

### Notations

- $n$  désigne un entier naturel non nul.
- $\mathcal{M}_n$  désigne l'espace vectoriel des matrices carrées réelles de taille  $(n, n)$ , dont la matrice unité est notée  $I_n$ .
- $E_n$  désigne l'espace vectoriel des matrices réelles de taille  $(n, 1)$  (matrices colonnes). On le munit de son produit scalaire usuel et de la norme (euclidienne) associée définis par :

$$(X|Y) = {}^tXY \text{ et } \|X\| = \sqrt{{}^tXX}$$

- Pour  $A \in \mathcal{M}_n$ , on note  ${}^tA$ , la transposée de  $A$ .
- $\mathcal{S}_n$  (respectivement  $\mathcal{A}_n$ ) désigne le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n$  constitué des matrices symétriques (respectivement antisymétriques) de  $\mathcal{M}_n$ .
- $\mathcal{O}_n = \{A \in \mathcal{M}_n, A{}^tA = I_n\}$  est le groupe orthogonal d'ordre  $n$ .
- $\mathcal{SO}_n = \{A \in \mathcal{O}_n, \det(A) = 1\}$  est le groupe spécial orthogonal d'ordre  $n$ .
- Pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , on note  $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$  et  $S(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$ .  
On rappelle que  $\mathcal{SO}_2 = \{R(\theta), \theta \in \mathbb{R}\}$  et  $\mathcal{O}_2 = \mathcal{SO}_2 \cup \{S(\theta), \theta \in \mathbb{R}\}$ .

**Définition 1** Une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n$  est dite **normale** lorsqu'elle commute avec sa transposée, c'est-à-dire lorsque  $A{}^tA = {}^tAA$ .

**Définition 2**  $A \in \mathcal{M}_n$  est dite **orthogonalement semblable à**  $B \in \mathcal{M}_n$ , s'il existe  $Q \in \mathcal{O}_n$  tel que  $B = {}^tQAQ$ . (On pourra noter en abrégé :  $A$  est **ORTS** à  $B$ )

### Objectifs

- Dans un premier temps, ce problème vise à établir que, pour une matrice  $A \in \mathcal{M}_n$ , les quatre conditions suivantes sont équivalentes :

(C<sub>1</sub>) Il existe un polynôme  $P$  à coefficients réels tel que  ${}^tA = P(A)$ .

(C<sub>2</sub>) La matrice  $A$  est normale.

(C<sub>3</sub>) Pour tout  $X \in E_n$ ,  $\|{}^tAX\| = \|AX\|$ .

(C<sub>4</sub>) La matrice  $A$  est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs, dont chaque bloc diagonal est :

- soit de taille  $(1, 1)$ ,

— soit de taille  $(2, 2)$  du type  $rR(\theta)$ , où  $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ .

— Dans un second temps, on définit et caractérise l'exponentielle d'une telle matrice.

On pourra utiliser, sans démonstration, les deux résultats suivants :

**Théorème 1** *Tout endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  admet au moins une droite ou un plan stable.*

**Théorème 2** *Si  $A \in \mathcal{M}_n$  et  $B \in \mathcal{M}_n$  sont telles qu'il existe  $Q \in \mathcal{O}_n$  vérifiant  $B = {}^tQAQ$ , alors, pour tout polynôme  $P$  à coefficients réels, on a  $P(B) = {}^tQP(A)Q$ .*

## I. Question préliminaire

1. Montrer que la relation **ORTS** est une relation d'équivalence sur  $\mathcal{M}_n$ .

## II. Exemples

2. Montrer que les éléments de  $\mathcal{S}_n$  vérifient les conditions **(C<sub>1</sub>)**, **(C<sub>2</sub>)**, **(C<sub>3</sub>)** et **(C<sub>4</sub>)**, et que ceux de  $\mathcal{A}_n$  vérifient les conditions **(C<sub>1</sub>)**, **(C<sub>2</sub>)** et **(C<sub>3</sub>)**.
3. Montrer que les éléments de  $\mathcal{O}_n$  vérifient les conditions **(C<sub>2</sub>)** et **(C<sub>3</sub>)**.
4. Dans cette question seulement, on suppose  $n = 2$ .  
Montrer que les matrices  $rT$ , où  $r > 0$  et  $T \in \mathcal{O}_2$ , vérifient les conditions **(C<sub>1</sub>)** et **(C<sub>4</sub>)**.

## III. Deux premières implications

Soit  $A \in \mathcal{M}_n$ .

5. Montrer que si  $A$  vérifie la condition **(C<sub>1</sub>)**, alors  $A$  vérifie la condition **(C<sub>2</sub>)**.
6. Montrer que si  $A$  vérifie la condition **(C<sub>2</sub>)**, alors  $A$  vérifie la condition **(C<sub>3</sub>)**.

## IV. La condition **(C<sub>3</sub>)** implique la condition **(C<sub>4</sub>)**

Dans cette question seulement, on suppose  $n = 2$  et soit  $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2$  vérifiant la condition **(C<sub>3</sub>)**.

7. Montrer que  $c = b$  ou bien  $(b \neq 0 \text{ et } c = -b \text{ et } a = d)$ .  
On pourra utiliser, par exemple, les vecteurs  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  de  $E_2$ .  
En déduire que  $A$  vérifie la condition **(C<sub>4</sub>)**.

Dans toute la suite de cette partie, on se donne  $A \in \mathcal{M}_n$  vérifiant la condition  $(\mathbf{C}_3)$ .

8. Montrer que, pour tout réel  $\lambda$ , la matrice  $A - \lambda I_n$  vérifie  $(\mathbf{C}_3)$ .
9. En déduire que  $A$  et  ${}^tA$  ont les mêmes sous-espaces propres et qu'ils sont deux à deux orthogonaux.
10. En utilisant la question précédente, déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la matrice  $A$  pour qu'elle soit diagonalisable.
11. Pour  $n \geq 3$ , montrer que  $A$  est orthogonalement semblable à une matrice du type  $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$ , où  $A_1 \in \mathcal{M}_p$  et  $A_2 \in \mathcal{M}_{n-p}$  vérifient  $(\mathbf{C}_3)$ , avec  $p \in \{1, 2\}$ .  
On pourra commencer par montrer que toute matrice orthogonalement semblable à  $A$  vérifie  $(\mathbf{C}_3)$ .
12. Montrer que si  $A$  vérifie la condition  $(\mathbf{C}_3)$ , alors  $A$  vérifie la condition  $(\mathbf{C}_4)$ .

## V. La condition $(\mathbf{C}_4)$ implique la condition $(\mathbf{C}_1)$

Soit  $Z = \{z_1, \dots, z_n\}$ , une famille de  $n$  complexes deux à deux distincts.

13. Établir l'existence d'un unique polynôme  $P$  de  $\mathbb{C}_{n-1}[X]$  tel que :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad P(z_k) = \overline{z_k}$$

On suppose de plus que, pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\overline{z_k} \in Z$ .

Montrer alors que le polynôme  $P$  est réel.

Soient  $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$  et  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $P(re^{i\theta}) = re^{-i\theta}$ .

14. Montrer que  $P(rR(\theta)) = {}^t(rR(\theta))$ .  
Lorsque  $\sin \theta \neq 0$ , on pourra utiliser la division euclidienne de  $P$  par le polynôme caractéristique  $\chi$  de la matrice  $rR(\theta)$  de  $\mathcal{M}_2$ .
15. Montrer que si  $A \in \mathcal{M}_n$  vérifie la condition  $(\mathbf{C}_4)$ , alors  $A$  vérifie la condition  $(\mathbf{C}_1)$ .

## VI. Exponentielle d'une matrice normale

16. Pour tout  $(r, \theta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ , montrer que les séries  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{r^k \cos(k\theta)}{k!}$  et  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{r^k \sin(k\theta)}{k!}$  convergent et calculer leur somme.

L'espace vectoriel  $\mathcal{M}_n$  est désormais muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$  définie par :

$$\forall A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n, \quad \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i,j \leq n} |A_{i,j}|$$

17. Montrer que, pour tout  $(A, B) \in \mathcal{M}_n^2$ ,  $\|AB\|_\infty \leq n\|A\|_\infty\|B\|_\infty$ .

Pour  $A \in \mathcal{M}_n$  et  $p \in \mathbb{N}$ , on pose  $S_p(A) = \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} A^k$ .

18. Montrer que la suite  $(S_p(A))_{p \in \mathbb{N}}$  converge dans  $\mathcal{M}_n$ , vers une limite que l'on notera  $\text{Exp}(A)$ , et que :

$$\forall Q \in \mathcal{O}_n, \quad \text{Exp}({}^tQAQ) = {}^tQ \text{Exp}(A)Q$$

On pourra montrer que, pour tous  $1 \leq i, j \leq n$ , la série numérique  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(A^k)_{i,j}}{k!}$  est absolument convergente.

19. Montrer que l'ensemble  $\mathcal{E}_n$  constitué des matrices normales de  $\mathcal{M}_n$  est un fermé de  $\mathcal{M}_n$ . Qu'en déduit-on pour  $\text{Exp}(A)$ , lorsque  $A \in \mathcal{E}_n$  ?

20. Soit  $(r, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Montrer que  $\text{Exp}(rR(\theta)) = e^{r \cos \theta} R(r \sin \theta)$ .

En déduire que  $\text{Exp}(\mathcal{E}_n)$  est l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_n$  orthogonalement semblable aux matrices diagonales par blocs, dont chaque bloc diagonal est :

- soit du type  $(\mu) \in \mathcal{M}_1$ , avec  $\mu > 0$
- soit du type  $\alpha R(\beta) \in \mathcal{M}_2$ , avec  $\alpha > 0$  et  $\beta \in \mathbb{R}$ .

On note  $\mathcal{S}_n^{++}$  l'ensemble des matrices symétriques de  $\mathcal{M}_n$  à valeurs propres strictement positives, et  $\mathcal{F}_n$  l'ensemble des matrices  $B$  de  $\mathcal{M}_n$  vérifiant les deux conditions :

- les valeurs propres négatives de  $B$  sont de multiplicité paire
- il existe  $S \in \mathcal{S}_n^{++}$  et  $T \in \mathcal{SO}_n$  telles que  $B = ST = TS$ .

21. Démontrer que  $\text{Exp}(\mathcal{E}_n) = \mathcal{F}_n$ .

22. La matrice  $B = (B_{i,j}) \in \mathcal{M}_n$  définie par :

$$B_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq i+1 = j \leq n \text{ ou } (i,j) = (n,1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est-elle l'exponentielle d'une matrice de  $\mathcal{E}_n$  ?

FIN DU PROBLÈME