

**Partie I**

**1) a)** Soit  $f_s$  la fonction définie sur  $I = ]0, +\infty[$  par  $f_s(x) = e^{-x} x^{s-1}$ . On va montrer que  $f_s$  est intégrable sur  $I$  (et non sur  $[0, +\infty[$ ).

$f_s$  est continue sur  $I$  donc intégrable sur tout segment  $[a, b]$  tel que  $0 < a < b$ . L'intégrabilité est un problème local en 0 et en  $+\infty$ .

En 0 on exploite  $f_s(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^{s-1}$  et cette dernière fonction est intégrable sur  $]0, a]$ . Donc  $f_s$  l'est aussi.

En  $+\infty$  on exploite que  $x^2 f_s(x) = e^{-x} x^{s+1}$  a pour limite 0. Donc  $f_s(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 0 \left( \frac{1}{x^2} \right)$ . Cela assure l'intégrabilité de  $f_s$  sur  $[b, +\infty[$ . Finalement  $f_s$  est intégrable sur  $I = ]0, +\infty[$ .

**b)** On intègre par parties sur  $[a, b]$  :  $\int_a^b e^{-x} x^{s-1} dx = \frac{1}{s} [-e^{-x} x^s]_a^b + \frac{1}{s} \int_a^b e^{-x} x^s dx$ .

On passe à la limite quand  $a$  tend vers 0 et quand  $b$  tend vers  $+\infty$ . Le crochet tend vers 0 car  $s > 0$  donc  $\Gamma(s) = \frac{1}{s} \Gamma(s+1)$ .

Avec  $\Gamma(1) = 1$  on en déduit facilement :  $\Gamma(m) = (m-1)!$  pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ .

**c)** Pour tout  $s > 0$ ,  $\Gamma(s) = \int_I \varphi(s, x) dx$  où l'on a posé :  $\varphi(s, x) = e^{-x} x^{s-1}$ .

Pour que  $\Gamma$  soit continue sur  $I$  il suffit de satisfaire les conditions :

\*\*  $\forall x \in I$  la fonction  $s \mapsto \varphi(s, x)$  est continue sur  $I$

\*\*  $\forall s \in I$ , la fonction  $x \mapsto \varphi(s, x)$  est continue par morceaux sur  $I$

\*\* Il existe une fonction  $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}_+$  intégrable sur  $I$  telle que pour tout  $(s, x) \in I^2$ ,  $|\varphi(s, x)| \leq \psi(x)$  (condition de domination).

Pour cette dernière condition on peut remplacer  $I^2$  par  $[\alpha, \beta] \times I$  où  $[\alpha, \beta]$  est un segment quelconque inclus dans  $I$ .

Les deux premières conditions sont clairement satisfaites.

Pour la domination on observe que lorsque  $(s, x) \in [\alpha, \beta] \times I$  :

si  $x \geq 1$  alors  $x^{s-1} \leq x^{\beta-1}$  donc  $0 \leq \varphi(s, x) \leq \varphi(\beta, x)$

si  $0 < x \leq 1$  alors  $x^{s-1} \leq x^{\alpha-1}$  donc  $0 \leq \varphi(s, x) \leq \varphi(\alpha, x)$

Dans tous les cas :  $0 \leq \varphi(x, s) \leq \varphi(\beta, x) + \varphi(\alpha, x)$ . En posant  $\psi(x) = \varphi(\beta, x) + \varphi(\alpha, x)$  la fonction  $\psi$  est intégrable sur  $I$  et la condition de domination (sous forme faible) est satisfaite.

Donc la fonction  $\Gamma$  est continue sur  $I = ]0, +\infty[$ .

**2) a)** L'inégalité est évidente si  $x = m$ .

Si  $0 \leq x < m$  alors  $\left(1 - \frac{x}{m}\right)^m = \exp \left[ m \ln \left(1 - \frac{x}{m}\right) \right]$ . L'inégalité usuelle  $\ln(1+t) \leq t$  donne  $\ln \left(1 - \frac{x}{m}\right) \leq -\frac{x}{m}$  donc  $m \ln \left(1 - \frac{x}{m}\right) \leq -x$ .

La fonction exp est croissante donc  $\left(1 - \frac{x}{m}\right)^m \leq e^{-x}$

$x$  étant choisi dans  $\mathbb{R}$  on a  $x < m$  pour  $m$  assez grand. Donc pour  $m$  assez grand,  $\left(1 - \frac{x}{m}\right)^m = \exp \left[ m \ln \left(1 - \frac{x}{m}\right) \right]$ . L'équivalent usuel  $\ln(1+t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$  donne immédiatement :  $\lim_{m \rightarrow \infty} m \ln \left(1 - \frac{x}{m}\right) = -x$ .

La fonction exp étant continue il vient :  $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m = e^{-x}$ .

**b)** Soient  $m, k \in \mathbb{N}, s > 0$ . L'existence de l'intégrale  $T(m, k, s) = \int_0^m \left(1 - \frac{x}{m}\right)^k x^{s-1} dx$  s'établit avec la même étude locale en 0 qu'en 1)a).

Une intégration par parties analogue à celle de 1)b) donne :  $T(m, k, s) = \frac{k}{ms} T(m, k-1, s+1)$ . D'où par une chaîne d'égalités :  $T(m, k, s) = \frac{k!}{m^k s(s+1) \dots (s+k-1)} T(m, 0, s+k)$ .

Or  $T(m, 0, s+k) = \frac{m^{s+k}}{s+k}$ . Donc  $T(m, k, s) = \frac{k! m^s}{s(s+1) \dots (s+k)}$ . Donc  $T(m, m, s) = \frac{m! m^s}{s(s+1) \dots (s+m)}$ .

On peut aussi commencer par le changement de variable  $x = mt, dx = m dt$ .

**c)** On introduit une suite  $(h_m)_{m \geq 1}$  de fonctions définies sur  $I = ]0, +\infty[$  par  $h_m(x) = \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m x^{s-1}$  si  $0 < x \leq m$  et  $h_m(x) = 0$  si  $x \geq m$ .

La question 2a) assure que pour tout  $m \geq 1$  et tout  $x \in I$ ,  $|h_m(x)| \leq f_s(x)$  (indépendant de  $m$ ). La suite de fonctions  $(h_m)_m$  est dominée sur  $I$  par la fonction  $f_s$  intégrable sur  $I$ .

D'autre part pour tout  $x \in I$  on a  $h_m(x) = \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m x^{s-1}$  pour  $m$  assez grand. La question 2)a) assure aussi que la suite  $(h_m)_m$  converge simplement sur  $I$  vers la fonction  $f_s$ .

Le théorème de la convergence dominée peut donc s'appliquer. Il vient :  $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_I h_m = \int_I \left(\lim_{m \rightarrow \infty} h_m\right)$ .

Le membre de droite est  $\int_I f_s = \Gamma(s)$ .

Au membre de gauche,  $\int_I h_m = \int_0^m h_m(x) dx = T(m, m, s) = \frac{m! m^s}{s(s+1) \dots (s+m)}$  d'après 2)b).

Donc  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m! m^s}{s(s+1) \dots (s+m)} = \Gamma(s)$ .

## Partie II

**3)** On suppose  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  positive. Avec  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  il vient :  $a = {}^t e_1 A e_1 \geq 0$ . De même avec  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  :  $d \geq 0$ .

De plus pour tout réel  $t$  en prenant  $X = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$  :  $at^2 + 2bt + c = {}^t X A X \geq 0$ . Si  $a \neq 0$  alors le discriminant est négatif ou nul donc  $b^2 - ac \leq 0$  donc  $\det A \geq 0$ . Si  $a = 0$  il reste pour tout réel  $t$  :  $2bt + c \geq 0$ . En envisageant la limite quand  $t \rightarrow \pm\infty$  on voit que  $b = 0$ . Donc  $\det A = 0$ .

Réciproquement, on suppose  $a \geq 0, c \geq 0, \det A \geq 0$ .

Si  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  alors  ${}^t X A X = ax^2 + 2bxy + cy^2$

Si  $a > 0$  alors  $ax^2 + 2bxy + cy^2 = a \left[ \left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \frac{\det A}{a^2}y^2 \right] \geq 0$ .

Si  $a = 0$  alors  $\det A \geq 0$  donne  $b = 0$ . Donc  $ax^2 + 2bxy + cy^2 \geq 0$ .

Dans les deux cas la matrice symétrique  $A$  est positive.

**4)** On suppose  $A$  positive. Vu qu'elle est symétrique réelle elle est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  donc ses valeurs propres sont réelles. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  une valeur propre et  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  un vecteur propre associé. Alors

$AX = \lambda X$  et  ${}^t X A X = \lambda {}^t X X = \lambda \|X\|^2$ . Donc  $\lambda = \frac{{}^t X A X}{\|X\|^2} \geq 0$ .

Réciproquement, on suppose que les valeurs propres de  $A$  sont toutes positives ou nulles. L'endomorphisme  $L_A$  canoniquement associé à  $A$  est auto-adjoint. Le théorème spectral assure qu'il est diagonalisable dans une base orthonormale  $(u_1, \dots, u_n) : L_A(u_i) = Au_i = \lambda_i u_i, \lambda_i \in \mathbb{R}_+$ .

Alors pour tout  $X \in \mathbb{R}^n$  il existe des réels  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  tels que  $X = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$ . Donc  $AX = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i u_i$ .

Vu que la base est orthonormale,  ${}^tXAX = \langle X, AX \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \lambda_i \geq 0$ . Donc  $A$  est positive.

5) La matrice  $B$  est clairement symétrique. De plus pour tout  $X = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  ${}^tXBX = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} \lambda_i \lambda_j x_i x_j = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} (\lambda_i x_i) (\lambda_j x_j) = {}^tYAY$  où  $Y = {}^t(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n)$ . Donc  ${}^tXBX \geq 0$  donc

$B$  est positive.

6) La matrice  $A$  est clairement symétrique. De plus pour tout  $X = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,

$${}^tXAX = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \langle u_i, u_j \rangle x_i x_j = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \langle x_i u_i, x_j u_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i u_i, \sum_{j=1}^n x_j u_j \right\rangle = \left\| \sum_{i=1}^n x_i u_i \right\|^2 \geq 0.$$

Donc  $B$  est positive.

7)  $C = A * B$  est une matrice diagonale de coefficients diagonaux  $a_{i,i} b_{i,i}$ . Elle est donc symétrique.

Pour tout  $i \in [1, n]$ ,  $a_{i,i} = {}^t e_i A e_i \geq 0$  et de même pour  $b_{i,i}$ . Donc pour tout  $i$ ,  $c_{i,i} \geq 0$ . Les valeurs propres de  $C$  sont les  $c_{i,i}$  et la question 4) assure que  $C$  est positive.

8) a) Si  $A$  est diagonale alors  $A = \sum_{i=1}^n a_{i,i} E_{i,i}$ , la matrice  $E_{i,i}$  ayant ses coefficients tous nuls sauf celui de position  $(i, i)$  qui vaut 1 et les  $a_{i,i}$  sont  $\geq 0$ .

$$\text{Or } E_{i,i} = e_i {}^t e_i. \text{ Donc } A = \sum_{i=1}^n (\sqrt{a_{i,i}} e_i) ({}^t \sqrt{a_{i,i}} e_i).$$

Si  $A$  est positive quelconque on peut la diagonaliser au moyen d'une matrice orthogonale : il existe  $D$  diagonale et  $P$  orthogonale telles que  $A = PD {}^t P$ .

$D$  est symétrique et a ses valeurs propres sont celles de  $A$  donc sont positives ou nulles. Donc  $D$  est positive et l'on vient de voir qu'il existe des vecteurs  $Y_1, \dots, Y_n$  tels que  $D = \sum_{i=1}^n Y_i {}^t Y_i$ .

$$\text{Alors } A = {}^t P D P = \sum_{i=1}^n (P Y_i) {}^t (P Y_i), \text{ où chaque } {}^t (P Y_i) \text{ est un vecteur de } \mathbb{R}^n.$$

b) Posons  $C = A * B$ , elle est clairement symétrique. Si  $A = {}^t(y_1, \dots, y_n)(y_1, \dots, y_n)$  alors  $a_{i,j} = y_i y_j$  et  $c_{i,j} = y_i y_j b_{i,j}$ . La question 5) assure que  $C$  est positive.

Dans le cas général la question 8)a) permet de décomposer  $A$  en somme de matrices de la forme ci-dessus. La matrice  $C$  est donc somme de matrices positives. Avec la définition on voit que  $C = A * B$  est positive.

### Partie III

9) Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  une matrice positive de taille 2 et à coefficients  $a, b, c$  positifs ou nuls. Alors pour tout  $r > 0$ ,  $A^{*r} = \begin{pmatrix} a^r & b^r \\ b^r & c^r \end{pmatrix}$ .

La question 3) assure  $ac \geq b^2$ . Vu qu'il s'agit de réels positifs il vient :  $(ac)^r \geq (b^2)^r$ . Donc  $\det A^{*r} \geq 0$ . De plus  $a^r \geq 0$ ,  $c^r \geq 0$ . La question 3) assure maintenant que  $A^{*r}$  est positive.

a)  $A$  est symétrique et on voit facilement que les valeurs propres de  $A$  sont  $0, 1, 3$ . La question 4) assure que  $A$  est positive.

$$A^{*r} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2^r & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \det A^{*r} = 2^r - 2. \text{ Si } 0 < r < 1 \text{ alors } \det A^{*r} < 0 \text{ donc l'une au moins des}$$

valeurs propres de  $A^{*r}$  est strictement négative. Donc  $A^{*r}$  n'est pas positive.

On voit facilement que son polynôme caractéristique est  $Q(X) = (1 - X) [X^2 - (2^r + 1)X + 2^r - 2]$ . Les valeurs propres sont  $\lambda_1 = 1$  et les racines  $\lambda_2, \lambda_3$  du facteur de degré 2. Supposons  $r > 1$ . Alors  $\lambda_2 \lambda_3 = 2^r - 2 > 0$  donc  $\lambda_2, \lambda_3$  sont de même signe. Ce signe est  $+$  car  $\lambda_2 + \lambda_3 = 2^r + 1 > 0$ . Donc  $A^{*r}$  est positive.

$A^{*r}$  est positive si et seulement si  $r \geq 1$ .

10) Immédiat avec la question 5).

11) L'hypothèse sur  $A$  et la partie II assurent que pour tout entier  $p > 0$  et tout entier  $m > 0$ , la matrice  $A^{*p/m}$  est positive. Autrement dit, pour tout rationnel strictement positif  $r$ , la matrice  $A^{*r}$  est positive.

Soit maintenant  $r \in \mathbb{R}_+^*$ . La densité de  $\mathbb{Q}$  assure qu'il existe une suite  $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de rationnels strictements positifs qui converge vers  $r$ .

Pour tout  $X \in \mathbb{R}^n$  et tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  ${}^t X A^{*r_k} X = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}^{r_k} x_i x_j \geq 0$  car  $A^{*r_k}$  est positive.

Chaque fonction  $t \mapsto a_{i,j}^t$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  (si  $a_{i,j}$  cette fonction est nulle ; sinon  $a_{i,j}^t = \exp(t \ln a_{i,j})$ )

Par passage à la limite quand  $k$  tend vers l'infini on obtient :  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}^r x_i x_j \geq 0$ . Vu que c'est établi

pour tout  $X$  la matrice  $A^{*r}$  est positive. Donc  $A$  est infiniment divisible.

12) a) Pour tout  $a > 0$ ,  $\int_0^{+\infty} e^{-at} dt = \left[ -\frac{1}{a} e^{-at} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a}$ .

Donc  $\langle u_i, u_j \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda_i + \lambda_j)t} dt = \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j}$ . La question 6) assure maintenant que  $C$  est positive.

b) Immédiat avec le changement de variable sur l'intégrale :  $x = \alpha t$ ,  $dx = \alpha dt$ .

c) On commence par montrer que la fonction  $t \mapsto u(t)v(t)t^{r-1}$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ , par exemple au moyen de l'inégalité  $|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$  pour  $a = u(t)$  et  $b = v(t)$ .

La vérification des propriétés qui définissent un produit scalaire est de routine.

d) La matrice  $C$  est symétrique à coefficients strictements positifs. Le terme de position  $(i, j)$  de  $C^{*r}$  est  $c_{i,j}^r = \frac{1}{(\lambda_i + \lambda_j)^r}$ . Avec 12)b) et 12)c) il vient :  $c_{i,j}^r = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_i t} e^{-\lambda_j t} t^{r-1} dt = \frac{1}{\Gamma(r)} \langle u_i, u_j \rangle$ .

Donc  $c_{i,j}^r = \left\langle \frac{1}{\sqrt{\Gamma(r)}} u_i, \frac{1}{\sqrt{\Gamma(r)}} u_j \right\rangle$ .

Donc  $C^{*r}$  est positive d'après la question 6). Donc  $C$  est infiniment divisible.

13) a)  $\Gamma(\lambda_i + 1) = \lim_{m \rightarrow \infty} u_m$  avec  $u_m = \frac{m^{\lambda_i+1} m!}{(\lambda_i + 1)(\lambda_i + 2) \dots (\lambda_i + m + 1)} = \frac{m^{\lambda_i+1} m!}{\prod_{p=1}^{m+1} (\lambda_i + p)}$

De même  $\Gamma(\lambda_j + 1) = \lim_{m \rightarrow \infty} v_m$  et  $\Gamma(\lambda_i + \lambda_j + 1) = \lim_{m \rightarrow \infty} w_m$ .

Or  $\frac{w_m}{u_m v_m} = \frac{1}{m m!} \prod_{p=1}^{m+1} \frac{(\lambda_i + p)(\lambda_j + p)}{(\lambda_i + \lambda_j + p)}$ . En passant à la limite quand  $m$  tend vers l'infini il vient :

$$k_{i,j} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m m!} \prod_{p=1}^{m+1} \frac{(\lambda_i + p)(\lambda_j + p)}{(\lambda_i + \lambda_j + p)}.$$

b) En posant  $\mu_i = \lambda_i + \frac{p}{2}$  et en appliquant la question 12)d) on voit que la matrice de terme général  $\frac{1}{\mu_i + \mu_j} = \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j + p}$  est infiniment divisible.

En appliquant la question 10) avec les  $\lambda'_i = \lambda_i + p$  on voit que la matrice de terme général  $\frac{\lambda'_i \lambda'_j}{\mu_i + \mu_j} = \frac{(\lambda_i + p)(\lambda_j + p)}{\lambda_i + \lambda_j + p}$  est infiniment divisible.

En exploitant la question 8) (étendue à un produit de  $m + 1$  matrices) on voit que pour tout  $r > 0$ , tout  $m \in \mathbb{N}$  et tout  $X \in \mathbb{R}^n$  :  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j \prod_{p=1}^{m+1} \left( \frac{(\lambda_i + p)(\lambda_j + p)}{\lambda_i + \lambda_j + p} \right)^r \geq 0$ .

Donc aussi :  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j \frac{1}{(m.m!)^r} \prod_{p=1}^{m+1} \left( \frac{(\lambda_i + p)^r (\lambda_j + p)^r}{(\lambda_i + \lambda_j + p)^r} \right) \geq 0$ .

En passant à la limite quand  $m$  tend vers l'infini il vient :  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j k_{i,j}^r \geq 0$ .

Donc [la matrice  $K$  est infiniment divisible].

#### Partie IV

14) Pour tout  $r \geq 0$  on définit  $f(r) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j \left( \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j} \right)^r$ .

Alors  $f(0) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j = \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = 0$ . De plus  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  avec pour tout  $r$ ,  $f'(r) = - \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j \left( \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j} \right)^r \ln(\lambda_i + \lambda_j)$ .

De plus pour tout  $r > 0$ ,  $f(r) \geq 0$  d'après la question 12)d). Donc  $\frac{f(r) - f(0)}{r} \geq 0$  et par passage à la limite quand  $r$  tend vers 0,  $f'(0) \geq 0$ , soit  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j (-\ln(\lambda_i + \lambda_j)) \geq 0$ .

Donc [la matrice  $A$  est conditionnellement positive].

15) Soient  $X = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\sum_{i=1}^n x_i = 0$  et  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $\lambda > 0$  tel que  $B + \varepsilon I_n + \lambda J$  soit positive. Donc  ${}^t X B X + \varepsilon {}^t X X + \lambda {}^t X J X \geq 0$ .

Mais  $JX = 0$  car la somme des  $x_i$  est nulle. Il reste :  ${}^t X B X + \varepsilon {}^t X X \geq 0$ . C'est établi pour tout  $\varepsilon > 0$  donc par passage à la limite quand  $\varepsilon$  tend vers 0 :  ${}^t X B X \geq 0$ .

Donc [la matrice  $B$  est conditionnellement positive].

16) a) Raisonnement analogue à celui de la question 14).

b) La matrice  $C$  étant positive les matrices  $C^{*m}$ ,  $m \geq 1$  le sont aussi d'après la partie II. De plus  $C^{*0} = J$  est aussi positive car  ${}^t X J X = \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2$ .

La matrice  $\sum_{m=0}^N \frac{r^m}{m!} C^{*m}$  est donc positive pour tout  $N \in \mathbb{N}$ . Avec un passage à la limite quand  $N$  tend vers l'infini sur la somme  ${}^tX \left( \sum_{m=0}^N \frac{r^m}{m!} C^{*m} \right) X$  on voit que la matrice de terme général  $\exp(rc_{i,j})$  est positive.

Avec un passage à la limite quand  $\varepsilon$  tend vers 0 on voit que

la matrice de terme général  $\exp(rb_{i,j})$  est positive.

Il en résulte que la matrice de terme général  $\exp(rb_{i,j})$  est infiniment divisible.

**17) a)** Soit  $M$  la matrice de terme général  $e^{-|z_i - z_j|^2}$ . Le terme général de  $M^{*r}$  est  $e^{-r|z_i - z_j|^2}$ . Pour que  $M$  soit infiniment divisible il suffit d'après la question 16)b) que la matrice  $U$  de terme général  $-|z_i - z_j|^2$  soit conditionnellement positive.

Or  $|z_i - z_j|^2 = |z_i|^2 + |z_j|^2 - z_i \bar{z}_j - z_j \bar{z}_i$ .

Soit  $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ . Alors  $\sum_{j=1}^n x_i x_j |z_i|^2 = x_i |z_i|^2 \sum_{j=1}^n x_j = 0$ . Donc

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j |z_i|^2 = 0. \text{ De même } \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j |z_j|^2 = 0.$$

$$\text{De plus } \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j z_i \bar{z}_j = \left| \sum_{i=1}^n x_i z_i \right|^2 \text{ et de même pour la somme conjuguée. Donc } {}^tXUX = - \sum_{1 \leq i, j \leq n} u_{i,j} x_i x_j = 2 \left| \sum_{i=1}^n x_i z_i \right|^2 \geq 0. \text{ La matrice } U \text{ est conditionnellement positive ce qui termine la preuve.}$$

**b)** Soit  $t \in \mathbb{R}_+^*$ . Posons  $c_{i,j} = c_{i,j}(t) = \frac{1}{t + |z_i - z_j|^2}$  et  $b_{i,j} = - \int_0^{+\infty} t^{-1/2} \frac{|z_i - z_j|^2}{t + |z_i - z_j|^2} dt$ .

On justifie facilement l'existence de cette dernière intégrale.

Observons que  $c_{i,j} = \int_0^{+\infty} e^{-r(t + |z_i - z_j|^2)} dr$ .

$$\text{Donc pour tout } X \in \mathbb{R}^n, {}^tXCX = \int_0^{+\infty} \left[ \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j e^{-r(t + |z_i - z_j|^2)} \right] dr.$$

On vient de montrer que la matrice de terme général  $e^{-r|z_i - z_j|^2}$  est positive. Il est immédiat que la matrice de terme général  $e^{-rt}$  l'est aussi. Leur produit de Hadamard est donc une matrice positive ce qui

assure que  ${}^tXCX \geq 0$ . Donc la matrice  $C$  de coefficients  $\frac{1}{t + |z_i - z_j|^2}$  est positive.

Soit  $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ .

Alors  ${}^tXBX = \int_0^{+\infty} f(t) dt$  où :

$$f(t) = -t^{-1/2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{|z_i - z_j|^2}{t + |z_i - z_j|^2} x_i x_j = -t^{-1/2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left[ 1 - \frac{t}{t + |z_i - z_j|^2} \right] x_i x_j.$$

$$\text{Mais } \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j = 0 \text{ donc } f(t) = t^{-1/2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{t}{t + |z_i - z_j|^2} x_i x_j = t^{1/2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} c_{i,j}(t) x_i x_j.$$

Vu que  $C$  est positive,  $f(t) \geq 0$  pour tout  $t > 0$ . Donc  ${}^tXBX \geq 0$ .

On a montré que  $B$  est conditionnellement positive.

c) Calculons  $b_{i,j}$  : En posant  $\alpha = |z_i - z_j|$ ,  $-b_{i,j} = \int_0^{+\infty} t^{-1/2} \frac{\alpha^2}{t + \alpha^2} dt$ . Avec le changement de variable

$$x = t^{1/2} \text{ il vient : } -b_{i,j} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\alpha^2}{x^2 + \alpha^2} dx$$

Si  $\alpha > 0$  alors  $-b_{i,j} = 2\alpha \left[ \arctan \frac{x}{\alpha} \right]_0^{+\infty} = \pi\alpha$  et cette valeur reste valable si  $\alpha = 0$ . Donc  $b_{i,j} = -\pi\alpha = -\pi|z_i - z_j|$ .

La question 16)b) assure que la matrice  $(\exp r b_{i,j}) = (\exp(-r\pi|z_i - z_j|))$  est positive pour tout  $r > 0$ .

Donc la matrice  $(e^{-|z_i - z_j|})$  est infiniment divisible.