ENS-X PC 2011

Première partie: La fonction Γ

1.A La fonction $x \to e^{-x}x^{s-1}$ est définie continue et positive sur $]0,+\infty[$.

Au voisinage de 0, $e^{-x}x^{s-1} \sim x^{s-1}$ et x^{s-1} est intégrable au voisinage de 0 puisque $s-1 > -1$

Au voisinage de $+\infty$, $e^{-x}x^{s-1} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ puisque $\lim_{x\to+\infty} x^{s+1}e^{-x} = 0$ donc $e^{-x}x^{s-1}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

1.b Si P est un polynôme de degré n, en posant $Q = \sum_{i=0}^{n} P^{(i)}$, la dérivée de $f: x \to e^{-x}Q(x)$, f est dérivable et pour tout x réel,on a $f'(x) = e^{-x}(Q'(x) - Q(x)) = -e^{-x}P(x)$. On a donc , pour $a > 0$: $\int_0^a e^{-x}P(x)dx$ $= Q(0) - e^{-a}Q(a)$ et lorsque a tend vers $+\infty$ cette quantité tend vers $Q(0) = \sum_{i=0}^{n} P^{(i)}(0)$ On a donc $\boxed{\int_0^{+\infty} x^{m-1}e^{-x}dx = (m-1)!}$

(On peut de façon plus classique montrer $\Gamma(m+1) = m\Gamma(m)$ par intégration par parties)

1.c Soient des réels a et b avec $0 < a < b$

Pour tout $s \in [a,b]$ l'application $t \to t^{s-1}e^{-t}$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, l'application $s \to e^{-t}t^{s-1}$ est continue sur $[a,b]$

Enfin , pour tout $s \in [a,b]$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$, $|e^{-t}t^{s-1}| \leq \varphi(t)$ où $\varphi(t) = t^{a-1}$ si $t \in]0,1]$ et $\varphi(t) = e^{-t}t^{b-1}$ si $t \in]1,+\infty[$

φ est continue par morceaux , intégrable sur $]0,1]$ et $]1,+\infty[$ donc sur $\mathbb{R}_+$.

On en déduit donc que Γ est continue sur l'intervalle $[a,b]$ d'après le théorème de continuité sous le

Ceci étant vrai pour tout segment $[a,b] \subset R_+^*$, Γ est continue sur R_+^*

2 a)On a par concavité $\ln x \leq x-1$ pour tout réel $x > 0$. On a donc ,pour $x \in [0,m[$ $\ln(1-\frac{x}{m}) \leq -\frac{x}{m}$, donc $m\ln(1-\frac{x}{m}) \leq -x$ et par croissance de l'exponentielle $e^{m\ln(1-\frac{x}{m})} \leq e^{-x}$ ce qui est l'inégalité demandée. Pour $x = m$, on a bien $0 \leq e^{-m}$

On a, losque m tend vers $+\infty$ $m\ln(1-\frac{x}{m}) \sim -\frac{mx}{m} = -x$ et donc $\lim_{m\to+\infty} m\ln(1-\frac{x}{m}) = -x$. Par continuité de l'exponentielle, on a alors $\lim_{m\to+\infty}(1-\frac{x}{m})^m = e^{-x}$

2.b)On fait le changement de variable de classe C^1 $u = \frac{x}{m}$ Ce changement de variables est un difféomorphisme strictement croissant de $[0,m]$ sur $[0,1]$. On obtient alors $\int_0^m (1-\frac{x}{m})^m x^{s-1}dx = m^s\int_0^1 (1-u)^m u^{s-1}du$ (et l'intégrale converge)

Pour $\varepsilon \in]0,1]$, $\int_\varepsilon^1 (1-u)^m u^{s-1}du = [\frac{1}{s}(1-u)^m u^s]_\varepsilon^1 + \frac{m}{s}\int_\varepsilon^1 (1-u)^{m-1}u^s du$ et en faisant tendre ε vers 0 on obtient alors :$J_{m,s} = \int_0^1 (1-u)^m u^{s-1}du = \frac{m}{s}\int_0^1 (1-u)^{m-1}u^s du = \frac{m}{s}J_{m-1,s+1}$.

De proche en proche $J_{m,s} = \frac{m(m-1)\dots1}{s(s+1)..(s+m-1)}J_{0,s+m}$ et $J_{0,s+m} = \int_0^1 u^{s+m-1}du = \frac{1}{s+m}$. On obtient bien le résultat demandé.

2c)On considère la fonction f_m $(m \in N^*)$ définie sur $]0,+\infty[$ par $f_m(x) = (1-\frac{x}{m})^m x^{s-1}$ si $x \in]0,m]$ et $f_m(x) = 0$ si $x > m$.

f_m est définie, continue positive sur $]0,+\infty[$ et intégrable sur $]0,+\infty[$. On a $0 \le f_m(x) \le e^{-x}x^{s-1}$ pour $x \in]0,m]$ d'après $2a)$ et cette relation est encore vraie pour $x > m$. La fonction $x \to e^{-x}\ x^{s-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$

Enfin , si $x > 0$ est fixé, pour $m \ge E(x)+1 \quad f_m(x) = \ (1-\frac{x}{m})^m x^{s-1}$ et $\lim_{m\to+\infty} f_m(x) = e^{-x}x^{s-1}$.

D'après le théorème de convergence dominée, on obtient donc :$\Gamma(s) = \lim_{m\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_m(x)dx = \lim_{m\to+\infty} \int_0^m f_m(x)$ dx

Donc $\boxed{\Gamma(s) = \lim\limits_{m\to+\infty} \frac{m!m^s}{s(s+1)...(s+m)}}$

Deuxième partie: matrices positives et matrices de Hadamard

3 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ est positive si et seulement si pour tous réels x_1 et x_2 : $ax_1^2 + 2bx_1x_2 + dx_2^2 \ge 0$ (1)

Si (1) est réalisée, en particulier , avec $(x_1,x_2) = (1,0)$, on obtient $a \ge 0$. Avec $(x_1,x_2) = (0,1)$ on obtient $d \ge 0$

Si $a > 0$, alors , pour $x_2 = 1$, le trinôme du second degré $x \to ax_1^2 + 2bx_1 + d$ ne prend que des valeurs positives, donc son discriminant est négatif ou nul: $4(b^2 - ac) \le 0$, donc $\det(A) = ad - bc \ge 0$

Si $a = 0$, et $d > 0$, on raisonne de même en prenant $x_1 = 1$

Si $a = d = 0$, alors nécessairement $b = 0$ car sinon $2bx_1x_2$ prend des signes opposés pour par exemple $(x_1,x_2) = (1,1)$ et $(x_1,x_2) = (1,-1)$. On a alors $\det(A) = 0$

Réciproquement, supposons $a \ge 0, d \ge 0, ad - b^2 \ge 0$

Si $a > 0$, pour tout $x_2 \in \mathbb{R}$, le trinôme $x_1 \to ax_1^2 + 2bx_1x_2 + dx_2^2$ qui a son discriminant négatif garde un signe constant , positif puisque $a > 0$

Si $a = 0$ alors $b = 0$, et alors $dx_2^2 \ge 0$ pour tout x_2, donc la matrice est positive

4La question est classique

5 On remarque que B est symétrique réelle. De plus, on a pour tout $X =^t (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \sum\limits_{1\le i,j\le n} b_{i,j}x_ix_j = \sum\limits_{1\le i,j\le n} a_{i,j}y_iy_j \ge 0$, où l'on a posé $y_i = \lambda_i x_i$

6.A est symétrique réelle d'après la symétrie du produit scalaire On a pour tout $X =^t (x_1,..,x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \sum\limits_{1\le i,j\le n} (u_i|u_j)x_ix_j = \left\| \sum\limits_{i=1}^n x_iu_i \right\|^2 \ge 0$

7.Si $A = (a_{i,j})$ et B diagonale d'éléments diagonaux $d_1,\ldots,d_n$, positifs ou nuls, et $C = A * B = (c_{i,j})$,on a pour tout ${}^t(x_1,..,x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \sum\limits_{1\le i,j\le n} c_{i,j}x_ix_j = \sum\limits_{1\le i,j\le n} a_{i,i}d_ix_i^2 \ge 0$. En effet on a pour tout $k \in [|1,n|] \quad = \sum\limits_{1\le i,j\le n} a_{i,j}\delta_{i,k}\delta_{j,k} \ge 0$ (on choisit donc $x_i = \delta_{i,k}$)

8a Si $A \in SM_n(\mathbb{R})$ est positive elle est orthogonalement semblable à une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} d_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_n \end{pmatrix}$ à coefficients positifs: $A = ({}^tP)DP\ \ P$ étant orthogonale d'ordre n.

On peut écrire $D = \sum_{i=1}^{n} ({}^tX_i)X_i$ avec $X_i = \begin{pmatrix} 0, & , & \underbrace{\sqrt{d_i}}_{i\grave{e}me\ rang} & ,0..,0 \end{pmatrix} \in M_{1,n}(\mathbb{R})$

On a alors $\boxed{A = \sum_{i=1}^{n} ({}^tP){}^tX_iX_iP = \sum_{i=1}^{n} Y_i({}^tY_i)}$ avec $Y_i = {}^t\ (X_iP)$

8;b Remarquons que la somme de matrices symétriques positives est encore symétrique positive (vérification immédiate avec la définition).D'autre part $*$ est distributive par rapport à l'addition. On peut écrire B comme somme de matrices $Y_i({}^tY_i)$ avec ${}^tY_i = (y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n$. Une telle matrice a pour terme général $c_{i,j} = y_iy_j$ et la matrice $A * (Y_i\ {}^tY_i)$ a alors pour terme général $a_{i,j}y_iy_j$. D'après la question 5, cettte matrice est positive. On a alors $A * B = \sum_{i=1}^{n} A * (Y_i\ {}^tY_i)$ donc <u>$A * B$ est positive.</u>

Troisième partie: matrices infiniment divisibles

9a Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in SM_2(\mathbb{R})$ positive, a,b,c,d étant positifs ou nuls.

On a alors $A^{*r} = \begin{pmatrix} a^r & b^r \\ b^r & d^r \end{pmatrix}$. Cette matrice est symétrique réelle. De plus $a^r \geq 0, d^r \geq 0$

Enfin $ad \geq b^2$ donc $a^rd^r \geq b^{2r}$ donc $\det(A^{*r}) \geq 0$. D'après 3, cette matrice est positive.

9.b A est symétrique réelle. On a $sp(A) = \{0,1,3\}$. A est donc positive.

Pour $r > 0$, on a $A^{*r} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2^r & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique A^{*r} est -$(x-1)(x^2 - x(1+2^r) + 2^r - 2)$

En particulier, pour $x = 0$ $\det(A^{*r}) = 2^r - 2$.

Donc pour $r \in]0,1[$ $\det(A^{*r}) < 0$ et donc A^{*r} n'est pas positive.

Pour $r \geq 1$, on a $sp(A^{*r}) = \{1,a,b\}$ avec $a + b = 1 + 2^r > 0$ et $ab = 2^r - 2 \geq 0$. Donc $a \geq 0$ et $b \geq 0$.

En conclusion A^{*r} est positive si et seulement si $r \geq 1$

10 Pour $r > 0$ $b_{i,j}^r = \lambda_i^r\lambda_j^r a_{i;j}^r$. Par hypothèse, la matrice de terme général $a_{i,j}^r$ est positive,et donc d'après la question 5, la matrice B^{*r} est positive pour tout $r > 0$.

<u>Donc B est infiniment divisible</u>.

11 Etant donné que le produit $*$ de deux matices positives est positif, et associatif,$A^{*(\frac{k}{m})}$ est symétrique et positif pour tout $m \in N^*$. et $k \in N^*$

Donc A^{*r} est positive pour tout rationnel $r > 0$.

Soit r un réel strictement positif. Il existe une suite (q_n) de rationnels strictement positifs qui converge vers r.

On a alors , pour tout ${}^t(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{1\le i,j\le n} a_{i,j}^{q_n}x_ix_j = \sum\limits_{1\le i,j\le n} a_{i,j}^{r}x_ix_j \geq 0$ par prolongement des inéagalités larges à la limite .

A^{*r} est donc positive pour tout $r>0$ et A est infiniment divisible.

12a $(u_i|u_j)=\int_0^{+\infty}e^{-(\lambda_i+\lambda_j)t}dt=\frac{1}{\lambda_i+\lambda_j}$

C est donc positive d'près la question 6

12b $\Gamma(r)=\int_0^{+\infty}e^{-u}u^{r-1}du$ (intégrale convergente. On effectue la changement de variables $u=t\alpha$ c'est à dire $t=\frac{u}{\alpha}$

L'application $u\to\frac{u}{\alpha}$ est un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui-même.

On a donc $\Gamma(r)=\int_0^{+\infty}e^{-t\alpha}(t\alpha)^{r-1}\alpha dt=\alpha^r\int_0^{+\infty}e^{-t\alpha}t^{r-1}dt$ (et la deuxième intégrale converge)

On a bien, puisque $\Gamma(r)>0$ (la fonction à intégrer est continue et strictement positive) donc $\frac{1}{\alpha^r}=\frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^{+\infty}e^{-t\alpha}t^{r-1}dt$

12 c

Soit $(u,v)\in H_r^2$. On a $|uv|\leq\frac{1}{2}(u^2+v^2)$ et donc $\langle u,v\rangle$ est bien défini..

Le reste est sans problème

12 .d On a bien $u_i\in H_r$ puisque l'intégrale $\int_0^{+\infty}e^{-2\lambda_it}t^{r-1}dt$ converge.

On a alors, pour le produit scalaire précédent $\langle u_i,u_j\rangle=\int_0^{+\infty}e^{-(\lambda_i+\lambda_j)t}t^{r-1}dt=\frac{\Gamma(r)}{(\lambda_i+\lambda_j)^r}$

La matrice de terme général $\langle u_i,u_j\rangle$ est positive d'après la question $6.$ Il en est donc de même de la matrice de terme général $\frac{1}{\Gamma(r)}\langle u_i,u_j\rangle$ puisque $\Gamma(r)>0$

On en déduit donc que $\mathbb{C}$ est infiniment divisible.

13.a Pour $s>0$ on a $\boxed{\Gamma(s)=\lim\limits_{m\to+\infty}\frac{m!m^s}{s(s+1)\dots(s+m)}=\lim\limits_{m\to+\infty}m!m^s\prod\limits_{p=1}^{m+1}\frac{1}{s-1+p}}$

Donc $\frac{\Gamma(\lambda_i+\lambda_j+1)}{\Gamma(\lambda_i+1)\Gamma(\lambda_j+1)}=\lim\limits_{m\to+\infty}\frac{m!m^{\lambda_i+\lambda_j+1}}{(m!)^2m^{\lambda_i+1}m^{\lambda_j+1}}\prod\limits_{p=1}^{m+1}\frac{(\lambda_i+p)(\lambda_j+p)}{\lambda_i+\lambda_j+p}=\boxed{\lim\limits_{m\to+\infty}\frac{1}{m!m}\prod\limits_{p=1}^{m+1}\frac{(\lambda_i+p)(\lambda_j+p)}{\lambda_i+\lambda_j+p}}$

13 b La matrice de terme général $\frac{1}{\lambda_i+\lambda_j+p}$ est infiniment divisible d'après 12 d en posant $\mu_i=\lambda_i+\frac{p}{2}>0$

D'après la question 10 , la matrice de terme général $\left(\frac{(\lambda_i+p)(\lambda_j+p)}{\lambda_i+\lambda_j+p}\right)_{1\le i,j\le n}$ est donc infiniment divisible.

Pour $r>0$ et $m\in N^*,$ la matrice de terme général $\left(\left(\prod\limits_{p=1}^{m+1}\frac{(\lambda_i+p)(\lambda_j+p)}{\lambda_i+\lambda_j+p}\right)^r\right)_{1\le i,j\le n}$ est donc positive ainsi donc que la matrice de terme général

$\left(k_{i,j}^{(m)}=\left(\frac{1}{mm!}\prod\limits_{p=1}^{m+1}\frac{(\lambda_i+p)(\lambda_j+p)}{\lambda_i+\lambda_j+p}\right)^r\right)_{1\le i,j\le n}$. Par passage à la limite, la matrice de terme général $k_{i,j}^r$ est positive puisque l'on a $\sum_{1\le i,j\le n} k_{i,j}^{(m)} x_i x_j \ge 0$ donc $\sum_{1\le i,j\le n} k_{i,j}^r x_i x_j \ge 0$ pour tout ${}^t(x_1,..,x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Donc la matrice de terme général $k_{i,j}$ est infiniment divisible.

Quatrième partie: matrices conditionnellement positives

Question 14

On pose donc pour $r \ge 0$ $f(r) = \sum_{1\le i,j\le n} x_i x_j \left(\frac{1}{\lambda_i+\lambda_j}\right)^r = \sum_{1\le i,j\le n} x_i x_j e^{-r\ln(\lambda_i+\lambda_j)}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour $r \ge 0$ $f'(r) = -r \sum_{1\le i,j\le n} x_i x_j \ln(\lambda_i+\lambda_j) e^{-r\ln(\lambda_i+\lambda_j)}$

Or $f(0) = \sum_{1\le i,j\le n} x_i x_j = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 = 0$ et $f(r) \ge 0$ pour tout $r > 0$ d'après la question 12.

On a donc $f'(0) = \lim_{r\to 0^+} \frac{f(r)}{r} \ge 0$

D'où $-\sum_{1\le i,j\le n} x_i x_j \ln(\lambda_i+\lambda_j) \ge 0$.

Q15

Supposons (ii) réalisée. Soit $\varepsilon > 0$ et $\lambda > 0$ associé. On pose $C = (c_{i,j}) = B + \varepsilon I_n + \lambda J$

On a alors, pour tout $X = {}^t(x_1,..,x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n x_i = 0$:

${}^tXCX = ({}^tXBX) + \varepsilon {}^tXX \ge 0$ (Car $JX = 0_{n,1}$)

En faisant tendre ε vers 0, on alors: $({}^tXBX) \ge 0$

Donc B est conditionnellement positive.

Q16

16a)Soit $(x_{1,\dots,}x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n x_i = 0$

On considère pour $r \ge 0$ $f(r) = \sum_{1\le i,j\le n} x_i x_j a_{i,j}^r$

Comme en Q14, on a $f(0) = 0$ et $f(r) > 0$ pour $r > 0$ puisque la matrice de terme général $(a_{i,j})$ est infiniment divisible.

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $f'(0) = \lim_{r\to 0^+} \frac{f(r)}{r} \ge 0$

Or $f'(0) = \sum_{i=1}^n \ln(a_{i,j}) x_i x_j$, d'où le résultat

16b)Soit $\varepsilon > 0$ et $\lambda > 0$ associé comme dans la question 15.

Soit ${}^t(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ On pose $f(r) = \sum_{1\le i,j\le n} x_i x_j \exp(rc_{i,j}) = \sum_{1\le i,j\le n} x_i x_j \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{r^p c_{i,j}^p}{p!}\right) =$

$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{r^p}{p!} \left(\sum_{1\le i,j\le n} x_i x_j c_{i,j}^p\right)$

Comme la matrice $(c_{i,j})$ est positive, la matrice $(c_{i,j}^p)$ l'est également, donc $\sum_{1\le i,j\le n} x_i x_j c_{i,j}^p \ge 0$ pour tout entier naturel p.

Et donc $f(r) \ge 0$ pour tout $r \ge 0$, ce qu'il fallait démontrer.

On a $b_{i,j} = c_{i,j} - \varepsilon\delta_{i,j} - \lambda$

Donc $\exp(rb_{i,j}) = \exp(rc_{i,j})\exp(-\varepsilon\delta_{i,j})\exp(-\lambda)$

La matrice de terme général $\exp(-\varepsilon\delta_{i,j})$ est positive.(c'est un multiple positif de I_n)

Donc la matrice de terme général $\exp(rc_{i,j})\exp(-\varepsilon\delta_{i,j})$ également, ainsi donc que la matrice de terme général $\exp(rb_{i,j})$

17a)Montrons que la matrice de terme général $(-|z_i - z_j|^2)_{1\le i,j\le n}$ est conditionnellement positive.

Soit ${}^t(x_1,..,x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n x_i = 0$

On a alors $-\sum_{1\le i,j\le n} x_i x_j |z_i - z_j|^2 = -\sum_{1\le i,j\le n} x_i x_j |z_i|^2 - \sum_{1\le i,j\le n} x_i x_j |z_j|^2 + 2\sum_{1\le i,j\le n} x_i x_j \operatorname{Re}(\overline{z_i} z_j)$

Or $\sum_{1\le i,j\le n} x_i x_j |z_i|^2 = \left(\sum_{j=1}^n x_j\right)\left(\sum_{i=1}^n x_i |z_i|^2\right) = 0.$

De même

$\sum_{1\le i,j\le n} x_i x_j |z_j|^2 = 0.$

Enfin l,'application $(z,z') \to \operatorname{Re}(\overline{z}z')$ de C^2 dans $\mathbb{R}$ est un produit scalaire (le produit scalaire canonique de $\mathbb{C}$ identifié à $\mathbb{R}^2$, donc $\sum_{1\le i,j\le n} x_i x_j \operatorname{Re}(\overline{z_i} z_j) \ge 0.$

La matrice $(-|z_i - z_j|^2)_{1\le i,j\le n}$ est donc conditionnellement positive, et la matrice $(e^{-|z_i - z_j|^2})_{1\le i,j\le n}$ est donc infiniment divisible.

17b)Soient $t > 0$ et $u > 0$. Comme $e^{-tu} > 0$, la matrice de terme général $e^{-ut-u|z_i - z_j|^2}$ est positive.

Donc pour tout ${}^t(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a $\sum_{1\le i,j\le n} x_i x_j e^{-ut-u|z_i - z_j|^2} \ge 0$

La fonction $u \to e^{-ut-u|z_i - z_j|^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et $\int_0^{+\infty} e^{-ut-u|z_i - z_j|^2} du = \frac{1}{t+|z_i - z_j|^2}$

on a donc

$\int_0^{+\infty}\left(\sum_{1\le i,j\le n} x_i x_j e^{-ut-u|z_i - z_j|^2}\right)du = \sum_{1\le i,j\le n} x_i x_j \int_0^{+\infty} e^{-ut-u|z_i - z_j|^2} du = \sum_{1\le i,j\le n} \frac{1}{t+|z_i - z_j|^2} x_i x_j \ge 0$ et la matrices de coefficients $\frac{1}{t+|z_i - z_j|^2}$ est donc positive.

Soient ${}^t(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\sum_{i=1}^n x_i = 0.$

On a alors $-\sum_{1\le i,j\le n} \frac{|z_i - z_j|^2}{t+|z_i - z_j|^2} x_i x_j = \sum_{1\le i,j\le n} \frac{1}{t+|z_i - z_j|^2} x_i x_j - \sum_{1\le i,j\le n} x_{ii} x_j =$

$\sum_{1\le i,j\le n} \frac{1}{t+|z_i - z_j|^2} x_i x_j - (x_1 + .. + x_n)^2 = \sum_{1\le i,j\le n} \frac{1}{t+|z_i - z_j|^2} x_i x_j \ge 0$

Donc $-\sum_{1\leq i,j\leq n}\frac{t^{-\frac{1}{2}}|z_i-z_j|^2}{t+|z_i-z_j|^2}x_ix_j \geq 0$

Or la fonction $t \to \frac{t^{-\frac{1}{2}}|z_i-z_j|^2}{t+|z_i-z_j|^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

En effet cette fonction est positive. Elle équivaut au voisinage de $+\infty$ à $\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$ et $\frac{3}{2} > 1$.

De plus, au voisinage de 0, on a $\frac{t^{-\frac{1}{2}}|z_i-z_j|^2}{t+|z_i-z_j|^2} \sim t^{-\frac{1}{2}}$ si $z_i \neq z_j$. Sinon la fonction est nulle.

On a donc $-\sum_{1\leq i,j\leq n}\left(\int_0^{+\infty}\frac{t^{-\frac{1}{2}}|z_i-z_j|^2}{t+|z_i-z_j|^2}dt\right)x_ix_j \geq 0$ ce qui prouve que la matrice de terme général $-\int_0^{+\infty}\frac{t^{-\frac{1}{2}}|z_i-z_j|^2}{t+|z_i-z_j|^2}dt$ est conditionnellement positive.

17)cOn fait le changement de variables $u = t^{\frac{1}{2}}$ qui réalise un difféomorphisme strictement croissant de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.

On obtient $\int_0^{+\infty}\frac{t^{-\frac{1}{2}}|z_i-z_j|^2}{t+|z_i-z_j|^2}dt = 2\int_0^{+\infty}\frac{|z_i-z_j|^2}{u^2+|z_i-z_j|^2}du$

Si $z_i = z_j$ cette intégrale vaut 0, et sinon elle vaut $2\int_0^{+\infty}\frac{1}{\left(\frac{u}{|z_i-z_j|}\right)^2+1}du = 2|z_i - z_j|\left[\arctan\frac{u}{|z_i-z_j|}\right]_0^{+\infty} = \pi|z_i - z_j|$

(Cette dernière expression est encore vraie pour $z_i = z_j$);

On en déduit que la matrice de terme général $-|z_i - z_j|$ est conditionnellement positive, et donc, que d'après la question 15, la matrice de terme général $e^{-|z_i-z_j|}$ est infiniment divisible.