

Centrale - Supélec - PSI - II - 2020

Les fonctions de Lambert

I. Fonctions de Lambert

Q 1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$. Il est clair que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et l'on calcule $f'(x) = (x+1)e^x$. Les limites de f en $\pm\infty$ sont données par les croissances comparées et l'on obtient le tableau de variations de f , sur lequel on lit toutes les informations utiles.

x	$-\infty$		-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	$+\infty$
f	0	$\swarrow \quad \quad \quad \searrow$ $\quad \quad \quad -e^{-1} \quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad \nearrow$			
					$+\infty$

Les variations montrent que f réalise une bijection continue strictement croissante de $[-1, +\infty[$ sur $[-e^{-1}, +\infty[$.

Q 2. La bijection réciproque d'une application continue étant continue, W est continue. De plus, la bijection réciproque d'une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si, et seulement si, elle est dérivable si, et seulement si, sa dérivée ne s'annule pas. Or f' ne s'annule qu'en -1 , donc la restriction de W à $] -e^{-1}, +\infty[$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Q 3. Comme $f(0) = 0$, on a $W(0) = 0$. De plus, $W'(0) = \frac{1}{f' \circ W(0)} = \frac{1}{f'(0)} = 1$.

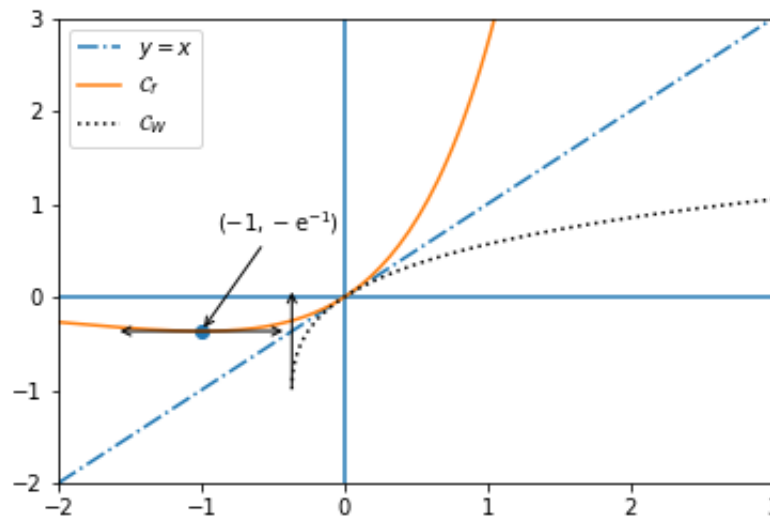
Q 4. La fonction W étant dérivable en 0, elle possède au voisinage de 0 un développement limité à l'ordre 1 donné par

$$W(x) = W(0) + xW'(0) + o(x) = x + o(x) \quad \therefore \quad W(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$$

Si $x > -1$, la relation $x = f(W(x))$ s'écrit $x = W(x)e^{W(x)}$, d'où

$$\ln x = W(x) + \ln(W(x)) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} W(x) + o(W(x)) \sim W(x) \quad \because \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} W(x) = +\infty.$$

Q 5. Le graphe ci-dessous a été tracé avec Python et matplotlib.pyplot.



Q 6. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto x^\alpha W(x)$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc l'intégrabilité de la fonction $x^\alpha W(x)$ sur $]0, 1]$ ne dépend que du comportement de la fonction au voisinage de 0. Comme $x^\alpha W(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^{\alpha+1}$, $x^\alpha W(x)$ est intégrable sur $]0, 1]$ si, et seulement si, $\alpha + 1 > -1$, soit $\alpha > -2$.

Q 7. Le raisonnement est similaire à celui effectué à la question précédente. Comme $x^\alpha W(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^\alpha \ln x$, $x^\alpha W(x)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si, et seulement si $\int_1^{+\infty} x^\alpha \ln x \, dx$ converge. Si $\alpha \geq -1$, cette intégrale diverge par comparaison avec l'intégrale divergente $\int_1^{+\infty} x^\alpha \, dx$; si $\alpha < -1$, on écrit

$$x^\alpha \ln x = x^{\frac{\alpha-1}{2}} \times x^{\frac{\alpha+1}{2}} \ln x = o\left(x^{\frac{\alpha-1}{2}}\right) \quad \because \quad \frac{\alpha+1}{2} < 0;$$

Or, $\frac{\alpha-1}{2} < -1$, donc $\int_1^{+\infty} x^{\frac{\alpha-1}{2}} \, dx$ converge. Ainsi, $x^\alpha W(x)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si, et seulement si, $\alpha < -1$.

Q 8. On reprend le tableau de variations réalisé à la première question. Il montre que f réalise une bijection continue strictement décroissante de $] -\infty, -1]$ sur $[-e^{-1}, 0[$.

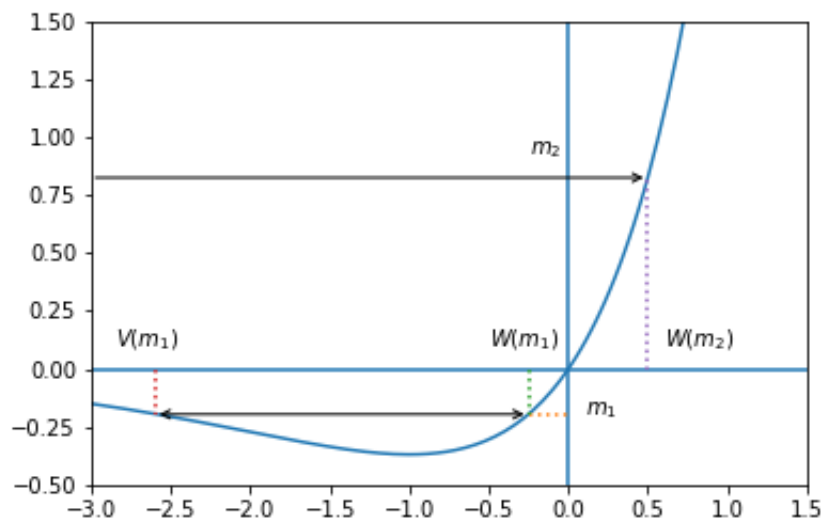
Q 9. Si $m \in \mathbb{R}$, il y a plusieurs façons de voir le nombre de solutions x de l'équation $f(x) = m$. Graphiquement, c'est le nombre d'intersections de la courbe représentative de f avec la droite d'équation $y = m$. Ce nombre se lit sur la courbe, ou sur le tableau de variations, qui en est une forme épurée. Formellement (ce qui est plus général, mais lourd ici), $f^{-1}(\{m\}) = \{V(m), W(m)\}$ est

- vide si $m \notin \mathcal{D}_V \cup \mathcal{D}_W$, i.e. si $m \in] -\infty, -e^{-1}[$;
- un singleton si $m \in \mathcal{D}_V \cap \mathcal{D}_W$ et que $V(m) = W(m)$ ou si $m \in \mathcal{D}_V \triangle \mathcal{D}_W$, i.e. si $m \in \{-e^{-1}\} \cup [0, +\infty[$;
- de cardinal 2 si $m \in \mathcal{D}_V \cap \mathcal{D}_W$ et si $V(m) \neq W(m)$, i.e. si $m \in] -e^{-1}, 0[$. En résumé,

m	$] -\infty, -e^{-1}[$	$\{-e^{-1}\}$	$] -e^{-1}, 0[$	$[0, +\infty[$
$f^{-1}(\{m\})$	$\emptyset$	$\{-1\}$	$\{V(m), W(m)\}$	$\{W(m)\}$

Q 10. Les solutions de l'inéquation $f(x) \leq m$ se lisent facilement sur le graphe : ce sont les réels x tels que le point de coordonnées $(x, f(x))$ se situe en dessous de la droite d'équation $y = m$. On obtient le tableau et l'illustration suivants

m	$] -\infty, -e^{-1}[$	$\{-e^{-1}\}$	$] -e^{-1}, 0[$	$[0, +\infty[$
$f^{-1}(]-\infty, m])$	$\emptyset$	$\{-1\}$	$[V(m), W(m)]$	$] -\infty, W(m)]$



Q 11. Comme on suppose que $b \neq 0$,

$$e^{ax} + bx = 0 \iff bxe^{-ax} = -1 \iff -axe^{-ax} = \frac{a}{b}.$$

La question Q9 permet de distinguer les différents cas. En notant $\mathcal{S}$ les solutions de l'équation $e^{ax} + bx = 0$,

$\frac{a}{b}$	$] - \infty, -e^{-1}[$	$\{-e^{-1}\}$	$] - e^{-1}, 0[$	$[0, +\infty[$
$\mathcal{S}$	$\emptyset$	$\left\{\frac{1}{a}\right\}$	$\left\{-\frac{1}{a}V\left(\frac{a}{b}\right), -\frac{1}{a}W\left(\frac{a}{b}\right)\right\}$	$\left\{-\frac{1}{a}W\left(\frac{a}{b}\right)\right\}$

II. Probabilités

II.A — Première situation

Q 12. Par hypothèse, $N \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et, les valeurs des billets étant considérée (c'est une approximation) comme indépendantes et gagnante avec une probabilité p , la variable aléatoire X comptant le nombre de billets gagnants est de loi conditionnelle binomiale $X_{|N=n} \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. On peut alors utiliser la formule des probabilités totales en conditionnant par rapport au système complet d'événements $\{(N = n); n \in \mathbb{N}\}$, d'où, en notant classiquement $q = 1 - p$,

$$\begin{aligned}
 \forall k \in \mathbb{N}: \mathbf{P}(X = k) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(X = k | N = n) \mathbf{P}(N = n) = \sum_{n=k}^{\infty} \mathbf{P}(X = k | N = n) \mathbf{P}(N = n) \\
 &= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \times e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = \frac{e^{-\lambda} p^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^n q^{n-k}}{(n-k)!} \\
 &\stackrel{(j=n-k)}{=} \frac{e^{-\lambda} (\lambda p)^k}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(q\lambda)^j}{j!} = \frac{e^{-\lambda p} (\lambda p)^k}{k!} \quad \therefore \quad X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p).
 \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathbf{E}(X) = \mathbf{V}(X) = \lambda p$.

Q 13. Comme la variable aléatoire X est positive et admet une espérance, on peut appliquer l'inégalité de Markov, qui donne

$$\mathbf{P}(X \geq 2) \leq \frac{\mathbf{E}(X)}{2} = \frac{\lambda p}{2} \quad \therefore \quad p \leq 2 \frac{1-\alpha}{\lambda} \implies \mathbf{P}(X \geq 2) \leq \frac{\lambda p}{2} \leq 1 - \alpha.$$

Q 14. On utilise cette fois la valeur exacte de $\mathbf{P}(X \geq 2)$.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(X \geq 2) &= 1 - [\mathbf{P}(X = 0) + \mathbf{P}(X = 1)] = 1 - e^{-\lambda p} (1 + \lambda p) \quad \therefore \\
 \mathbf{P}(X \geq 2) \leq 1 - \alpha &\iff 1 - e^{-\lambda p} (1 + \lambda p) \leq 1 - \alpha \iff -(\lambda p + 1)e^{-\lambda p} \leq -\alpha e^{-1}.
 \end{aligned}$$

Q 15. On poursuit le calcul fait à la question Q14. Comme $0 < \alpha < 1$, $\alpha e^{-1} \in] - e^{-1}, 0[$ et la question Q10 montre que cette inégalité est vérifiée si, et seulement si, $x = -(\lambda p + 1) \in [V(-\alpha e^{-1}), W(-\alpha e^{-1})]$, c'est-à-dire .

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(X \geq 2) \leq 1 - \alpha &\iff V(-\alpha e^{-1}) \leq -(\lambda p + 1) \leq W(-\alpha e^{-1}) \\
 &\iff -\frac{W(-\alpha e^{-1}) + 1}{\lambda} \leq p \leq -\frac{V(-\alpha e^{-1}) + 1}{\lambda} \iff p \leq -\frac{V(-\alpha e^{-1}) + 1}{\lambda}
 \end{aligned}$$

car $-\frac{W(-\alpha e^{-1}) + 1}{\lambda} < 0$. Il existe une valeur maximale de $p \in]0, 1[$ satisfaisant la condition si, et seulement si, $\lambda > -V(-\alpha e^{-1}) - 1$. Cette valeur est alors $p = -\frac{V(-\alpha e^{-1}) + 1}{\lambda}$.

II.B — Deuxième situation

Q 16. Pour le $i^{\text{ème}}$ bit, la variable aléatoire B_i prenant la valeur 1 si le bit est mal transmis et 0 s'il l'est correctement suit une loi de Bernoulli de paramètre $q = 1 - p$. Le nombre d'erreurs lors de la transmission de r bits est donc donné par $\sum_{i=1}^r B_i \hookrightarrow \mathcal{B}(r, q)$, les inversions étant indépendantes les unes des autres. En particulier,

$$\forall k \in \llbracket 0, r \rrbracket: \mathbf{P}(X = k) = \binom{r}{k} q^k p^{r-k}, \quad \mathbf{E}(X) = rq \quad \& \quad \mathbf{V}(X) = rpq.$$

Q 17. Supposons que $r \leq 2 \frac{1-\alpha}{q}$. L'inégalité de Markov, appliquée à une variable aléatoire positive admettant une espérance, donne

$$\mathbf{P}(X \geq 2) \leq \frac{\mathbf{E}(X)}{2} = \frac{rq}{2} \leq 1 - \alpha.$$

Q 18. Comme à la question Q 14, on effectue un calcul exact de $\mathbf{P}(X \geq 2)$.

$$\mathbf{P}(X \geq 2) = 1 - [\mathbf{P}(X = 0) + \mathbf{P}(X = 1)] = 1 - p^r - \binom{r}{1} p^{r-1} q = 1 - p^r - rp^{r-1} q \quad \therefore$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X \geq 2) \leq 1 - \alpha &\iff -\left(1 + \frac{rq}{p}\right) e^{r \ln p} \leq -\alpha \quad \left(\times -\frac{p \ln p}{q}\right)^{>0} \iff \left(\frac{p \ln p}{q} + r \ln p\right) e^{r \ln p} \leq \alpha \frac{p \ln p}{q} \\ &\iff (r \ln p - a) e^{r \ln p - a} \leq -\alpha a e^{-a}. \end{aligned}$$

Q 19. La variable aléatoire X désignant le nombre de bits mal transmis quand r ont été envoyés, il est clair que, si $r = 1$, alors $\mathbf{P}(X \geq 2) = 0$. De plus, l'expression $\mathbf{P}(X \geq 2) = 1 - p^r - rp^{r-1}q$ trouvée à la question Q 18 tend vers 1 quand r tend vers l'infini, donc le nombre de valeurs de r acceptables est fini et non nul. Il en existe donc une valeur maximale, sans que l'on ait besoin de faire appel aux fonctions V et W .

Q 20. Pour trouver la plus grande valeur de r possible, on va appliquer la question Q10, et donc évaluer

$$-\alpha a e^{-a} = \alpha f(-a) = \alpha f\left(\frac{p \ln p}{1-p}\right).$$

Il est clair que $-a < 0$, d'où $f(-a) \in [-e^{-1}, 0[$ et $m = \alpha f(-a) \in]-e^{-1}, 0[$. D'après la question Q10, en tenant compte dans l'inégalité du fait que $\ln p < 0$,

$$f(r \ln p - a) \leq m \iff V(m) \leq r \ln p - a \leq W(m) \iff \frac{W(m) + a}{\ln p} \leq r \leq \frac{V(m) + a}{\ln p}.$$

L'intervalle admissible $\left[\frac{W(m) + a}{\ln p}, \frac{V(m) + a}{\ln p}\right]$ contient l'entier 1 comme on l'a vu à la question Q19. Le plus petit entier non nul satisfaisant la condition (II.2) est donc $r = \left\lfloor \frac{V(m) + a}{\ln p} \right\rfloor$.

III. Développement en série entière

III.A — Le théorème binomial d'Abel

Q 21. Comme $\deg(A_k) = k$, la famille $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Q 22. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. La notation $A_{k-1}(X - a)$, notée parfois $\widetilde{A_{k-1}}(X - a)$ pour éviter toute ambiguïté, signifie dans l'énoncé la composition et non le produit.

$$\begin{aligned} A'_k &= \frac{1}{k!} [(X - ka)^{k-1} + (k-1)X(X - ka)^{k-2}] = \frac{1}{k!} (X - ka)^{k-2} (kX - ka) \\ &= \frac{1}{(k-1)!} (X - a - (k-1)a)^{k-2} (X - a) = \widetilde{A_{k-1}}(X - a). \end{aligned}$$

Q 23. Dérivons la relation précédente. Si $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, il vient $A''_k = (X - a)' A'_{k-1}(X - a) = A_{k-2}(X - 2a)$. Par une récurrence immédiate, on a, en utilisant le symbole de Kronecker,

$$A_k^{(j)} = \begin{cases} A_{k-j}(X - ja) & \text{si } j \in \llbracket 0, k \rrbracket \\ 0 & \text{si } j > k; \end{cases} \quad \therefore \quad A_k^{(j)}(ja) = \begin{cases} A_{k-j}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket \\ 1 & \text{si } j = k \end{cases} \\ 0 & \text{si } j \geq k, \end{cases} = \delta_{k,j}.$$

Q 24. D'après la question Q21, où l'on a vu que $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$, il existe une unique décomposition $P = \sum_{k=0}^n \alpha_k A_k$. En dérivant, il vient $P^{(j)} = \sum_{k=0}^n \alpha_k A_k^{(j)}$ et, en utilisant la question Q23,

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket : P^{(j)}(ja) = \sum_{k=0}^n \alpha_k A_k^{(j)}(ja) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \delta_{k,j} = \alpha_j.$$

Q 25. Soient $y \in \mathbb{C}$ et $P_y = (X + y)^n$. Une récurrence immédiate donne $P_y^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} (X + y)^{n-k}$ et la question Q24 donne

$$P_y = \sum_{k=0}^n P_y^{(k)}(ka) A_k = P_y(0) + \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(n-k)! k!} (ka + y)^{n-k} X(X - ka)^{k-1} = y^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (y + ka)^{n-k} X(X - ka)^{k-1}$$

$$\therefore \quad \forall (x, y) \in \mathbb{C}^2 : (x + y)^n = P_y(x) = y^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (y + ka)^{n-k} x(x - ka)^{k-1}.$$

Q 26. On dérive la relation obtenue à la question Q25 par rapport à x , puis on prend la valeur $x = 0$.

$$n(x + y)^{n-1} = 0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (y + ka)^{n-k} (x - ka)^{k-1} + x \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (y + ka)^{n-k} (x - ka)^{k-1} \right)$$

$$ny^{n-1} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (y + ka)^{n-k} (-ka)^{k-1}.$$

III.B — Développement en série entière de la fonction W

Q 27. On utilise le critère de d'Alembert. Pour $r > 0$,

$$\left| \frac{a_{n+1} r^{n+1}}{a_n r^n} \right| = \frac{(n+1)^n n! r^{n+1}}{n^{n-1} (n+1)! r^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} r \xrightarrow{n \rightarrow \infty} er$$

$$\therefore \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} = \exp \left[(n-1) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right] = \exp \left[(n-1) \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right] = \exp(1 + o(1)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e.$$

La série $\sum a_n r^n$ est donc absolument convergente si $er < 1$ et (grossièrement) divergente si $er > 1$, d'où $R = \frac{1}{e}$.

Q 28. La question est tellement proche du cours qu'il est prudent de donner des explications, fussent-elles brèves. Toute fonction définie par une série entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence (c'est dû à la convergence normale de la série et de toutes ses dérivées sur tout segment inclus dans $] -R, R[$). De plus, un développement en série entière est toujours un développement de Taylor (cela vient de la dérivation terme à terme) et l'on a donc $S^{(n)}(0) = n! a_n = (-n)^{n-1}$.

Q 29. On montre la continuité de S en établissant la convergence normale de la série entière sur $\left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$ par comparaison avec une série de Riemann :

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right] : |a_n x^n| \leq \frac{|a_n|}{e^n} = \frac{n^{n-1}}{e^n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^{n-1} e^n}{n^n e^n \sqrt{2\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} n^{3/2}}.$$

On aurait aussi pu faire ce calcul d'équivalents à la place de l'utilisation, plus élémentaire, du critère de d'Alembert à la question Q27.

Q 30. Posons par commodité $a_0 = 1$. Alors, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[$, on peut effectuer le produit de Cauchy des deux séries et l'on a

$$(1 + S(x))S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k (n-k+1) a_{n-k+1} \right) x^n$$

$$\sum_{k=0}^n a_k (n-k+1) a_{n-k+1} = (n+1) \frac{(-n-1)^n}{(n+1)!} + \sum_{k=1}^n \frac{(-k)^{k-1}}{k!} \times (n-k+1) \frac{(-(n-k+1))^{n-k}}{(n-k+1)!}$$

$$= \frac{1}{n!} \left[(-n-1)^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-k)^{k-1} (k-n-1)^{n-k} \right] \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{n!} [(-n-1)^n + n(-n-1)^{n-1}]$$

$$= -\frac{(-n-1)^{n-1}}{n!} = \frac{(-n-1)^n}{(n+1)!} = a_{n+1} \quad \therefore$$

$$x(1 + S(x))S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1} = S(x).$$

(1) Par application de la question Q26 avec $a = 1$ et $y = -n - 1$.

Q 31. Pour $x \in] - e^{-1}, e^{-1}[$, on pose $h(x) = S(x)e^{S(x)}$. Alors,

$$\forall x \in] - e^{-1}, e^{-1}[: xh'(x) = xS'(x)e^{S(x)} + xS(x)S'(x)e^{S(x)} = x(1 + S(x))S'(x)e^{S(x)} \stackrel{(Q30)}{=} S(x)e^{S(x)} = h(x).$$

Q 32. Sur tout intervalle où x ne s'annule pas, en particulier sur $] - e^{-1}, 0[$ et sur $] 0, e^{-1}[$, l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 $xy' - y = 0$ admet pour ensemble de solutions une droite vectorielle. Comme $x \mapsto x$ est solution évidente, les solutions sur ces deux intervalles sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Toute solution sur $] - e^{-1}, e^{-1}[$ est solution par restriction sur les deux intervalles précédent, donc de la forme $x \mapsto \lambda x$ sur $] - e^{-1}, 0[$ et de la forme $x \mapsto \mu x$ sur $] 0, e^{-1}[$. Une telle fonction est bien continue en 0, mais elle y est dérivable si, et seulement si, $\lambda = \mu$. Sur $] - e^{-1}, e^{-1}[$, on retrouve donc à nouveau une droite vectorielle, formée des fonctions de la forme $x \mapsto \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Q 33. En vertu des questions Q31 et Q32, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $S(x)e^{S(x)} = \lambda x$ pour tout $x \in] - e^{-1}, e^{-1}[$. De plus, $S(x)e^{S(x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} a_1 x e^{S(0)} = x$, d'où $\lambda = 1$. En composant par W , il vient $f(S(x)) = x \implies (W \circ f)(S(x)) = W(x)$ et il faut donc montrer pour conclure que $(W \circ f)(S(x)) = S(x)$, *i.e.* $S(x) \geq -1$.

Pour de faire, montrons que, pour tout $x \in [- e^{-1}, e^{-1}]$, la série $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternées. En reprenant le calcul fait à la question Q27, il vient, pour tout $n \geq 1$,

$$\left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n-1} |x| = \exp \left[(n-1) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right] |x| \leq \exp \left(\frac{n-1}{n} \right) |x| < 1.$$

Le critère spécial donne alors $|S(x)| \leq |a_1 x| \leq e^{-1} < 1$, ce qui permet de conclure.

Q 34. Oui car tout le monde est continu.

IV. Approximation de W

Q 35. Soit $x \geq 0$ (ici, $x \geq e^{-1}$ suffit). L'identité $W(x)e^{W(x)} = x$ donne $W(x) = xe^{-W(x)}$ d'où

$$\phi_x(W(x)) = xe^{-xe^{-W(x)}} = xe^{-W(x)} = W(x).$$

Q 36. La fonction ϕ_x est de classe $\mathcal{C}^\infty$ comme composée de fonctions qui le sont. On calcule

$$\phi'_x(t) = x \times xe^{-t} e^{-xe^{-t}} = -xf(xe^{-t}) \leq x \inf_{s \leq 0} f(s) = \frac{x}{e}.$$

Q 37. L'inégalité des accroissements finis donne, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \geq e^{-1}$,

$$\begin{aligned} |w_{k+1}(x) - W(x)| &= |\phi_x(w_k(x)) - \phi_x(W(x))| \leq \frac{x}{e} |w_k(x) - W(x)| \quad \therefore \\ |w_n(x) - W(x)| &\leq \left(\frac{x}{e} \right)^n |w_0(x) - W(x)| = \left(\frac{x}{e} \right)^n |1 - W(x)| \end{aligned}$$

par une récurrence immédiate.

Q 38. En particulier, si $0 < a < e$,

$$\forall x \in [0, a] : |w_n(x) - W(x)| \leq \left(\frac{a}{e} \right)^n |1 - W(x)| \leq \left(\frac{a}{e} \right)^n \|1 - W\|_{[0, a], \infty} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,$$

car la fonction continue $1 - W$ est bornée sur le segment $[0, a]$, d'où la convergence uniforme de la suite $(w_n)_n$ vers W sur $[0, a]$.

Q 39. Soit $\varepsilon > 0$. La fonction W étant continue, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in [e - \eta, e] : |w_n(x) - W(x)| \leq |1 - W(x)| \leq \varepsilon.$$

De plus, pour $a = e - \eta$, la question Q38 montre qu'il existe un rang n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, \forall x \in [0, e - \eta] : |w_n(x) - W(x)| \leq \left(\frac{e - \eta}{e} \right)^n \|1 - W\|_{[0, a], \infty} \leq \varepsilon.$$

Il s'ensuit que la convergence est bien uniforme sur $[0, e]$.