

Concours Commun Mines-Ponts 2020 PSI

Deuxième épreuve de mathématiques

Philippe Ducrot

09/07/2020

1. On montre successivement que la relation ORTS est réflexive, symétrique et transitive, ce qui ne pose pas de problème quand on sait de quoi il s'agit.
2. Soit $A \in \mathcal{S}_n \cup \mathcal{A}_n$. Puisque $A^T = \pm A$, les conditions (C_1) , (C_2) et (C_3) sont vérifiées.
Si $A \in \mathcal{S}_n$, le théorème spectral prouve que la condition (C_4) est vérifiée.
3. Soit $A \in \mathcal{O}_n$. A est inversible et A^T est l'inverse de A , donc $AA^T = A^T A (= I_n)$ et A est une matrice normale.
Soit $X \in E_n$. $\|AX\| = \|X\|$ car l'endomorphisme de E_n canoniquement associé à A est une isométrie. Il en est de même de l'endomorphisme de E_n canoniquement associé à $A^{-1} = A^T$, donc la condition (C_3) est vérifiée.
4. Ici, $n = 2$. Soit r un réel strictement positif et $T \in \mathcal{O}_2$. rT vérifie de façon évidente la condition (C_4) .
Montrons que rT vérifie (C_1) . D'après le théorème de Cayley-Hamilton,
 $(rT)^2 - \text{tr}(rT)rT + \det(rT)I_2 = 0$, ce qui s'écrit aussi $rT(rT - \text{tr}(rT)I_2) = -r^2 \det(T)I_2$.
Comme $r > 0$ et $\det(T) \neq 0$, on en déduit que $(rT)^{-1} = -\frac{1}{r^2 \det(T)}(rT - \text{tr}(rT)I_2)$, et, puisque T est une matrice orthogonale, $(rT)^T = -\frac{1}{\det(T)}(rT - \text{tr}(rT)I_2) = P(rT)$
avec $P = -\frac{1}{\det(T)}(X - \text{tr}(rT))$.
5. Soit $A \in \mathcal{M}_n$ vérifiant la condition (C_1) . Puisque pour tout couple (Q_1, Q_2) de polynômes, $Q_1(A)Q_2(A) = (Q_1Q_2)(A)$, alors $AP(A) = P(A)A$, et A est une matrice normale.
6. Soit maintenant $A \in \mathcal{M}_n$ vérifiant la condition (C_2) , et $X \in E_n$.
 $\|A^T X\| = (A^T X)^T A^T X = X^T A A^T X = X^T A^T A X = (AX)^T A X = \|AX\|$.
7. Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2$ vérifiant la condition (C_3) .
 $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $A^T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$.
Ainsi, $a^2 + b^2 = a^2 + c^2$, et $b = c$, ou $c = -b$.
Comme $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$ et $A^T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix}$, alors $ac + bd = ab + cd$, et, si $c = -b$ et $b \neq 0$, alors $a = d$.
Finalement, la matrice A est soit symétrique, et vérifie la condition (C_4) d'après la question 2, soit de la forme $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, où $b \neq 0$, c'est-à-dire $A = rT$ avec $r = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$ et $T \in \mathcal{O}_2$, et vérifie la condition (C_4) d'après la question 4.
8. Soit $A \in \mathcal{M}_n$ vérifiant la condition (C_3) , λ un réel et $X \in \mathcal{M}_n$.

$$\begin{aligned}
 \|(A - \lambda I_n)X\|^2 &= [(A - \lambda I_n)X]^T (A - \lambda I_n)X \\
 &= X^T A^T A X - \lambda X^T A^T X - \lambda X^T A X + \lambda^2 X^T X \\
 &= X^T A A^T X - \lambda X^T A^T X - \lambda X^T A X + \lambda^2 X^T X \text{ car } A \text{ vérifie } (C_3) \\
 &= \|(A^T - \lambda I_n)X\|^2,
 \end{aligned}$$

ce qui prouve que $A - \lambda I_n$ vérifie (C_3) .

9. D'abord A et A^T ont les mêmes valeurs propres. Si λ est une de ces valeurs propres, et X un vecteur propre de A associé à λ , alors $\|(A - \lambda I_n)X\| = 0$, et, d'après la question 8, puisque A vérifie la condition (C_3) , $\|(A^T - \lambda I_n)X\| = 0$: X est un vecteur propre de A^T associé à λ .

Comme $(A^T)^T = A$, on en déduit que $\ker(A - \lambda I_n) = \ker(A^T - \lambda I_n)$, et A et A^T ont les mêmes sous-espaces propres.

Ensuite, si λ_1 et λ_2 sont deux valeurs propres distinctes de A , et X_1 et X_2 deux vecteurs propres respectivement associés à chacune des deux valeurs propres, $X_1^T A X_2 = X_1^T (A X_2) = \lambda_2 X_1^T X_2$ et $X_1^T A X_2 = (X_1^T A) X_2 = (A^T X_1)^T X_2 = \lambda_1 X_1^T X_2$ car X_1 est aussi un vecteur propre de A^T , associé à la valeur propre λ_1 . Donc $(\lambda_1 - \lambda_2) X_1^T X_2 = 0$, et $X_1^T X_2 = 0$: X_1 et X_2 sont deux vecteurs orthogonaux, et les deux sous-espaces propres $\ker(A - \lambda_1 I_n)$ et $\ker(A - \lambda_2 I_n)$ sont orthogonaux.

10. Si A est diagonalisable, ses sous-espaces propres étant deux à deux orthogonaux, A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale : A est une matrice symétrique.

Finalement, une matrice A vérifiant (C_3) est diagonalisable si et seulement si elle est symétrique.

11. Montrons d'abord que toute matrice B ORTS à A vérifie encore (C_3) . Soit $B = Q^T A Q$, où $Q \in \mathcal{O}_n$, et $X \in E_n$.

$$\begin{aligned} \|B^T X\|^2 &= (B^T X)^T B^T X \\ &= X^T B B^T X \\ &= X^T Q^T A Q Q^T A^T Q X \\ &= Y^T A A^T Y \text{ en notant } Y = Q X \\ &= \|A^T Y\|^2 \\ &= \|A Y\|^2 \text{ car } A \text{ vérifie } (C_3) \\ &= \|B X\|^2 \end{aligned}$$

Ensuite, comme rappelé en début d'énoncé, l'endomorphisme ϕ_A de E_n canoniquement associé à A admet une droite ou un plan stable F .

S'il s'agit d'une droite $\mathbb{R}.u$, avec u normé, alors, dans une base orthonormée de E_n dont le premier vecteur est u , la matrice de ϕ_A est de la forme $B = \begin{pmatrix} a_1 & L \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, où $a_1 \in \mathbb{R}$ et $A_2 \in \mathcal{M}_{n-1}$, et A est ORTS à B . Ainsi B vérifie la condition (C_3) .

$$\text{Ainsi } \left\| B^T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\|, \text{ ce qui s'écrit encore en utilisant le calcul par bloc } \begin{pmatrix} a_1 \\ L^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et prouve que $L = 0$.

Reste à prouver que A_2 vérifie (C_3) , ce qui se fait sans problème en utilisant le calcul par blocs.

Si ϕ_A admet un plan stable, dont (u, v) est une base orthonormée, dans une base orthonormée de E_n dont les deux premiers vecteurs sont u et v , la matrice de ϕ_A est de la forme $B = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, où $A_1 \in \mathcal{M}_2$ et $A_2 \in \mathcal{M}_{n-2}$, et A est ORTS à B . Ainsi B vérifie encore la condition (C_3) .

$$\text{Ainsi, si } X \in E_2, \left\| B^T \begin{pmatrix} X \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| B \begin{pmatrix} X \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\|, \text{ ce qui s'écrit encore en utilisant le calcul par bloc}$$

$\begin{pmatrix} A_1 X \\ B_1^T X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 X \\ 0 \end{pmatrix}$ et prouve que $B_1^T X = 0$. Ceci étant vrai quel que soit $X \in E_2$, on en déduit que B_1^T , puis B_1 sont des matrices nulles.

Reste à prouver que A_1 et A_2 vérifient (C_3) , là aussi sans souci.

12. On procède ici par récurrence forte sur la taille n de la matrice : on démontre la proposition $\mathcal{P}_n$: " si $A \in \mathcal{M}_n$ vérifie (C_3) , A vérifie (C_4) ."

Le cas $n = 1$ est trivial, et le cas $n = 2$ a été démontré à la question 7.

On considère un entier $n \geq 3$, et on suppose que toute matrice de $\mathcal{M}_k$, $k < n$, vérifiant (C_3) vérifie (C_4) . On considère alors une matrice $A \in \mathcal{M}_n$ vérifiant (C_3) .

D'après la question précédente, A est ORTS à une matrice du type $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, où $A_1 \in \mathcal{M}_p$ et $A_2 \in \mathcal{M}_{n-p}$, et $p = 1$ ou 2 . Les matrices A_1 et A_2 vérifient encore la condition (C_3) , et soit par l'étude des cas en dimension 1 ou 2, soit par hypothèse de récurrence, vérifient la condition (C_4) : il existe $Q_1 \in \mathcal{O}_p$ et $Q_2 \in \mathcal{O}_{n-p}$ telles que les matrices $Q_1 A_1 Q_1^T$ et $Q_2 A_2 Q_2^T$ sont diagonales par blocs, avec des blocs diagonaux de taille 1×1 ou de la forme $rR(\theta)$, $r > 0$.

On vérifie alors que la matrice $Q A Q^T$, avec $Q = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}$ est diagonale par blocs, avec des blocs diagonaux de taille 1×1 ou de la forme $rR(\theta)$, $r > 0$, ce qui achève la récurrence.

13. C'est une conséquence du théorème d'interpolation de Lagrange.

Unicité : la différence deux polynômes de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ vérifiant chacun $P(z_k) = \overline{z_k}$ pour tout $k = 1, \dots, n$ possède n racines deux à deux distinctes. C'est donc le polynôme nul, et les deux polynômes sont égaux.

Existence : on vérifie que le polynôme $P = \sum_{k=1}^n \overline{z_k} L_k$, où $L_k = \prod_{i \neq k} \frac{X - z_i}{z_k - z_i}$, convient.

Si pour tout k le complexe $\overline{z_k}$ est dans l'ensemble Z , l'expression précédente de P prouve que P est à coefficients réels.

14. Si $\sin(\theta) = 0$, $R(\theta) = \epsilon I_2$, avec $\epsilon = \pm 1$. Comme dans ce cas $P(\epsilon r) = \epsilon r$, $P(rR(\theta)) = P(\epsilon r)I_2 = \epsilon r I_2 = (rR(\theta))^T$.

Sinon, on note χ le polynôme caractéristique de $rR(\theta)$:

$$\chi = X^2 - 2r \cos(\theta)X + r^2 = (X - re^{i\theta})(X - re^{-i\theta}).$$

Par le théorème de division euclidienne, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ et deux réels a et b tels que $P = \chi \times Q + aX + b$.

On évalue cette relation polynomiale en $X \leftarrow re^{i\theta}$:

$$P(re^{i\theta}) = re^{-i\theta} = are^{i\theta} + b, \text{ ce qui fournit } a = -1 \text{ et } b = 2r \cos(\theta).$$

Ensuite, grâce au théorème de Cayley-Hamilton,

$$P(rR(\theta)) = arR(\theta) + bI_2 = \begin{pmatrix} r \cos(\theta) & r \sin(\theta) \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix} = (rR(\theta))^T.$$

15. Soit $A \in \mathcal{M}_n$ vérifiant la condition (C_4) .

$$A \text{ est ORTS à une matrice } B \text{ de la forme } \begin{pmatrix} a_1 & 0 & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & \\ & & a_k & & \\ & & & r_1 R(\theta_1) & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 & r_l R(\theta_l) \end{pmatrix}, \text{ où } a_1, \dots, a_k$$

sont des réels, $r_1, \dots, r_l$ des réels strictement positifs, et $\theta_1, \dots, \theta_l$ des réels.

Notons $z_1, \dots, z_m$ l'ensemble des éléments de la liste $[a_1, \dots, a_k, r_1 e^{i\theta_1}, r_1 e^{-i\theta_1}, \dots, r_l e^{i\theta_l}, r_l e^{-i\theta_l}]$. Les complexes $z_1, \dots, z_m$ sont deux à deux distincts, et, d'après la question 13, il existe un polynôme P de $\mathbb{C}_{m-1}[X]$ tel que $P(z_j) = \overline{z_j}$ pour tout $j = 1 \dots m$. Ainsi $P(a_j) = a_j$ pour tout $j = 1 \dots k$ et $P(r_j e^{i\theta_j}) = r_j e^{-i\theta_j}$ pour tout $j = 1 \dots m$.

De plus, pour tout $k = 1 \dots m$, $\overline{z_k} \in \{z_1, \dots, z_m\}$. Ainsi P est à coefficients réels.

On vérifie alors, par le calcul par blocs et le résultat de la question 14, que $P(B) = B^T$, puis que $P(A) = A^T$.

16. Soient $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Notons $c_k = \frac{r^k \cos(k\theta)}{k!}$ et $s_k = \frac{r^k \sin(k\theta)}{k!}$.

Pour tout entier naturel k , $|c_k| \leq \frac{r^k}{k!}$ et $|s_k| \leq \frac{r^k}{k!}$. Par comparaison à la série exponentielle d'argument r , on en déduit que les deux séries $\sum c_k$ et $\sum s_k$ sont absolument convergentes. On note C et S leurs sommes respectives.

$$\text{Pour tout } k, c_k + i s_k = \frac{(re^{i\theta})^k}{k!}, \text{ et } C + iS = e^{re^{i\theta}} = e^{r \cos(\theta)} (\cos(r \sin(\theta)) + i \sin(r \sin(\theta))).$$

$$\text{Finalement, } C = e^{r \cos(\theta)} \cdot \cos(r \sin(\theta)) \text{ et } S = e^{r \cos(\theta)} \cdot \sin(r \sin(\theta)).$$

17. Si $AB = (C_{i,j})$, alors, pour tout couple (i, j) d'entiers compris entre 1 et n , $C_{i,j} = \sum_{k=1}^n A_{i,k} B_{k,j}$, et

$$|C_{i,j}| \leq \sum_{k=1}^n |A_{i,k}| |B_{k,j}| \leq n \|A\|_\infty \cdot \|B\|_\infty, \text{ ce qui prouve que } \|C\|_\infty \leq n \|A\|_\infty \cdot \|B\|_\infty.$$

18. La suite $(S_p(A))$ est une suite à valeurs dans un espace vectoriel de dimension fini, qui converge si et seulement si toutes les suites coordonnées dans la base canonique de $\mathcal{M}_n$ (c'est-à-dire les suites

$$\left(\sum_{k=0}^p \frac{(A^k)_{i,j}}{k!} \right) \text{ convergent.}$$

$$\text{Or, pour tout } (i, j), \text{ la suite } \left(\sum_{k=0}^p \frac{(A^k)_{i,j}}{k!} \right) \text{ est la suite des sommes partielles de la série } \sum_{k \geq 0} \frac{(A^k)_{i,j}}{k!},$$

et converge si et seulement si la série converge.

Pour tout k , $|(A^k)_{i,j}| \leq \|A^k\|_\infty \leq \|A\|_\infty^k$ d'après la question 17 (récurrence sur k ...), et par comparaison avec la série exponentielle d'argument $\|A\|_\infty$, la série $\sum_{k \geq 0} \frac{(A^k)_{i,j}}{k!}$ est absolument convergente, et la suite $\left(\sum_{k=0}^p \frac{(A^k)_{i,j}}{k!} \right)$ est convergente.

Si maintenant $Q \in \mathcal{O}_n$, et p est un entier naturel,

$$\begin{aligned} S_p(Q^T A Q) &= \sum_{k=0}^p \frac{(Q^T A Q)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^p \frac{Q^T A^k Q}{k!} \text{ car } Q^T Q = I_n \\ &= Q^T \left(\sum_{k=0}^p \frac{A^k}{k!} \right) Q \\ &= Q^T S_p(A) Q \\ &\rightarrow Q^T \text{Exp}(A) Q, \end{aligned}$$

car $M \in \mathcal{M}_n \mapsto Q^T M Q$ est une application linéaire sur un espace de dimension finie, donc est continue. On en déduit que $\text{Exp}(Q^T A Q) = Q^T A Q$.

19. On montre d'abord que l'application $\Phi : A \in \mathcal{M}_n \mapsto \|A^T A - A A^T\|$ est continue. En effet si $(A, h) \in \mathcal{M}_n^2$,

$$\begin{aligned} \|\Phi(A+h) - \Phi(A)\|_\infty &= \|A^T h - h A^T + h^T A - A h^T + h^T h - h h^T\|_\infty \\ &\leq \|A^T h\|_\infty + \|h A^T\|_\infty + \|h^T A\|_\infty + \|A h^T\|_\infty + \|h^T h\|_\infty + \|h h^T\|_\infty \\ &\leq 4\|A\|_\infty \|h\|_\infty + 2\|h\|_\infty^2 \\ &\rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Comme $\mathcal{E}_n$ est l'image réciproque par Φ du singleton $\{0\}$ de $\mathbb{R}$, c'est une partie fermée de $\mathcal{M}_n$.

Si $A \in \mathcal{E}_n$ et p est un entier naturel, alors $S_p(A) \in \mathcal{E}_n$. Puisque $\mathcal{E}_n$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n$, la limite de la suite $(S_p(A))$ est encore dans $\mathcal{E}_n$: si A est une matrice normale, $\text{Exp}(A)$ est encore une matrice normale.

20. Soit $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Pour tout entier k , $R(\theta)^k = R(k\theta)$. Donc pour tout entier naturel p ,

$$\begin{aligned} S_p(rR(\theta)) &= \sum_{k=0}^p \frac{r^k}{k!} R(k\theta) \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^p \frac{r^k \cos(k\theta)}{k!} & -\sum_{k=0}^p \frac{r^k \sin(k\theta)}{k!} \\ \sum_{k=0}^p \frac{r^k \sin(k\theta)}{k!} & \sum_{k=0}^p \frac{r^k \cos(k\theta)}{k!} \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} C & -S \\ S & C \end{pmatrix} \\ &= e^{r \cos(\theta)} R(r \sin(\theta)) \end{aligned}$$

Soit $A \in \mathcal{E}_n$. Il existe une matrice orthogonale Q telle $Q^T A Q$ est de la forme

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & \\ & & a_k & & \\ & & & r_1 R(\theta_1) & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 & r_l R(\theta_l) \end{pmatrix},$$

où $a_1, \dots, a_k$ sont des réels, $r_1, \dots, r_l$ des réels strictement positifs, et $\theta_1, \dots, \theta_l$ des réels.

D'après les règles du calcul par blocs,

$$\begin{aligned} \text{Exp}(A) &= Q \begin{pmatrix} e^{a_1} & 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ & & e^{a_k} & \\ & & & \text{Exp}(r_1 R(\theta_1)) \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & \text{Exp}(r_l R(\theta_l)) \end{pmatrix} Q^T \\ &= Q \begin{pmatrix} e^{a_1} & 0 & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & \\ & & e^{a_k} & & \\ & & & e^{r_1 \cos(\theta_1)} R(r_1 \sin(\theta_1)) & \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & e^{r_l \cos(\theta_l)} R(r_l \sin(\theta_l)) \end{pmatrix} Q^T. \end{aligned}$$

et $\text{Exp}(A)$ est ORTS à une matrice du type indiqué en question 20.

Réciproquement, une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ & & \mu_k & \\ & & & \alpha_1 R(\beta_1) \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & \alpha_l R(\beta_l) \end{pmatrix},$$

où $\mu_1, \dots, \mu_k, \alpha_1, \dots, \alpha_l$ sont des réels strictement positifs, et $\beta_1, \dots, \beta_l$ des réels, est l'exponentielle de la matrice

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ & & a_k & \\ & & & r_1 R(\theta_1) \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & r_l R(\theta_l) \end{pmatrix},$$

où $a_j = \ln(\mu_j)$, $r_j = \sqrt{\ln(\alpha_j)^2 + \beta_j^2}$ et θ_j est un réel vérifiant $\cos(\theta_j) = \frac{\ln(\alpha_j)}{r_j}$ et $\sin(\theta_j) = \frac{\beta_j}{r_j}$.

Ainsi une matrice ORTS à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ & & \mu_k & \\ & & & \alpha_1 R(\beta_1) \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & \alpha_l R(\beta_l) \end{pmatrix},$$

où $\mu_1, \dots, \mu_k, \alpha_1, \dots, \alpha_l$ sont des réels strictement positifs, et $\beta_1, \dots, \beta_l$ des réels est ORTS à une exponentielle de matrice, donc c'est une matrice de $\mathcal{E}_n$.

21. Montrons d'abord qu'une matrice de la forme

$$B = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ & & \mu_k & \\ & & & \alpha_1 R(\beta_1) \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & \alpha_l R(\beta_l) \end{pmatrix},$$

où $\mu_1, \dots, \mu_k, \alpha_1, \dots, \alpha_l$ sont des réels strictement positifs, et $\beta_1, \dots, \beta_l$ des réels, appartient à $\mathcal{F}_n$. La liste des valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité d'une telle matrice est $\mu_1, \dots, \mu_k, \alpha_1 e^{i\beta_1}, \alpha_1 e^{-i\beta_1}, \dots, \alpha_l e^{i\beta_l}, \alpha_l e^{-i\beta_l}$. Les valeurs propres négatives (qui correspondent à d'éventuels β_j de la forme $(2m+1)\pi$) y sont bien de multiplicité paire.

Enfin si l'on note $S = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \mu_k & & \\ & & & \alpha_1 & \\ & & & & \alpha_1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \alpha_l \\ & & & & & & & \alpha_l \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & R(\beta_1) & \\ 0 & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & 0 & R(\beta_l) \end{pmatrix}$,

il est facile de vérifier que $S \in \mathcal{S}_n^{++}$, $T \in \mathcal{SO}_n$, et $B = TS = ST$.

Ensuite, une matrice ORTS à une matrice de $\mathcal{F}_n$ étant dans $\mathcal{F}_n$, on en déduit que $\text{Exp}(\mathcal{E}_n) \subset \mathcal{F}_n$.

Réciproquement, si $B \in \mathcal{F}_n$, il existe $S \in \mathcal{S}_n^{++}$ et $T \in \mathcal{SO}_n$ tels que $B = TS = ST$.

Notons ϕ_S (respectivement ϕ_T) l'endomorphisme de E_n canoniquement associé à S (respectivement T). On note ensuite $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_p$ les valeurs propres de S . Puisque S est symétrique réelle, $E_n = \bigoplus_{k=1}^p \ker(S - \lambda_k I_n)$.

Ensuite, comme les matrices S et T commutent, il en est de même de ϕ_S et ϕ_T . En particulier, les sous-espaces propres $\ker(S - \lambda_k I_n)$ de ϕ_S sont stables par ϕ_T , et ϕ_T induit sur chacun de ces sous-espaces une isométrie $\phi_{T,k}$. Pour chaque entier k , il existe donc une base orthonormée de

$\ker(S - \lambda_k I_n)$ dans laquelle $\phi_{T,k}$ a une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & \\ & & a_k & & \\ & & & R(\theta_1) & \\ 0 & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & 0 & R(\theta_l) \end{pmatrix}$,

où $a_1, \dots, a_k$ sont des réels égaux à 1 ou -1 et $\theta_1, \dots, \theta_l$ des réels.

Dans une base orthonormée de E_n obtenue par concaténation de ces bases, la matrice de Φ_S est diagonale, et celle de ϕ_T est diagonale par blocs, avec comme blocs diagonaux soit des 1 ou des -1, soit des matrices $R(\theta)$.

Ainsi, il existe une matrice $Q \in \mathcal{O}_n$, une matrice D diagonale à éléments diagonaux strictement positifs, et une matrice Δ diagonale par blocs, avec comme blocs diagonaux soit des 1 ou des -1, soit des matrices $R(\theta)$ telles que $S = QDQ^T$ et $T = Q\Delta Q^T$.

On en déduit que $B = QD\Delta Q^T$, et B est ORTS à une matrice de la forme

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & \\ & & \mu_k & & \\ & & & \alpha_1 R(\beta_1) & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & & 0 & \alpha_l R(\beta_l) \end{pmatrix},$$

où $\mu_1, \dots, \mu_k$ sont des réels, $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ sont des réels strictement positifs, et $\beta_1, \dots, \beta_l$ des réels.

Reste à se débarrasser des éventuels réels μ_j négatifs : ce sont des valeurs propres négatives de B , donc par hypothèse d'ordre de multiplicité pair. Quitte à changer la matrice Q (échanges simultanés de colonnes et de lignes), on peut les supposer successifs dans $\tilde{B}$, et l'on voit apparaître des blocs de la forme $|\mu_j| R(\pi)$: $\tilde{B}$ est du type décrit en question 20, et $B \in \text{Exp}(\mathcal{E}_n)$.

22. Remarques préliminaires : une matrice de $\mathcal{SO}_n$ est un élément de $\mathcal{F}_n$, donc est l'exponentielle d'une matrice de $\mathcal{E}_n$.

Par contre, une matrice de $\mathcal{O}_n \setminus \mathcal{SO}_n$ admet -1 comme valeur propre d'ordre de multiplicité impair, et n'est pas une matrice de $\mathcal{F}_n$.

Ici, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale. C'est une matrice de $\mathcal{SO}_n$ lorsque

n est impair, et une matrice de $\mathcal{O}_n \setminus \mathcal{SO}_n$ lorsque n est pair.

Dans le premier cas, c'est donc bien l'exponentielle d'une matrice de $\mathcal{E}_n$.

Dans le second, ce n'est pas l'exponentielle d'une matrice de $\mathcal{E}_n$.