_0^x f(x,u)\,\mathrm{d}u \ .$$

(b).i. Fixons $\beta \in [0,a]$. Avec les mêmes arguments qu'en **(a).i.** et **(a).ii.** ci-dessus, on montre que la fonction $\psi_\beta : u \mapsto \int_u^\beta f(t,u)\,\mathrm{d}t = -\int_\beta^u f(t,u)\,\mathrm{d}t$ est continue sur $[0,a]$. Par le théorème fondamental de l'analyse, on déduit que l'application partielle $\alpha \mapsto h(\alpha,\beta) = \int_0^\alpha \psi_\beta(u)\,\mathrm{d}u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,a]$, de dérivée

$$\partial_1 h(\alpha,\beta) = \frac{\partial h}{\partial \alpha}(\alpha,\beta) = \psi_\beta(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(t,\alpha)\,\mathrm{d}t\ .$$

ii. Fixons maintenant $\alpha \in [0,a]$. Pour $(\beta,u) \in [0,a]^2$, posons $\theta(\beta,u) = \psi_\beta(u) = \int_u^\beta f(t,u)\mathrm{d}t$. Alors, pour tout $\beta \in [0,a]$, l'application partielle $\psi_\beta : u \mapsto \theta(\beta,u)$ est continue sur $[0,\alpha]$ (*cf.* **i.** ci-dessus), donc intégrable sur ce segment.

Pour tout $u \in [0,a]$, comme $t \mapsto f(t,u)$ est continue sur $[0,a]$, il résulte du théorème fondamental que $\beta \mapsto \theta(\beta,u)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,a]$, de dérivée $\frac{\partial \theta}{\partial \beta}(\beta,u) = f(\beta,u)$, qui dépend continûment de u.

On a enfin la domination

$$\forall (\beta,u) \in [0,a]^2 \qquad \left|\frac{\partial \theta}{\partial \beta}(\beta,u)\right| = \big|f(\beta,u)\big| \leq \|f\|_\infty\ ,$$

la fonction constante $u \mapsto \|f\|_\infty$ étant intégrable sur le segment $[0,\alpha]$.

Du théorème de dérivation des intégrales à paramètre, on déduit que l'application partielle $\beta \mapsto h(\alpha,\beta) = \int_0^\alpha \theta(\beta,u)\,\mathrm{d}u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,a]$, de dérivée

$$\partial_2 h(\alpha,\beta) = \frac{\partial h}{\partial \beta}(\alpha,\beta) = \int_0^\alpha f(\beta,u)\,\mathrm{d}u\ .$$

iii. Pour $x \in [0,a]$, on a $G(x) = h(x,x)$. Pour appliquer la règle de la chaîne, montrons que h est de classe $\mathcal{C}^1$, i.e. que ses dérivées partielles sont continues. Commençons par

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial \beta}(\alpha+k,\beta+l) - \frac{\partial h}{\partial \beta}(\alpha,\beta) &= \int_0^{\alpha+k} f(\beta+l,u)\,\mathrm{d}u - \int_0^\alpha f(\beta,u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^\alpha \big(f(\beta+l,u) - f(\beta,u)\big)\,\mathrm{d}u + \int_\alpha^{\alpha+k} f(\beta+l,u)\,\mathrm{d}u\ .\end{aligned}$$

La deuxième intégrale est majorée en valeur absolue par $|k|\ \|f\|_\infty$, elle tend donc vers 0 lorsque $(k,l) \to (0,0)$. On montre que la première tend vers 0 lorsque $l \to 0$ de façon analogue à la question **2.(a).i.** par convergence dominée, ce qui prouve la continuité de $\frac{\partial h}{\partial \beta}$ au point (α,β). On procde de même pour $\frac{\partial h}{\partial \alpha}$ en décomposant éventuellement $\int_\alpha^\beta$ en $\int_0^\beta - \int_0^\alpha$. Finalement, par la règle de la chaîne, G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,a]$ et

$$G'(x) = \partial_1 h(x,x) + \partial_2 h(x,x) = \int_x^x f(t,x)\,\mathrm{d}t + \int_0^x f(x,u)\,\mathrm{d}u = \int_0^x f(x,u)\,\mathrm{d}u\ .$$

(c). On a donc $G'(x) = F'(x)$ sur $[0, a]$. D'autre part, $F(0) = G(0) = 0$. Donc $F = G$ sur $[0, a]$, et notamment $F(a) = G(a)$, ce qui donne la relation (E_2) (théorème de Fubini dans un triangle):

$$\int_0^a \Big(\int_0^t f(t,u) \,\mathrm{d}u \Big) \,\mathrm{d}t = \int_0^a \Big(\int_u^a f(t,u) \,\mathrm{d}t \Big) \,\mathrm{d}u \; .$$

3.(a). Si $x > 0$, le changement de variable $t = xu$ donne

$$(f * g)(x) = x \int_0^1 f\big(x(1-u)\big) \, g(xu) \,\mathrm{d}u \; ,$$

relation vraie aussi pour $x = 0$. Posons $h(x,u) = f\big(x(1-u)\big) g(xu)$ pour $(x,u) \in \mathbb{R}_+ \times [0,1]$. La fonction h est continue sur $\mathbb{R}_+ \times [0,1]$, ce qui entraîne les continuités partielles. Si on fixe $a > 0$, en notant $S = [0, a]$, on a la domination

$$\forall (x,u) \in S \times [0,1] \qquad \big| h(x,u) \big| \leq \|f\|_{\infty,S} \, \|g\|_{\infty,S} \; ,$$

et une fonction constante est bien intégrable sur $[0, 1]$. Le théorème de continuité des intégrales à paramètre s'applique donc, et $f * g$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

(b). Le changement de variable $u = x - t$ donne immédiatement $g * f(x) = f * g(x)$.

(c). Soient f, g, h continues sur $\mathbb{R}_+$. Alors, pour $x \geq 0$,

$$\begin{aligned}
f * (g * h)(x) &= \int_0^x f(x-t) \, (g*h)(t) \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x \Big(\int_0^t f(x-t) \, g(t-u) \, h(u) \,\mathrm{d}u \Big) \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x \Big(\int_u^x f(x-t) \, g(t-u) \,\mathrm{d}t \Big) \, h(u) \,\mathrm{d}u \qquad \textit{(Fubini)} \\
&= \int_0^x \Big(\int_0^{x-u} g(x-u-s) \, f(s) \,\mathrm{d}s \Big) \, h(u) \,\mathrm{d}u \qquad (\textit{poser } t = x - s) \\
&= \int_0^x (g * f)(x-u) \, h(u) \,\mathrm{d}u \\
&= (g * f) * h(x) \; = \; (f * g) * h(x) \; .
\end{aligned}$$

Le produit de convolution est donc associatif, et commutatif d'après **(b)**.

4.(a). Si $\big|f(t)\big| \leq M \, e^{rt}$, alors pour tout réel s tel que $s > r$, la majoration

$$\big| e^{-st} \, f(t) \big| \leq M \; e^{-(s-r)t}$$

montre que $t \mapsto e^{-st} f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc $\mathcal{L}(f)(s)$ existe dès que $s > r$.

(b). Supposons $\big|f(t)\big| \leq M \, e^{rt}$ et $\big|f'(t)\big| \leq M' \, e^{r't}$. Alors, si $s > \max\{r, r'\}$, une intégration par parties donne

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f')(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \, f'(t) \,\mathrm{d}t \; = \; \big[e^{-st} \, f(t) \big]_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} e^{-st} \, f(t) \,\mathrm{d}t \\
&= -f(0) + s \cdot \mathcal{L}(f)(s) \; .
\end{aligned}$$

(c). Supposons $|f(t)| \leq M\, e^{rt}$ et $|g(t)| \leq N\, e^{st}$, et on peut toujours supposer $s > r$. Alors, pour $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} |f * g(x)| &= \left| \int_0^x f(x-t)\, g(t)\, \mathrm{d}t \right| \leq \int_0^x M\, e^{r(x-t)}\, N\, e^{st}\, \mathrm{d}t \\ &\leq MN\, e^{rx} \int_0^x e^{(s-r)t}\, \mathrm{d}t = MN\, e^{rx}\, \frac{e^{(s-r)x}-1}{s-r} \\ &\leq \frac{MN}{s-r}\, e^{sx}\ , \end{aligned}$$

donc $f * g$ est d'ordre exponentiel.

(d). Soit s assez grand pour que $\mathcal{L}(f)(s)$, $\mathcal{L}(g)(s)$ et $\mathcal{L}(f * g)(s)$ soient définis. Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f * g)(s) &= \int_0^{+\infty} (f * g)(t)\, e^{-st}\, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \Big(\int_0^t f(t-u)\, e^{-s(t-u)}\, g(u)\, e^{-su}\, \mathrm{d}u \Big)\, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \Big(\int_u^{+\infty} f(t-u)\, e^{-s(t-u)}\, \mathrm{d}t \Big)\, g(u)\, e^{-su}\, \mathrm{d}u \qquad (\textit{Fubini}) \\ &= \int_0^{+\infty} \Big(\int_0^{+\infty} f(x)\, e^{-sx}\, \mathrm{d}x \Big)\, g(u)\, e^{-su}\, \mathrm{d}u \qquad (\textit{poser } x = t-u) \\ &= \Big(\int_0^{+\infty} f(x)\, e^{-sx}\, \mathrm{d}x \Big) \Big(\int_0^{+\infty} g(u)\, e^{-su}\, \mathrm{d}u \Big) \\ &= \mathcal{L}(f)(s) \cdot \mathcal{L}(g)(s)\ . \end{aligned}$$

Justification. Si $|f(t)| \leq M\, e^{rt}$ et $|g(t)| \leq N\, e^{rt}$ (on peut toujours s'arranger pour que ce soit le même coefficient r), alors $|f(t-u)\, g(u)\, e^{-st}| \leq MN\, e^{(r-s)t}$, donc

$$\int_0^t |f(t-u)\, g(u)\, e^{-st}|\, \mathrm{d}u \leq MN\, t\, e^{(r-s)t}\ ,$$

et la fonction majorante est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ pour $s > r$, ce qui autorise alors à utiliser la formule de Fubini.

5.(a). Par linéarité de la transformation de Laplace, qui résulte de la linéarité de l'intégrale, on a

$$\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g) \iff \mathcal{L}(f-g) = 0\ .$$

(b). Par linéarité de l'intégrale, on a $\displaystyle\int_a^b P(x)\, f(x)\, \mathrm{d}x = 0$ pour tout polynôme P.

D'après le théorème d'approximation de Weierstrass, il existe une suite (P_n) de polynômes convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$. Alors $\|P_n f - f^2\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|P_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, la suite de fonctions $(P_n f)$ converge donc uniformément vers f^2 sur $[a,b]$. On en déduit que

$$0 = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b P_n(x)\, f(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)^2\, \mathrm{d}x\ .$$

La fonction f^2 étant continue et positive sur $[a,b]$, elle est donc nulle, donc $f=0$.

(c). Soit f continue sur $\mathbb{R}_+$ et telle que $\big|f(t)\big| \leq M\, e^{rt}$. Supposons $\forall s>r \quad \mathcal{L}(f)(s)=0$. En posant $y=e^{-t}$, i.e. $t=-\ln(y)$ dans l'intégrale définissant la transformée de Laplace, on obtient

$$\forall s>r \qquad \int_0^1 y^{s-1}\, f\big(-\ln(y)\big)\,\mathrm{d}y = 0$$

et, en particulier,

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad \int_0^1 y^n\cdot y^{r+1}\, f\big(-\ln(y)\big)\,\mathrm{d}y = 0\;.$$

Introduisons la fonction $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ définie par

$$g(0)=0 \qquad \text{et} \qquad \forall y\in\,]0,1] \quad g(y)=y^{r+1}\, f\big(-\ln(y)\big)\;.$$

Alors g est continue sur $]0,1]$ comme composée et elle est continue en 0 car

$$\lim_{y\to 0} g(y) = \lim_{y\to 0} y^{r+1}\, f\big(-\ln(y)\big) = \lim_{t\to+\infty} e^{-(r+1)t}\, f(t) = 0\;.$$

Donc g est continue sur $[0,1]$, et on a $\forall n\in\mathbb{N} \quad \displaystyle\int_0^1 y^n\, g(y)\,\mathrm{d}y = 0$. On déduit du **b.** ci-dessus que g est nulle sur $[0,1]$, donc $\forall y\in]0,1]\ f\big(-\ln(y)\big)=0$, donc f est nulle sur $\mathbb{R}_+$.

A. Intégration fractionnaire.

6. On suppose f continue sur $]0,+\infty[$ et intégrable sur $]0,1]$.

Par le théorème de Fubini dont on admet encore la validité, on obtient

$$\begin{aligned} I^2 f(x) &= \int_0^x I(f)(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_0^x \Big(\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\Big)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \Big(\int_u^x f(u)\,\mathrm{d}t\Big)\,\mathrm{d}u \;=\; \int_0^x (x-u)\, f(u)\,\mathrm{d}u\;. \qquad \textbf{(*)} \end{aligned}$$

Remarque 1. Il résulte du théorème fondamental de l'analyse que $I(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée f sur $\mathbb{R}_+^*$ et, par une récurrence immédiate, que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction $I^n(f)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $\big(I^n(f)\big)' = I^{n-1}(f)$. Par ailleurs, de la définition de la convergence d'une intégrale généralisée, on déduit que la fonction $I(f)$ est continue en 0 avec $I(f)(0)=0$. Ceci se propage bien sûr: pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction $I^n(f)$ est continue sur $[0,+\infty[$ avec $I^n(f)(0)=0$.

Remarque 2. Comme $I(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,x]$ pour tout $x>0$, la relation **(*)** peut aussi s'obtenir par une intégration par parties.

Ceci initialise une récurrence. Supposons, pour $n\geq 1$ donné, que l'on ait, pour toute fonction f continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et intégrable sur $]0,1]$,

$$I^n(f)(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}\, f(t)\,\mathrm{d}t\;.$$

En l'appliquant à la fonction $I(f)$, on obtient, par une intégration par parties dont la justification est donnée ci-dessus,

$$\begin{aligned}
I^{n+1}(f)(x) &= I^n\big(I(f)\big)(x) \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}\, I(f)(t)\, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\left(\Big[-\frac{(x-t)^n}{n}\, I(f)(t)\Big]_{t=0}^{t=x} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n}\, f(t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n\, f(t)\,\mathrm{d}t\ ,
\end{aligned}$$

ce qui prouve l'hérédité. *Bien sûr, on pouvait aussi réappliquer Fubini.*

7.(a). En utilisant la relation fonctionnelle $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ vraie pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbf{Z}_-$, on a, si $\alpha - m \in \mathbb{R} \setminus \mathbf{Z}_-$,

$$\Phi_\alpha^{(m)}(t) = \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-m+1)}{\Gamma(\alpha)}\, t^{\alpha-m-1} = \frac{t^{\alpha-m-1}}{\Gamma(\alpha-m)} = \Phi_{\alpha-m}(t)\ .$$

On note que, avec la convention $\Phi_\beta = 0$ si $\beta \in \mathbf{Z}_-$, cette relation reste vraie pour tout α réel et tout m entier naturel. Donc $\Phi_\alpha^{(m)} = \Phi_{\alpha-m}$.

(b). Si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, alors pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}
\Phi_\alpha * \Phi_\beta(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\, t^{\beta-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\, B(\alpha,\beta) \qquad (\textit{poser } t = xu) \\
&= \frac{x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \Phi_{\alpha+\beta}(x)\ .
\end{aligned}$$

(c). Soit $\alpha > 0$. Pour $s > 0$, on a, en posant $u = st$ dans l'intégrale,

$$\mathcal{L}(\Phi_\alpha)(s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} e^{-st}\, t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s^\alpha\,\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} e^{-u}\, u^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{s^\alpha}\ .$$

8.(a). Par associativité de la convolution,

$$(J^\alpha \circ J^\beta)(f) = \Phi_\alpha * (\Phi_\beta * f) = (\Phi_\alpha * \Phi_\beta) * f = \Phi_{\alpha+\beta} * f = J^{\alpha+\beta}(f)\ .$$

(b). Supposons $|f(t)| \le M\, e^{rt}$. Alors, pour tout $x > 0$, en posant $t = x - u$,

$$\begin{aligned}
\big|J^\alpha(f)(x)\big| &\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-u)^{\alpha-1}\, Me^{ru}\,\mathrm{d}u = \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\, e^{rx}\int_0^x t^{\alpha-1}\, e^{-rt}\,\mathrm{d}t \\
&\le \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\, e^{rx}\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\, e^{-rt}\,\mathrm{d}t = \frac{M}{r^\alpha}\, e^{rx}\ .
\end{aligned}$$

La fonction $J^\alpha f$ est donc d'ordre exponentiel (*le calcul ci-dessus me semble nécessaire car, si $0 < \alpha < 1$, le comportement de Φ_α au voisinage de 0 ne permet pas de la considérer comme d'ordre exponentiel*). Pour s assez grand, on a alors

$$\mathcal{L}(J^\alpha)(s)=\mathcal{L}(\Phi_\alpha * f)(s)=\mathcal{L}(\Phi_\alpha)(s)\cdot\mathcal{L}(f)(s)=s^{-\alpha}\,\mathcal{L}(f)(s)\ .$$

(c). $J^\alpha\Phi_\gamma=\Phi_\alpha*\Phi_\gamma=\Phi_{\alpha+\gamma}$.

(d). L'énoncé semble guider vers l'utilisation de la transformée de Laplace. En effet, si f est d'ordre exponentiel et vérifie $J^\alpha f=0$, alors pour s assez grand, on a $\mathcal{L}(J^\alpha f)(s)=0$, donc $\mathcal{L}(f)(s)=0$ d'après le **b.** Et l'injectivité de la transformation de Laplace permet de déduire que $f=0$.

Il me semble toutefois que, sans supposer que f est d'ordre exponentiel, en introduisant la partie entière supérieure du réel α, soit $m=\lceil\alpha\rceil$ comme dans la **Partie B.** plus loin, et en posant $\beta=m-\alpha>0$ (si $\alpha\notin\mathbb{N}^*$), de $J^\alpha f=0$, on déduit $J^m f=(J^\beta\circ J^\alpha)f=\Phi_\beta*(J^\alpha f)=0$, soit $I^m(f)=0$, et en dérivant m fois, on récupère $f=0$. Si $\alpha=m\in\mathbb{N}^*$, on conclut juste en dérivant m fois, sans utiliser de convolution.

B. Dérivées fractionnaires.

9. Par récurrence sur n:

- pour $n=1$, si f est de classe $\mathcal{C}^1$ (*plutôt que dérivable*) sur $\mathbb{R}_+$,

$$(J\circ D)(f)(x)=\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t=f(x)-f(0)\ .$$

- soit $n\geq 2$, supposons la propriété vraie au rang $n-1$. Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ (*plutôt que n fois dérivable*), alors f' est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ et

$$\begin{aligned}
J^n\circ D^n(f)(x) &= \int_0^x J^{n-1}\circ D^n(f)(t)\,\mathrm{d}t\ =\ \int_0^x J^{n-1}\circ D^{n-1}(f')(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^x \Big(f'(t)-\sum_{k=0}^{n-2}(f')^{(k)}(0)\,\frac{t^k}{k!}\Big)\,\mathrm{d}t \qquad (\textit{hypothèse de récurrence})\\
&= f(x)-f(0)-\sum_{k=0}^{n-2} f^{(k+1)}(0)\,\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\\
&= f(x)-\sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0)\,\frac{x^k}{k!}\ ,
\end{aligned}$$

ce qui prouve l'hérédité.

10.(a). Si $\alpha\in\mathbb{N}^*$, $D^\alpha\circ J^\alpha=\mathrm{Id}$.

Sinon, soit $m=\lceil\alpha\rceil$ la partie entière supérieure de α, alors $m-\alpha>0$ et

$$D^\alpha\circ J^\alpha=(D^m\circ J^{m-\alpha})\circ J^\alpha=D^m\circ(J^{m-\alpha}\circ J^\alpha)=D^m\circ J^m=\mathrm{Id}\ .$$

(b). Si $\mathbb{1}$ est la fonction constante de valeur 1, alors $D^\alpha\mathbb{1}=0$ pour $\alpha\in\mathbb{N}^*$ et sinon, en posant $m=\lceil\alpha\rceil$, on a $D^\alpha\mathbb{1}=D^m(J^{m-\alpha}\mathbb{1})$ avec $m-\alpha>0$. Or,

$$J^{m-\alpha}\mathbb{1}=J^{m-\alpha}\Phi_1=\Phi_{m-\alpha}*\Phi_1=\Phi_{m-\alpha+1}\ ,$$

donc $D^\alpha\mathbb{1}=\big(\Phi_{m-\alpha+1}\big)^{(m)}=\Phi_{1-\alpha}$ d'après **7.(a).**, i.e. $D^\alpha\mathbb{1}(x)=\dfrac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$.

Avec la convention adoptée en **Q.7.**, on a $D^\alpha \mathbb{1} = \Phi_{1-\alpha}$ pour tout $\alpha \geq 0$.

Donc $D^\alpha \mathbb{1} = 0$ si et seulement si $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

(c). La relation à démontrer est vraie si $\alpha \in \mathbb{N}^*$ d'après **7.(a).** Sinon, avec $m = \lceil \alpha \rceil$,

$$D^\alpha \Phi_\gamma = D^m(J^{m-\alpha}\Phi_\gamma) = D^m(\Phi_{m-\alpha+\gamma}) = \Phi_{\gamma-\alpha}\ .$$

C'est donc vrai pour tout $\alpha > 0$.

(d). Si $\alpha \in \mathbb{N}^*$ c'est classique: $f^{(\alpha)} = 0$ si et seulement si f est polynomiale de degré $\alpha - 1$ au plus. Sinon, soit $m = \lceil \alpha \rceil$, alors

$$\begin{aligned}
D^\alpha f = 0 \quad & \iff \quad D^m(J^{m-\alpha} f) = 0 \\
& \iff \quad J^{m-\alpha} f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} c''_k x^k \qquad \textit{(polynomial de degré } < m\textit{)} \\
& \iff \quad J^{m-\alpha} f = \sum_{k=0}^{m-1} c'_k \Phi_{k+1} = \sum_{k=0}^{m-1} c'_k\ J^{m-\alpha}(\Phi_{k+\alpha+1-m}) \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{avec } c''_k = \Gamma(k+1)\ c'_k \\
& \iff \quad J^{m-\alpha}\Big(f - \sum_{k=0}^{m-1} c'_k \Phi_{k+\alpha+1-m}\Big) = 0 \\
& \iff \quad f = \sum_{k=0}^{m-1} c'_k \Phi_{k+\alpha+1-m} \qquad \textit{(d'après } \mathbf{8}.(\mathbf{d}).) \\
& \iff \quad f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} c'_k\ \frac{x^{k-m+\alpha}}{\Gamma(k-m+\alpha+1)} \\
& \iff \quad f(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j\ x^{\alpha-j}
\end{aligned}$$

en posant pour finir $c_j = \dfrac{c'_{m-j}}{\Gamma(\alpha+1-j)}$, $1 \leq j \leq m$.

11.(a). D'après **10.(c).**, $D^{\alpha+\beta} f = D^1\Phi_{1/2} = \Phi_{-1/2}$, alors que

$$(D^\alpha \circ D^\beta) f = D^{1/2}\big(D^{1/2}\Phi_{1/2}\big) = D^{1/2}\Phi_0 = D^{1/2}(0) = 0\ .$$

(b). $(D^\alpha \circ D^\beta) g = D^{1/2}\big(D^{3/2}\Phi_{3/2}\big) = D^{1/2}(\Phi_0) = D^{1/2}(0) = 0$.

$(D^\beta \circ D^\alpha) g = D^{3/2}\big(D^{1/2}\Phi_{3/2}\big) = D^{3/2}(\Phi_1) = \Phi_{-1/2}$.

$D^{\alpha+\beta} g = D^2(\Phi_{3/2}) = \Phi_{-1/2}$.

(c). D'abord un **Lemme 1: soit** λ **un réel, soit** $s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ **une série entière de rayon de convergence** $R > 0$**, alors la fonction** $f : x \mapsto x^\lambda\, s(x)$ **est de classe** $\mathcal{C}^\infty$ **sur** $]0, R[$**, et on peut calculer ses dérivées successives par dérivation terme à terme.**

Preuve du lemme 1: f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,R[$ comme produit de deux fonctions $\mathcal{C}^\infty$, et par dérivation d'un produit, on a

$$f'(x) = \lambda x^{\lambda-1}\, s(x) + x^\lambda\, s'(x) = \lambda x^{\lambda-1} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n + x^\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} n c_n x^{n-1} \ ,$$

ce qui se réorganise en $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda+n) c_n x^{n+\lambda-1}$ et correspond donc à la dérivation terme à terme de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{n+\lambda}$. Comme $f'(x) = x^{\lambda-1}\,\sigma(x)$, où σ est la somme d'une série entière de même rayon de convergence R, on peut réitérer.

Soit donc $f(t) = t^\lambda\, \eta(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n!} t^{n+\lambda}$. Soit ε un réel strictement positif, soit $q = \lceil \varepsilon \rceil$ sa partie entière supérieure. Supposons d'abord $\varepsilon \notin \mathbb{N}^*$, donc $q-1 < \varepsilon < q$. Alors

$$D^\varepsilon f(t) = (D^q \circ J^{q-\varepsilon})(f)(t) = D^q \left(\frac{1}{\Gamma(q-\varepsilon)} \int_0^t f(u)\,(t-u)^{q-1-\varepsilon}\,\mathrm{d}u \right) .$$

Or, $\displaystyle\int_0^t f(u)\,(t-u)^{q-1-\varepsilon}\,\mathrm{d}u = \int_0^t \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(u) \Big)\,\mathrm{d}u$, avec $f_n(u) = \dfrac{\alpha_n}{n!}\, u^{n+\lambda}\,(t-u)^{q-1-\varepsilon}$, le réel $t \in]0,R[$ ayant été préalablement fixé. Étudions la possibilité d'intégrer terme à terme. En posant $u = tx$ dans l'intégrale, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^t f_n(u)\,\mathrm{d}u &= \frac{\alpha_n}{n!} \int_0^t u^{n+\lambda}\,(t-u)^{q-1-\varepsilon}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{\alpha_n}{n!}\, t^{n+\lambda+q-\varepsilon} \int_0^1 x^{n+\lambda}\,(1-x)^{q-1-\varepsilon}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\alpha_n}{n!}\, t^{n+\lambda+q-\varepsilon}\, B(q-\varepsilon, n+\lambda+1) .
\end{aligned}$$

En remplaçant juste les α_n par leur valeur absolue, on a aussi la majoration

$$\begin{aligned}
\int_0^t \big|f_n(u)\big|\,\mathrm{d}u &= \frac{|\alpha_n|}{n!}\, t^{n+\lambda+q-\varepsilon} \int_0^1 x^{n+\lambda}\,(1-x)^{q-1-\varepsilon}\,\mathrm{d}x \\
&\leq \frac{|\alpha_n|}{n!}\, t^{n+\lambda+q-\varepsilon} \int_0^1 x^{\lambda}\,(1-x)^{q-1-\varepsilon}\,\mathrm{d}x \\
&\leq B(q-\varepsilon, \lambda+1)\, t^{\lambda+q-\varepsilon} \times \frac{|\alpha_n|}{n!} t^n \ ,
\end{aligned}$$

et ce majorant est le terme général d'une série convergente, on peut donc intégrer terme à terme. **Ceci a du sens car $\lambda > -1$, l'intégrale qui majore est alors bien convergente**. On obtient alors, en utiisant (E_1),

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(q-\varepsilon)} \int_0^t f(u)\,(t-u)^{q-1-\varepsilon}\,\mathrm{d}u &= \frac{1}{\Gamma(q-\varepsilon)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n!}\, t^{n+\lambda+q-\varepsilon}\, B(q-\varepsilon, n+\lambda+1) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n!}\, \frac{\Gamma(n+\lambda+1)}{\Gamma(n+\lambda+1+q-\varepsilon)}\, t^{n+\lambda+q-\varepsilon} .
\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à dériver q fois, on peut le faire terme à terme d'après le lemme 1 puisque la nouvelle série entière obtenue a un rayon de convergence au moins égal à celui, R, de la série initiale. *En effet, les coefficients ont été multipliés par* $\dfrac{\Gamma(n+\lambda+1)}{\Gamma(n+\lambda+1+q-\varepsilon)}$*, mais ceci est borné car*

$$0 < \frac{\Gamma(n+\lambda+1)}{\Gamma(n+\lambda+1+q-\varepsilon)} = \frac{B(n+\lambda+1, q-\varepsilon)}{\Gamma(q-\varepsilon)} \le \frac{B(\lambda+1, q-\varepsilon)}{\Gamma(q-\varepsilon)} .$$

On obtient finalement, en utilisant la relation $x\,\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$:

$$\forall t \in]0,R[\qquad D^\varepsilon f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n!} \frac{\Gamma(n+\lambda+1)}{\Gamma(n+\lambda+1-\varepsilon)} t^{n+\lambda-\varepsilon} .$$

Remarque. Si $\varepsilon = q \in \mathbb{N}^*$, il suffit de faire cette dernière étape (dériver q fois terme à terme) et on obtient le même résultat.

En prenant $\varepsilon = \alpha + \beta$, on obtient donc

$$\forall t \in]0,R[\qquad D^{\alpha+\beta} f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n!} \frac{\Gamma(n+\lambda+1)}{\Gamma(n+\lambda+1-\alpha-\beta)} t^{n+\lambda-\alpha-\beta} . \qquad \textbf{(**)}$$

En prenant $\varepsilon = \beta$, on obtient

$$\forall t \in]0,R[\qquad D^{\beta} f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n!} \frac{\Gamma(n+\lambda+1)}{\Gamma(n+\lambda+1-\beta)} t^{n+\lambda-\beta} . \qquad \textbf{(***)}$$

En repartant de **(***)**, on est dans une situation analogue à la situation de départ car $\lambda-\beta > -1$ par hypothèse, et car la nouvelle série entière obtenue a un rayon de convergence au moins égal à R (*le calcul fait ci-dessus montre qu'elle converge pour tout* $t \in]0,R[$). Par le même calcul, on obtient donc, pour $t \in]0,R[$,

$$\begin{aligned} D^\alpha(D^\beta f)(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n!} \frac{\Gamma(n+\lambda+1)}{\Gamma(n+\lambda+1-\beta)} \frac{\Gamma(n+\lambda-\beta+1)}{\Gamma(n+\lambda-\beta+1-\alpha)} t^{n+\lambda-\beta-\alpha} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n!} \frac{\Gamma(n+\lambda+1)}{\Gamma(n+\lambda-\beta+1-\alpha)} t^{n+\lambda-\beta-\alpha} = D^{\alpha+\beta} f(t) . \end{aligned}$$

12.(a). Si $\alpha = m \in \mathbb{N}^*$, c'est classique.

Sinon, $D_*^\alpha f = 0 \iff J^{m-\alpha}(D^m f) = 0 \iff D^m f = 0$ d'après **8.(d).** dans laquelle il me semble inutile de supposer f d'ordre exponentiel. On est donc ramenés au cas précédent.

(b). Voici un **Lemme 2: soient $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et intégrable sur $]0,1]$, et $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Alors la fonction $f * g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec**

$$(f*g)'(x) = (f*g')(x) + f(x)\,g(0) .$$

Preuve du lemme 2. On a

$$\begin{aligned}
(f*g)(x) &= \int_0^x f(u)\,g(x-u)\,\mathrm{d}u \;=\; \int_0^x f(u)\Big(g(0)+\int_0^{x-u} g'(s)\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}u \\
&= g(0)\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^x \Big(\int_0^{x-u} f(u)\,g'(s)\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}u \\
&= g(0)\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^x \Big(\int_u^{x} f(u)\,g'(t-u)\,\mathrm{d}t\Big)\,\mathrm{d}u\,. \qquad (\textit{poser } s=t-u)
\end{aligned}$$

Il résulte du théorème fondamental que le premier terme est de classe $\mathcal{C}^1$, de dérivée $f(x)g(0)$. Et il résulte de la question **2.(b).iii.** *que le deuxième terme est de classe $\mathcal{C}^1$, de dérivée* $\displaystyle\int_0^x f(u)\,g'(x-u)\,\mathrm{d}u = (f*g')(x)$.

En appliquant ce lemme 2, on a immédiatement le caractère $\mathcal{C}^1$ de $J^\alpha f$ et la relation

$$(J^\alpha f)'(x) = (\Phi_\alpha * f)'(x) = \Phi_\alpha * f'(x) + \Phi_\alpha(x)\,f(0) = (J^\alpha\circ D)f(x) + f(0)\,\Phi_\alpha(x)\,.$$

et il ne semble pas nécessaire de supposer $\alpha<1$.

(c). Par récurrence sur m.

- si $m=1$, soit $\alpha\in\,]0,1[$, alors $0<1-\alpha<1$ et

$$\begin{aligned}
D^\alpha f(x) &= (D\circ J^{1-\alpha})f(x) \;=\; (J^{1-\alpha}\circ D)f(x) + f(0)\,\Phi_{1-\alpha}(x) \\
&= D_*^\alpha f(x) + \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\,f(0)\,,
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

- soit $m\geq 2$, supposons la relation vraie au rang $m-1$, soit $\alpha\in\,]m-1,m[$. Alors

$$\begin{aligned}
D^\alpha f(x) &= (D^m\circ J^{m-\alpha})f(x) \;=\; (D\circ D^{m-1}\circ J^{(m-1)-(\alpha-1)})f(x) \\
&= (D\circ D^{\alpha-1})f(x) \;=\; (D^{\alpha-1}f)'(x) \\
&= D\Big(D_*^{\alpha-1}f(x) + \sum_{k=0}^{m-2}\frac{x^{k-\alpha+1}}{\Gamma(k-\alpha+2)}\,f^{(k)}(0)\Big) \qquad (\textit{récurrence}) \\
&= D\Big(J^{(m-1)-(\alpha-1)}f^{(m-1)}(x) + \sum_{k=0}^{m-2}\frac{x^{k-\alpha+1}}{\Gamma(k-\alpha+2)}\,f^{(k)}(0)\Big) \\
&= (D\circ J^{m-\alpha})f^{(m-1)}(x) + \sum_{k=0}^{m-2}\frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}\,f^{(k)}(0) \\
&= J^{m-\alpha}(f^{(m)})(x) + f^{(m-1)}(0)\,\Phi_{m-\alpha}(x) + \sum_{k=0}^{m-2}\frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}\,f^{(k)}(0) \\
&\qquad\qquad (\textit{question } \mathbf{12}.(\mathbf{b}).) \\
&= D_*^\alpha f(x) + \frac{x^{m-1-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha)}\,f^{(m-1)}(0) + \sum_{k=0}^{m-2}\frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}\,f^{(k)}(0) \\
&= D_*^\alpha f(x) + \sum_{k=0}^{m-1}\frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}\,f^{(k)}(0)\,.
\end{aligned}$$

(d). En utilisant la relation, pour $\alpha > 0$ non entier et $k \in \mathbb{N}$ (elle reste valable pour α entier avec les conventions $\Phi_\beta = 0$ et $\Gamma(\beta) = +\infty$ pour $\beta \in \mathbf{Z}_-$),

$$D^\alpha(x^k) = \Gamma(k+1)\, D^\alpha(\Phi_{k+1}) = k!\, \Phi_{k+1-\alpha} = \frac{k!}{\Gamma(k+1-\alpha)}\, x^{k-\alpha}\ ,$$

on calcule

$$\begin{aligned} D^\alpha\left(f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k \right) &= D^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, D^\alpha(x^k) \\ &= D^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1-\alpha)}\, x^{k-\alpha} \\ &= D^\alpha_* f(x)\ . \end{aligned}$$

C. Deux équations différentielles fractionnaires.

13.(a). Si g vérifie l'équation d'Abel, i.e. $J^\alpha g = f$, alors $D^\alpha J^\alpha g = D^\alpha f$, soit $g = D^\alpha f$.

Tentative de réciproque: en prenant $g = D^\alpha f$, alors $J^\alpha g = (J^\alpha \circ D^\alpha) f = (J^\alpha \circ D)(J^{1-\alpha} f)$. En admettant que l'on puisse appliquer la question **12.(b).** à la fonction $J^{1-\alpha} f = \Phi_{1-\alpha} * f$ (*mais là, j'avoue que j'ai un doute à cause du comportement au voisinage de 0*), on obtient, avec $J^{1-\alpha} f(0) = 0$,

$$J^\alpha g(x) = (D \circ J^\alpha \circ J^{1-\alpha}) f(x) - (J^{1-\alpha} f)(0)\, \Phi_\alpha(x) = (D \circ J) f(x) = f(x)\ .$$

(b). Comme $f = J^\alpha g = \Phi_\alpha * g$, on a, pour s assez grand,

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{s^\alpha}\, \mathcal{L}(g)(s)\ , \quad \text{donc} \quad \mathcal{L}(g)(s) = s^\alpha\, \mathcal{L}(f)(s)\ .$$

14.(a). Pour $\theta \in]-1,1[$, on a $E_0(\theta) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \theta^k = \frac{1}{1-\theta}$.

Pour tout θ réel, on a $E_1(\theta) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\theta^k}{k!} = e^\theta$.

Pour tout θ réel, on a $E_2(-\theta^2) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k)!} = \cos(\theta)$.

(b). Pour $\alpha = 0$, le rayon de convergence est 1.

Si $\alpha > 0$, alors

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(1+\alpha k)}{\Gamma\big(1+\alpha(k+1)\big)} &= \frac{B(\alpha, 1+\alpha k)}{\Gamma(\alpha)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha k}\, u^{\alpha-1}\, \mathrm{d}u \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 u^{\alpha-1}\, \mathrm{d}u \ = \ \frac{1}{\alpha\, \Gamma(\alpha)}\ , \end{aligned}$$

on en déduit la majoration des coefficients

$$0 \leq \frac{1}{\Gamma(1+\alpha k)} \leq \Big(\frac{1}{\alpha\,\Gamma(\alpha)}\Big)^k ,$$

puis la minoration du rayon de convergence R_α de E_α suivante: $R_\alpha \geq \alpha\,\Gamma(\alpha) > 0$.

Remarque. De la formule de Stirling $\Gamma(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^x\,e^{-x}\,\sqrt{2\pi x}$, on déduit facilement que, pour $\alpha > 0$, on a $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{\Gamma(1+\alpha k)}{\Gamma\big(1+\alpha(k+1)\big)} = 0$ donc, par la règle de d'Alembert, $R_\alpha = +\infty$.

(c). Pour $s > 1$, on a

$$\mathcal{L}(e_\alpha)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\,e_\alpha(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\,t^{\alpha k}\,e^{-st}}{\Gamma(1+\alpha k)}\,\mathrm{d}t\ .$$

Posons donc $u_k(t) = \dfrac{(-1)^k\,t^{\alpha k}\,e^{-st}}{\Gamma(1+\alpha k)}$, alors

$$\int_{\mathbb{R}_+} |u_k| = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha k)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha k}\,e^{-st}\,\mathrm{d}t = \mathcal{L}(\Phi_{1+\alpha k})(s) = \frac{1}{s^{1+\alpha k}} = \frac{1}{s}\cdot\Big(\frac{1}{s^\alpha}\Big)^k ,$$

qui est le terme général d'une série convergente puisque $0 < \dfrac{1}{s^\alpha} < 1$, cela autorise l'interversion série-intégrale, on obtient

$$\mathcal{L}(e_\alpha)(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{s^{1+\alpha k}} = \frac{1}{s}\sum_{k=0}^{+\infty}\Big(-\frac{1}{s^\alpha}\Big)^k = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha+1}\ .$$

(d). On a $u_k = \Phi_k * e_\alpha$, donc $\mathcal{L}(u_k)(s) = \dfrac{1}{s^k}\,\mathcal{L}(e_\alpha)(s) = \dfrac{s^{\alpha-k+1}}{s^\alpha+1}$.

15. Si $D_*^\alpha u = -u$, alors $(J^\alpha\circ D_*^\alpha)u = -J^\alpha u$. Soit $m = \lceil\alpha\rceil$. On a donc

$$(J^\alpha\circ J^{m-\alpha}\circ D^m)u = -J^\alpha u\ , \quad \text{soit} \quad (J^m\circ D^m)u = -J^\alpha u\ ,$$

soit (question **9.**):

$$u(t) - \sum_{k=0}^{m-1} u^{(k)}(0)\,\frac{t^k}{k!} = -J^\alpha u(t)\ ,$$

soit encore

$$u(t) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k\,\frac{t^k}{k!} - J^\alpha u(t)\ , \quad \text{avec} \quad c_k = u^{(k)}(0)\ , \quad 0 \leq k \leq m-1\ .$$

16. Si u est d'ordre exponentiel, alors pour s assez grand, comme $\dfrac{t^k}{k!} = \Phi_{k+1}(t)$,

$$\mathcal{L}(u)(s) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{c_k}{s^{k+1}} - \mathcal{L}(\Phi_\alpha * u)(s) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{c_k}{s^{k+1}} - \frac{1}{s^\alpha}\,\mathcal{L}(u)(s)\ ,$$

donc $\left(1+\dfrac{1}{s^\alpha}\right)\mathcal{L}(u)(s)=\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}\frac{c_k}{s^{k+1}}$, ce qui donne, par linéarité de $\mathcal{L}$,

$$\mathcal{L}(u)(s)=\sum_{k=0}^{m-1}c_k\,\frac{s^{\alpha-k-1}}{s^\alpha+1}=\mathcal{L}\Big(\sum_{k=0}^{m-1}c_k u_k\Big)(s)\ .$$

Par injectivité de la transformation de Laplace, on conclut que $u=\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}c_k u_k$.