EPREUVE CENTRALE PSI 2020, MATH II en 4 h

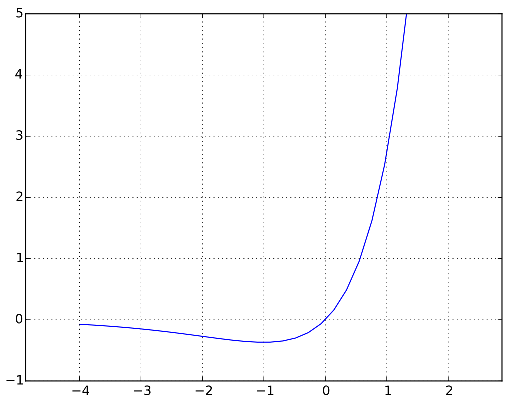
Les fonctions de Lambert

I. Fonction de Lambert

1. La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = (1+x)e^x$. On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f est alors continue et strictement croissante de l'intervalle $[-1, +\infty[$. Appliquons le théorème de la bijection monotone : f réalise une alors bijection de $[-1, +\infty[$ sur $f([-1, +\infty[) = [-e^{-1}, +\infty[$.



2. Le théorème de la bijection monotone implique aussi que la fonction réciproque $\boxed{W \text{ est continue sur } [-e^{-1}, +\infty[}$.
De plus, comme f' ne s'annule pas sur $]-1, +\infty[$ et que f est de classe C^∞, on sait que $\boxed{W \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur }]-e^{-1}, +\infty[}$.

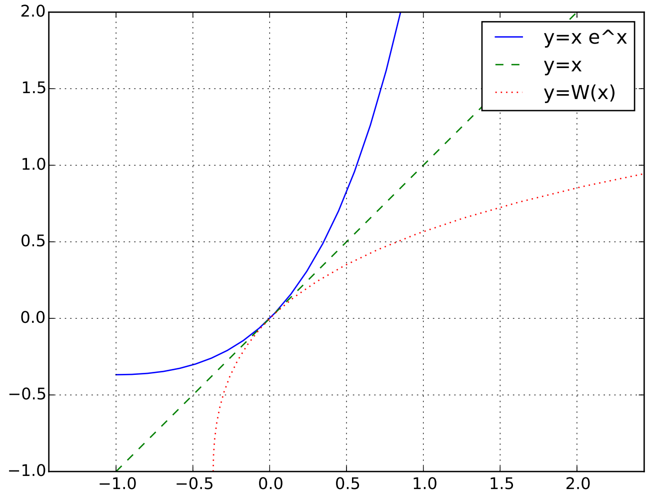
3. Comme $f(0) = 0$, $\boxed{W(0) = 0}$.

De plus, $\boxed{W'(0) = \dfrac{1}{f'(W(0))} = 1}$.

4. Comme W est dérivable en 0, cela suffit à avoir son DL à l'ordre 1 : on a directement $W(x) = W(0) + xW'(0) + o(x) = x + o(x)$ donc $\boxed{W(x) \sim x \text{ en } 0}$.

Par définition de W, $W(x)e^{W(x)} = x$ donc $\ln W(x) + W(x) = \ln x$. Or $\ln u$ est négligeable devant u en $+\infty$. Comme $W(x)$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$, $\ln W(x) = o(W(x))$ et donc $\boxed{W(x) \sim \ln x \text{ en } +\infty}$.

5. Voici les 2 courbes :



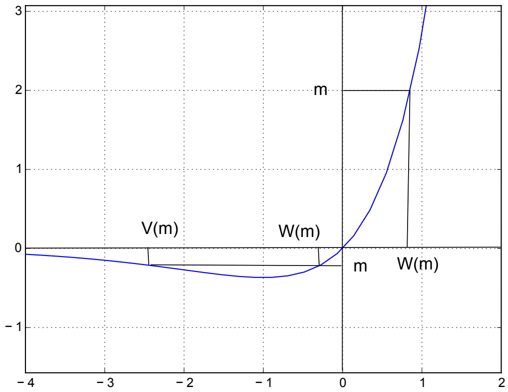
La tangente à la courbe représentant f en $x = 0$ a pour équation
$y = f'(0)(x - 0) + f(0) = x$: c'est la première bissectrice et par symétrie, c'est aussi la tangente au point d'abscisse 0 à la courbe représentant W.
Au point d'abscisse $-e^{-1}$, la courbe représentant W a une tangente verticale car $f'(-1) = 0$.

6. L'application $x \mapsto x^\alpha W(x)$ est continue et positive sur $]0, 1]$.
   De plus $x^\alpha W(x) \sim \dfrac{1}{x^{-1-\alpha}}$ en 0. Cette intégrale de Riemann est convergente sur $]0, 1]$ SSI $-1 - \alpha < 1$ SSI $-2 < \alpha$. Par comparaison de fonctions positives, $x \mapsto x^\alpha W(x)$ est intégrable sur $]0, 1]$ SSI $\boxed{-2 < \alpha}$.

   L'application $h : x \mapsto x^\alpha W(x)$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$.
   De plus $x^\alpha W(x) \sim \dfrac{\ln x}{x^{-\alpha}}$ en $+\infty$.
   Etudions l'intégrabilité de $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^{-\alpha}}$ sur $[1, +\infty[$:
   - Si $-\alpha \leq 1$, et si $x \geq e$, comme $\dfrac{\ln x}{x^{-\alpha}} \geq \dfrac{1}{x^{-\alpha}}$ et que $x \mapsto \dfrac{1}{x^{-\alpha}}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$, on en déduit par comparaison des fonctions positives que h n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.
   - Si $-\alpha > 1$, considérons le milieu du segment $[1, -\alpha]$, à savoir $k = \dfrac{1-\alpha}{2} > 1$. Alors $x^k \dfrac{\ln x}{x^{-\alpha}} = x^{\frac{1+\alpha}{2}} \ln x \longrightarrow 0$ par croissance comparée en $+\infty$. On en déduit $\dfrac{\ln x}{x^{-\alpha}} = o(\dfrac{1}{x^k})$ avec $k > 1$. Par comparaison des fonctions positives, on obtient l'intégrabilité de h sur $[1, +\infty[$.

   On en déduit que $h : x \mapsto x^\alpha W(x)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ SSI $\boxed{\alpha < -1}$.

8. Comme dans Q.1, la fonction f est continue et strictement décroissante de l'intervalle $]-\infty, -1]$. Comme $f(]-\infty, -1]) = [-e^{-1}, 0[$, f réalise une bijection entre ces 2 ensembles en appliquant le théorème de la bijection monotone.
9. A l'aide du tableau de variation de f, on étudie l'équation $f(x) = m$. Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions :
   - Si $m < -e^{-1}$, $\mathcal{S} = \emptyset$
   - Si $m = -e^{-1}$, $\mathcal{S} = \{-1\} = \{V(-e^{-1})\} = \{W(-e^{-1})\}$, singleton
   - Si $-e^{-1} < m < 0$, $\mathcal{S} = \{V(m), W(m)\}$ de cardinal 2
   - Si $m \geq 0$, $\mathcal{S} = \{W(m)\}$, singleton
10. Toujours à l'aide du tableau de variation, en notant $\widetilde{\mathcal{S}}$ l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leq m$:
    - Si $m < -e^{-1}$, $\widetilde{\mathcal{S}} = \emptyset$
    - Si $m = -e^{-1}$, $\widetilde{\mathcal{S}} = \{-1\}$
    - Si $-e^{-1} < m < 0$, $\mathcal{S} = [V(m), W(m)]$, segment
    - Si $m \geq 0$, $\mathcal{S} =]-\infty, W(m)]$, demi-droite.



11. Soit a et b deux réels non nuls. L'équation $e^{ax} + bx = 0$ équivaut à $f(-ax) = \frac{a}{b}$. Notons $\widehat{\mathcal{S}}$ l'ensemble des solutions de l'inéquation
    Avec Q9, on en déduit alors :

- Si $\frac{a}{b} < -e^{-1}$, $\widehat{\mathcal{S}} = \emptyset$
- Si $\frac{a}{b} = -e^{-1}$, $\widehat{\mathcal{S}} = \{\frac{1}{a}\}$
- Si $-e^{-1} < \frac{a}{b} < 0$, $\widehat{\mathcal{S}} = \{-\frac{1}{a}V(\frac{a}{b}), -\frac{1}{a}W(\frac{a}{b})\}$
- Si $\frac{a}{b} \geq 0$, $\widehat{\mathcal{S}} = \{-\frac{1}{a}W(\frac{a}{b})\}$.

II. Probabilité

12. On a $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et en utilisant la formule de probabilité totale appliquée au système complet d'évènements $(N = k)_{k\in\mathbb{N}}$, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}$,
    $\mathbb{P}(X = n) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n|N = k)\mathbb{P}(N = k)$.
    Il reste à calculer $\mathbb{P}(X = n|N = k)$.
    Clairement, si $k < n$, cette probabilité est nulle : il ne peut pas y avoir plus de billets gagnants que de billets.
    Si $k \geq n$, on reconnait une loi binomiale de paramètre k et p : $\mathbb{P}(X = n|N = k) = \binom{k}{n} p^n (1-p)^{k-n}$.

    Il suffit alors de calculer
    $\mathbb{P}(X = n) = \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(X = n|N = k)\mathbb{P}(N = k) = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} p^n (1-p)^{k-n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$
    ce qui donne à l'aide d'un changement d'indice :
    $\mathbb{P}(X = n) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+n}{n} p^n (1-p)^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+n}}{(k+n)!} = e^{-\lambda}\lambda^n p^n \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k \frac{\lambda^k}{k!}$.
    On reconnait enfin une série exponentielle et $\mathbb{P}(X = n) = e^{-\lambda}\lambda^n p^n \frac{1}{n!} e^{\lambda(1-p)} = \frac{(\lambda p)^n e^{-\lambda p}}{n!}$.Ceci est une loi de Poisson et $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p) \text{ et } \mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \lambda p.}$

13. La variable aléatoire X est positive d'espérance finie : on peut appliquer l'inégalité de Markov

$$\mathbb{P}(X \geq 2) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{2} = \frac{\lambda p}{2}$$

Si $p \leq 2\frac{1-\alpha}{\lambda}$, on a immédiatement $\boxed{\mathbb{P}(X \geq 2) \leq 1 - \alpha}$.

14. Calculons directement $\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) = 1 - e^{-\lambda p} - \lambda p e^{-\lambda p}$.
En manipulant les inégalités, $\mathbb{P}(X \geq 2) \leq 1 - \alpha \Longleftrightarrow -e^{-\lambda p}(1 + \lambda p) \leq -\alpha$.
Posons $x = -(\lambda p + 1)$: $\boxed{\mathbb{P}(X \geq 2) \leq 1 - \alpha \Longleftrightarrow x e^{x} \leq -\alpha e^{-1}}$.

15. Utilisons Q.10 et en remarquant que $-\alpha e^{-1} \in] - e^{-1}, 0[$, on se retrouve dans le cas du segment :
$\mathbb{P}(X \geq 2) \leq 1 - \alpha \Longleftrightarrow x \in [V(m), W(m)]$ avec $m = -\alpha e^{-1}$.
Il reste à repasser en la variable p :

$$\mathbb{P}(X \geq 2) \leq 1 - \alpha \Longleftrightarrow -\frac{W(m) + 1}{\lambda} \leq p \leq -\frac{V(m) + 1}{\lambda}$$

La plus grande valeur possible est donc $\boxed{p = -\frac{V(m) + 1}{\lambda}}$.
Il reste à regarder si cette valeur est dans $]0, 1[$. C'est le cas SSI $\lambda > -1 - V(-\alpha e^{-1})$.
Dans ce cas, le plus grand p satisfaisant la condition est $p = -\frac{V(-\alpha e^{-1}) + 1}{\lambda}$.
Dans le cas contraire, un tel p n'existe pas.

16. $X(\Omega) = \{0, ...r\}$ et comme chaque bit a une probabilité de changer de $1-p$, on reconnait une loi binomiale de paramètre $1 - p$ et r donc
$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(r, 1 - p),\ \mathbb{E}(X) = r(1 - p) \text{ et } \mathbb{V}(X) = rp(1 - p)}$.

17. La variable aléatoire X est positive d'espérance finie : on peut appliquer l'inégalité de Markov

$$\mathbb{P}(X \geq 2) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{2} = \frac{r(1 - p)}{2}$$

Si $r \leq 2\frac{1 - \alpha}{1 - p}$, on a immédiatement $\boxed{\mathbb{P}(X \geq 2) \leq 1 - \alpha}$.

18. Calculons directement $\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) = 1 - p^{r} - r(1 - p)p^{r-1}$.
En manipulant les inégalités, $\mathbb{P}(X \geq 2) \leq 1 - \alpha \Longleftrightarrow -p^{r} - r(1 - p)p^{r-1} \leq -\alpha$.
Or $-p^{r} - r(1 - p)p^{r-1} = (1 - p)p^{r-1}(\frac{p}{p - 1} - r) = \frac{(1 - p)p^{r-1}}{\ln p}(\frac{p \ln p}{p - 1} - r \ln p) = x p^{r} \frac{1}{a}$
Et $e^{x} = p^{r} e^{-a}$ permet d'écrire $\mathbb{P}(X \geq 2) \leq 1 - \alpha \Longleftrightarrow \frac{x}{a} e^{x} e^{a} \leq -\alpha$,
ce qui donne bien $\boxed{x e^{x} \leq -\alpha a e^{-a}}$.

19. Utilisons Q.10 : posons $m = -\alpha a e^{-a} = \alpha f(-a)$. Par Q1, comme $a = \frac{p \ln p}{p - 1} > 0$, on a déjà $-e^{-1} \leq f(-a) < 0$ et comme $\alpha \in]0, 1[$, on a $-e^{-1} \leq f(-a) < \alpha f(-a) = m < 0$. On a alors avec Q. 10, l'ensemble des solutions pour x est le segment $[V(m), W(m)]$.
Repassons en la variable r avec $\ln p < 0$:

$$\mathbb{P}(X \geq 2) \leq 1 - \alpha \Longleftrightarrow \frac{W(m) + a}{\ln p} \leq r \leq \frac{V(m) + a}{\ln p}$$

Reste à savoir si $[\frac{W(m) + a}{\ln p}, \frac{V(m) + a}{\ln p}]$ contient des entiers naturels non nuls (r : nombre de bits).
On a vu que $m = -\alpha a e^{-a} = \alpha f(-a) > f(-a)$. Comme W est croissante, $W(m) > W o f(-a)$. Or, $-a$ est dans l'intervalle $[-1, +\infty[$ ($-1 \leq -a$ SSI $1 \geq a$ SSI $p \ln p - p \geq -1$ ce qui se démontre en étudiant rapidement la fonction $x \mapsto x \ln x - x$ qui est décroissante sur $]0, 1[$ et qui vaut -1 en 1) donc $W o f(-a) = -a$ et $W(m) + a > 0$. La borne inférieure du segment $[\frac{W(m) + a}{\ln p}, \frac{V(m) + a}{\ln p}]$ est donc négative.
Donc $[\frac{W(m) + a}{\ln p}, \frac{V(m) + a}{\ln p}]$ contient un naturel non nul SSI $\frac{V(m) + a}{\ln p} \geq 1$ SSI $V(m) + a \leq \ln p$.
On obtient donc pour l'existence d'un plus grand entier tel que $\mathbb{P}(X \geq 2) \leq 1 - \alpha$ la condition : $\boxed{V(m) + a \leq \ln p}$.

20. Cet entier vaut alors $\boxed{\lfloor \frac{V(m) + a}{\ln p} \rfloor}$.

III. Développement en série entière

21. Pour tout entier k, A_k est de degré k. La famille $(A_0,...,A_n)$ est une famille de polynômes de degré échelonné : cette famille est libre, de cardinal $n+1$=dim $\mathbb{C}_n[X]$. C'est donc une $\boxed{\text{base de } \mathbb{C}_n[X]}$.

22. En dérivant,
$A_k'(X) = \frac{1}{k!}(X-ka)^{k-1} + \frac{1}{k!}X(k-1)(X-ka)^{k-2} = \frac{(X-ka)^{k-2}}{k!}(kX-ka)$
donc $\boxed{A_k'(X) = \frac{(X-a-(k-1)a)^{k-2}}{(k-1)!}(X-a) = A_{k-1}(X-a)}$.

23. Si $j>k$, comme A_k est de degré k, $A_k^{(j)} = 0$.
Si $j=k$, comme A_k est de degré k, $A_k^{(j)}$ est un polynôme constant égal au coefficient dominant fois $k!$, ce qui donne 1.
Si $j<k$, avec Q.21, par itération, $A_k^{(j)}(X) = A_{k-j}(X-ja)$ et ce qui donne $A_k^{(j)}(ja) = 0$.

24. Par linéarité de la dérivation, $P^{(j)} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k A_k^{(j)}$ puis $\boxed{P^{(j)}(ja) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k A_k^{(j)}(ja) = \alpha_j}$ à l'aide de Q.22

25. Appliquons la question précédente à $P=(X+y)^n$:
$(X+y)^n = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(ka)A_k = P(0) + \sum_{k=1}^{n} P^{(k)}(ka)\frac{1}{k!}X(X-ka)^{k-1}$.
Calculons $P^{(k)}(ka)$. Comme $P^{(k)}(X) = \frac{n!}{(n-k)!}(X+y)^{n-k}$, on obtient bien
$(X+y)^n = y^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}(ka+y)^{n-k}X(X-ka)^{k-1}$ ce qui donne le résultat en évaluant en x.

26. Dérivons la relation précédente par rapport à x :
$n(x+y)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}(ka+y)^{n-k}(x-ka)^{k-1} + xQ(x)$ avec Q polynôme.
puis évaluons en 0 : $\boxed{ny^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}(ka+y)^{n-k}(-ka)^{k-1}}$.

27. Si $x \neq 0$, posons $u_n = |a_n x^n| = \frac{|x|^n n^{(n-1)}}{n!} > 0$.
Calculons $\frac{u_{n+1}}{u_n} = |x|(1+\frac{1}{n})^{n-1} = |x|\exp((n-1)\ln(1+\frac{1}{n})) \longrightarrow |x|e$.
Appliquons alors la règle de d'Alembert :
- Si $|x| < \frac{1}{e}$, la série $\sum a_n x^n$ est absolument convergente.
- Si $|x| > \frac{1}{e}$, la série $\sum a_n x^n$ diverge grossièrement.

On en déduit que $\boxed{R = \frac{1}{e}}$.

28. D'après le cours, on sait que la somme S est C^∞ sur $]-R,R[$ et que $S^{(n)}(0) = n!a_n = (-n)^{(n-1)}$ si $n \geq 1$ et $S(0)=0$.

29. Etudions la convergence absolue en R de la série entière.
$$|a_n R^n| = \frac{n^{(n-1)}}{e^n n!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}n^{3/2}} \text{ à l'aide de la formule de Stirling.}$$
On obtient alors une série de Riemann convergente et par comparaison des séries à termes positifs, le série $\sum a_n R^n$ est absolument convergente. $\boxed{\text{La somme } S \text{ est donc bien définie en } R \text{ et } -R}$.

De plus, $\forall x \in [-R,R]$, $|a_n x^n| \leq |a_n R^n|$: on a le terme général d'une série majorante convergente. La série de fonctions $\sum a_n x^n$ converge normalement donc uniformément sur $[-R,R]$ et comme chaque fonction

$x \mapsto a_n x^n$ est continue, on obtient avec le théorème de continuité d'une série de fonctions que la somme $\boxed{S \text{ est continue sur } [-R, R].}$

30. La somme S est C^∞ sur $]-R, R[$ et $\forall x \in]-R, R[$, $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.
En regardant la relation à démontrer, on reconnait un produit de Cauchy et en terme de stratégie de calculs, on aura intérêt à faire d'abord le produit $xS'(x)$ pour arranger les puissances : $xS'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$.

De plus, $1 + S(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.
Nos sommes ne commencent pas à 0 mais si on pose $a_0 = 1$, alors on peut écrire :
$1 + S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et $xS'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$.
Ces séries sont absolument convergente pour tout x dans $]-R, R[$, on peut donc effectuer leur produit de Cauchy et on obtient :

$$x(1 + S(x))S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

avec $b_0 = a_0 0 a_0 = 0$ et $\forall n \geq 1$,

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k (n-k) a_{n-k} = n a_n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-k)^{k-1}}{k!}(n-k)\frac{(-(n-k))^{n-k-1}}{(n-k)!}$$

$$= n a_n + \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (k)^{k-1}(n-k)^{n-k}$$

Appliquons alors Q.26 avec $a = -1$ et $y = n$:

$$nn^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (k)^{k-1}(n-k)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (k)^{k-1}(n-k)^{n-k} + n^{n-1} \text{ donc}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (k)^{k-1}(n-k)^{n-k} = (n-1)n^{n-1}$$

Finalement, $b_n = n a_n + \frac{(-1)^n}{n!}(n-1)n^{n-1} = n a_n - (n-1)a_n = a_n$ et

$$\boxed{x(1 + S(x))S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = S(x)}.$$

31. h est de classe C^1 sur $]-R, R[$ car S l'est et $\forall x \in]-R, R[$, $h'(x) = S'(x)e^{S(x)} + S(x)S'(x)e^{S(x)}$.
Appliquons Q.30 pour simplifier $xh'(x) = xS'(x)(1 + S(x))e^{S(x)} = S(x)e^{S(x)} = h(x)$.
h est donc solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$\boxed{xy' - y = 0.}$$

32. Sur $]0, R[$ ou sur $]-R, 0[$, cette équation se met sous forme résolue : $y' - \frac{1}{x}y = 0$.
On sait alors que les solutions s'écrivent $x \mapsto \lambda exp(\ln x) = \lambda x$ sur $]0, R[$ et de la forme $x \mapsto \mu x$ sur $]-R, 0[$ avec λ, μ réels.

Cherchons maintenant les solutions sur $]-R, R[$. Procédons par analyse-synthèse.
Supposons qu'il existe h solution sur $]-R, R[$. Alors h est solution sur $]0, R[$: il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $h = \widetilde{h}_\lambda : x \mapsto \lambda x$ sur $]0, R[$. De même il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel $h = \widehat{h}_\mu : x \mapsto \mu x$ sur $]-R, 0[$.
h est continue en 0 et $\widetilde{h}_\lambda$ et $\widehat{h}_\mu$ tendent toutes les deux vers 0 en 0, cela ne donne pas de condition sur les réels λ et μ.

h est dérivable en 0 et en regardant la limite des taux d'accroissement à droite et à gauche de 0, on obtient que $h'(0) = \lambda = \mu$ donc h est de la forme $x \mapsto \lambda x$ sur $]-R, R[$.

Réciproquement, $h_\lambda : x \mapsto \lambda x$ sur $]-R, R[$ est dérivable sur $]-R, R[$ et est solution de l'équation sur $]-R, R[$.

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle sur $]-R, R[$ est donc $\boxed{\{x \mapsto \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}\}}$.

33. Reprenons la fonction h définie par $\forall x \in]-R, R[,\ h(x) = S(x)e^{S(x)}$. Par Q.32, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $h : x \mapsto \lambda x$ sur $]-R, R[$. De plus, $h'(0) = \lambda = (S(0) + S'(0)S(0))e^{S(0)} = 1$ donc $h : x \mapsto x$.

    On en déduit que $\boxed{\forall x \in]-R, R[,\ S(x)e^{S(x)} = x = f(S(x)).}$
    On va appliquer la question Q.9 avec $m = x$.
    On a déjà que si $m \geq 0$, $S(x) = W(x)$.
    Si $m = x < 0$, on peut avoir $S(x) = V(x)$ ou $S(x) = W(x)$. Cependant, montrons que dans ce cas $S(x) > -1$.
    Si $-R < x < 0$, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!}(x)^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!}(-x)^n < 0$
    De même, $S'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} n(x)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} n(-x)^{n-1} > 0$
    A l'aide de Q.30, $x(1+S(x))S'(x) = S(x)$, on en déduit que si $-R < x < 0$, $S(x)+1 > 0$ donc $S(x) > -1$.
    Il reste alors à appliquer Q1. pour en déduire que $\boxed{S(x) = W(x) \text{ pour tout } x \in]-R, R[.}$
    Autre solution toujours dans la cas $-R < x < 0$ pour montrer $S(x) = W(x)$ et non $V(x)$: par l'absurde, s'il existe $x_0 \in]-R, 0[$ tel que $S(x_0) = V(x_0) < W(x_0)$, alors par continuité de S, décroissance de V et croissance de W sur $]-R, 0[$, on obtiendrait $S(x) = V(x)$ pour tout $x \in [x_0, 0[$, ce qui donnerait en passant à la limite à gauche en 0 : $S(x) \to -\infty$. Absurde car S est continue en 0.

34. Par Q.29, S est continue sur $[-R, R]$. Par Q.2, W est aussi continue $[-R, R]$: les 2 fonctions coincident donc sur $[-R, R]$.

IV. Approximation uniforme

35. Soit x un réel positif fixé. Calculons $\phi_x(W(x)) = x\exp(-xe^{-W(x)})$.
    Par définition de $W(x)$, $W(x)e^{W(x)} = x$ donc $xe^{-W(x)} = W(x)$ d'où
    $\phi_x(W(x)) = xe^{-W(x)} = W(x)$: $\boxed{W(x) \text{ est donc bien un point fixe de } \phi_x}$

36. La fonction ϕ_x est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par composée d'applications de classe C^2.
    De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi'_x(t) = x^2e^{-t}\exp(-xe^{-t}) \geq 0$ et si on utilise Q.1, en remarquant que $\phi'_x(t) = -xf(-xe^{-t})$ et en utilisant la minoration de f par $-e^{-1}$, on obtient $\phi'_x(t) \leq -x(-e^{-1}) = \dfrac{x}{e}$.

    On peut aussi calculer $\phi''_x(t) = x^2e^{-t}\exp(-xe^{-t})(-1 + xe^{-t})$ qui est positive SSI $x \geq e^t$ SSI $\ln x \geq t$.
    On obtient alors le tableau de variation suivant :

t	$-\infty$		$\ln x$		$+\infty$
$\phi''_x(t)$		$+$	0	$-$	
ϕ'_x		$\nearrow$		$\searrow$	

    On en déduit que ϕ'_x a un maximum atteint en $t = \ln x$ et que ce maximum vaut $\phi'_x(\ln x) = x\exp(-xe^{-\ln x}) = x\exp(-x/x) = \dfrac{x}{e}$.

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ 0 \leq \phi_x'(t) \leq \frac{x}{e}}$$

37. La fonction ϕ_x est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R},\ 0 \leq \phi_x'(t) \leq \dfrac{x}{e}$. Appliquons l'inégalité des accroissement finis avec $a, b \in \mathbb{R}$: $|\phi_x(b) - \phi_x(a)| \leq \dfrac{x}{e}|b-a|$ et prenons ensuite $a = w_{n-1}(x)$ et $b = W(x)$.
Par Q.35, $\phi_x(W(x)) = W(x)$ et par définition de la suite (w_n), $\phi_x(w_{n-1}(x)) = w_n(x)$ donc

$$|w_n(x) - W(x)| \leq \frac{x}{e}|w_{n-1}(x) - W(x)|$$

et par récurrence immédiate

$$\boxed{\forall x \in [0,e],\ \forall n \in \mathbb{N},\ |w_n(x) - W(x)| \leq (\frac{x}{e})^n |w_0(x) - W(x)| = (\frac{x}{e})^n |1 - W(x)|}$$

38. Soit a un réel de $]0,e[$. Par la question précédente, $\forall x \in [0,a],\ \forall n \in \mathbb{N}$,
$|w_n(x) - W(x)| \leq (\dfrac{x}{e})^n |1 - W(x)| \leq (\dfrac{a}{e})^n |1 - W(x)| \leq (\dfrac{a}{e})^n \|1 - W\|_{\infty,[0,a]}$.
La majoration précédente est valable pour tout $x \in [0,a]$ et le majorant obtenu ne dépend pas de x : on peut passer à la borne supérieure :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|w_n - W\|_{\infty,[0,a]} \leq (\frac{a}{e})^n \|1 - W\|_{\infty,[0,a]}$$

Il ne reste plus qu'à faire tendre n vers $+\infty$:
$\boxed{\text{la suite de fonctions } (w_n) \text{ converge uniformément vers } W \text{ sur } [0,a].}$

39. Soit $\varepsilon > 0$.
On a vu en Q.2 que W est continue en e et en Q.1 que $W(e) = 1$: il existe alors $a \in]0,e[$ tel que $\forall x \in]a,e],\ |W(x) - W(e)| = |W(x) - 1| \leq \varepsilon$.
Avec Q.35, $\forall x \in]a,e], \forall n \in \mathbb{N},\ |w_n(x) - W(x)| \leq (\dfrac{x}{e})^n |1 - W(x)| \leq |1 - W(x)| \leq \varepsilon$.
Avec Q.38, il existe un N_0 tel que $\forall n \geq N_0$, $\forall x \in [0,a],\ |w_n(x) - W(x)| \leq \varepsilon$.

Donc, $\forall n \geq N_0$, $\forall x \in [0,e],\ |w_n(x) - W(x)| \leq \varepsilon$:
il y a $\boxed{\text{convergence uniforme de la suite } (w_n) \text{ vers } W \text{ sur } [0,e].}$