

## I. Etude d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

### I.A - Espérance et variance de $S_n$

1.  $Y_n$  compte, au cours de  $n$  expériences indépendantes (car les  $X_i$  sont indépendantes), le nombre de succès (avoir  $X_i = 1$ ), chaque expérience amenant un succès avec la même probabilité  $p$ , donc  $Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ .

On a donc  $Y_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$  et, pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $P(Y_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ .

Par suite,  $Y_n$  admet une espérance et une variance et

$$E(Y_n) = np \quad \text{et} \quad V(Y_n) = np(1-p).$$

2. • Pour tout  $\omega \in \Omega$ ,

$$\begin{aligned} S_n(\omega) &= \sum_{k=1}^n X_k(\omega) = \sum_{\substack{k=1 \\ X_k(\omega)=1}}^n 1 + \sum_{\substack{k=1 \\ X_k(\omega)=-1}}^n (-1) \\ &= Y_n(\omega) \times 1 + (n - Y_n(\omega)) \times (-1) = 2Y_n(\omega) - n, \end{aligned}$$

donc  $S_n = 2Y_n - n$ .

- Par suite, comme  $Y_n$  admet une espérance et une variance,  $S_n = 2Y_n - n$  (de la forme  $aY_n + b$ ) admet aussi une espérance et une variance et

$$E(S_n) = 2E(Y_n) - n = 2np - n = (2p - 1)n \quad (\text{par linéarité de l'espérance})$$

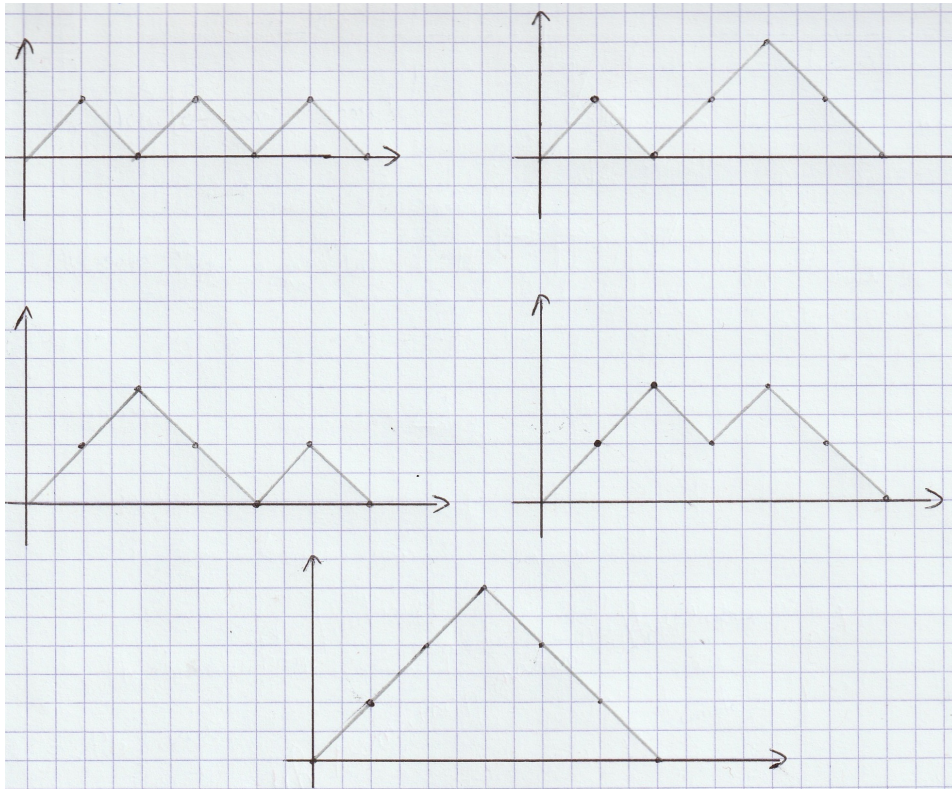
et

$$V(S_n) = 2^2 V(Y_n) = 4np(1-p).$$

- On a montré que, pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $S_n(\omega) = \underbrace{2Y_n(\omega)}_{\text{pair}} - n$ , donc  $S_n$  et  $n$  ont la même parité.

### I.B - Chemins de Dyck et loi du premier retour à l'origine

3. On a  $C_3 = 5$ . Voici une représentation des 5 chemins de Dick de longueur 6 :



4. • Par définition de  $r$ , on a  $s_\gamma(2r) = 0$ . De plus, comme  $\gamma$  est un chemin de Dick, on a  $s_\gamma(2r+1) \geq 0$ . Or  $s_\gamma(2r+1) = s_\gamma(2r) + \gamma_{2r+1}$ , donc on a  $\gamma_{2r+1} \geq 0$  et, comme  $\gamma_{2r+1} \in \{-1, 1\}$ , on a  $\gamma_{2r+1} = 1$ .  
• De même, comme  $\gamma$  est un chemin de Dick de longueur  $2n+2$ , on a  $s_\gamma(2n+2) = 0$ . De plus, comme  $\gamma$  est un chemin

de Dick, on a  $s_\gamma(2n+1) \geq 0$ .

Or  $s_\gamma(2n+1) = s_\gamma(2n+2) - \gamma_{2n+2}$ , donc on a  $\gamma_{2n+2} \leq 0$  et, comme  $\gamma_{2n+2} \in \{-1, 1\}$ , on a  $\gamma_{2n+2} = -1$ .

• Par suite, on a  $s_\gamma(2r+1) = s_\gamma(2n+1) = 1$ . De plus, pour tout  $i \in \llbracket 1, 2n-2r \rrbracket$ ,

$$s_\beta(i) = \sum_{k=1}^i \beta_k = \sum_{k=1}^i \gamma_{2r+1+k} = \sum_{k=2r+2}^{2r+1+i} \gamma_k = s_\gamma(2r+1+i) - s_\gamma(2r+1) = s_\gamma(2r+1+i) - 1.$$

Or par définition de  $r$ , on a  $s_\gamma(k) > 0$  pour tout  $k \in \llbracket 2r+1, 2n \rrbracket$  (évident pour les  $k$  pairs, et  $s_k = 0$  est impossible pour  $k$  impair (problème de parité)), donc  $s_\gamma(k) \geq 1$ , et on a encore  $s_\gamma(2n+1) = 1 \geq 1$ , donc, pour tout  $i \in \llbracket 1, 2n-2r \rrbracket$ ,

$$s_\beta(i) = s_\gamma(2r+1+i) - 1 \geq 0.$$

Enfin,  $s_\beta(2n-2r) = s_\gamma(2r+1+2n-2r) - 1 = s_\gamma(2n+1) - 1 = 0$ .

$\beta$  est donc bien un chemin de Dyck de longueur  $2n-2r$ .

• Pour tout  $i \in \llbracket 1, 2r \rrbracket$ ,

$$s_\alpha(i) = \sum_{k=1}^i \alpha_k = \sum_{k=1}^i \gamma_k = s_\gamma(i) \geq 0 \quad (\text{car } \gamma \text{ est un chemin de Dyck})$$

et, par définition de  $r$ , on a

$$s_\alpha(2r) = s_\gamma(2r) = 0,$$

donc  $\alpha$  est bien un chemin de Dyck de longueur  $2r$ .

5. Comme  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{2n})$  est un chemin de Dyck de longueur  $2n$ ,  $J = \{k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket : \gamma_k = 1\}$  est de cardinal  $n$  (ainsi que  $\llbracket 1, 2n \rrbracket \setminus J = \{k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket : \gamma_k = -1\}$ ), car

$$0 = s_\gamma(2n) = \sum_{k=1}^{2n} \gamma_k = \sum_{\substack{k=1 \\ k \in J}}^{2n} 1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \notin J}}^{2n} (-1) = \text{Card}(J) + (2n - \text{Card}(J)) \times (-1) = 2\text{Card}(J) - 2n.$$

Par suite, pour tout  $t \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} P(A_{t,\gamma}) &= P\left(\bigcap_{k=1}^m (X_{t+k} = \gamma_k)\right) \\ &= \prod_{k=1}^m P(X_{t+k} = \gamma_k) \quad (\text{car les } X_i \text{ sont indépendantes}) \\ &= \prod_{\substack{k=1 \\ k \in J}}^{2n} P(X_{t+k} = \gamma_k) \times \prod_{\substack{k=1 \\ k \notin J}}^{2n} P(X_{t+k} = \gamma_k) \\ &= \prod_{\substack{k=1 \\ k \in J}}^{2n} P(X_{t+k} = 1) \times \prod_{\substack{k=1 \\ k \notin J}}^{2n} P(X_{t+k} = -1) \quad (\text{par définition de } J) \\ &= \prod_{\substack{k=1 \\ k \in J}}^{2n} p \times \prod_{\substack{k=1 \\ k \notin J}}^{2n} (1-p) \\ &= p^{\text{Card}(J)} \times (1-p)^{2n - \text{Card}(J)} = (p(1-p))^n. \end{aligned}$$

6. • D'après la question 2,  $S_n$  et  $n$  ont la même parité, donc, pour avoir  $S_n = 0$  (pair), on doit avoir  $n$  pair. D'où,  
— s'il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $S_n(\omega) = 0$ , alors  $\{k \in \mathbb{N}^* : S_k(\omega) = 0\} \subset (2\mathbb{N}^*)$  et est non vide, donc  $T(\omega) = \min\{k \in \mathbb{N}^* : S_k(\omega) = 0\}$  est pair;  
— s'il n'existe pas  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $S_n(\omega) = 0$ , alors, par définition,  $T(\omega) = 0$  est pair.

Dans tous les cas,  $T(\omega)$  est pair, donc on a bien  $T(\Omega) \subset 2\mathbb{N}$ .

• Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $\omega \in \Omega$  tel que  $T(\omega) = 2n+2$ . Alors, par définition de  $T$ , on a

$$S_{2n+2}(\omega) = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 1, 2n+1 \rrbracket, \quad S_k(\omega) \neq 0.$$

Par suite, on a ( $\forall k \in \llbracket 1, 2n+1 \rrbracket$ ,  $S_k(\omega) > 0$ ) ou ( $\forall k \in \llbracket 1, 2n+1 \rrbracket$ ,  $S_k(\omega) < 0$ ), donc, en posant  $\gamma = (X_1(\omega), \dots, X_{2n+2}(\omega))$ , on a  $\gamma$  ou  $-\gamma$  qui est un chemin de Dick de longueur  $2n+2$ .

Comme de plus  $S_k(\omega) \neq 0$  pour tout  $k \in \llbracket 1, 2n+1 \rrbracket$ , on peut montrer comme à la question 4 que :

— si  $X_1(\omega) = 1$ , alors  $T(\omega) = 2n+2$  si et seulement si  $(X_2(\omega), \dots, X_{2n+1}(\omega))$  est un chemin de Dyck et  $X_{2n+2}(\omega) = -1$  (car  $S_k(\omega)$  ne s'annule pas pour tout  $k \in \llbracket 1, 2n+1 \rrbracket$ )  
— si  $X_1(\omega) = -1$ , alors  $T(\omega) = 2n+2$  si et seulement si  $(-X_2(\omega), \dots, -X_{2n+1}(\omega))$  est un chemin de Dyck et  $X_{2n+2}(\omega) = 1$  (car  $S_k(\omega)$  ne s'annule pas pour tout  $k \in \llbracket 1, 2n+1 \rrbracket$ )

D'où, en notant  $D_n$  l'ensemble des chemins de Dyck de longueur  $2n$  (on a  $\text{Card}(D_n) = C_n$ ), on a, d'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements  $(X_1 = 1, X_1 = -1)$ ,

$$\begin{aligned}
P(T = 2n + 2) &= P(X_1 = 1 \cap T = 2n + 2) + P(X_1 = -1 \cap T = 2n + 2) \\
&= P(X_1 = 1)P_{X_1=1}(T = 2n + 2) + P(X_1 = -1)P_{X_1=-1}(T = 2n + 2) \\
&= P(X_1 = 1)P_{X_1=1}((X_2, \dots, X_{2n+1}) \in D_n \cap X_{2n+2} = -1) + P(X_1 = -1)P_{X_1=-1}(-(X_2, \dots, X_{2n+1}) \in D_n \cap X_{2n+2} = 1) \\
&= P(X_1 = 1)P((X_2, \dots, X_{2n+1}) \in D_n \cap X_{2n+2} = -1) + P(X_1 = -1)P(-(X_2, \dots, X_{2n+1}) \in D_n \cap X_{2n+2} = 1) \\
&\quad (\text{car } X_2, \dots, X_{2n+2} \text{ sont indépendantes de } X_1) \\
&= P(X_1 = 1)P((X_2, \dots, X_{2n+1}) \in D_n)P(X_{2n+2} = -1) + P(X_1 = -1)P(-(X_2, \dots, X_{2n+1}) \in D_n)P(X_{2n+2} = 1) \\
&\quad (\text{car } X_2, \dots, X_{2n+2} \text{ sont indépendantes de } X_{2n+2}) \\
&= P(X_1 = 1)P\left(\bigcup_{\gamma \in D_n} (X_2, \dots, X_{2n+1}) = (\gamma_1, \dots, \gamma_{2n})\right)P(X_{2n+2} = -1) \\
&\quad + P(X_1 = -1)P\left(\bigcup_{\gamma \in D_n} -(X_2, \dots, X_{2n+1}) = (\gamma_1, \dots, \gamma_{2n})\right)P(X_{2n+2} = 1) \\
&= P(X_1 = 1)\left(\sum_{\gamma \in D_n} P((X_2, \dots, X_{2n+1}) = (\gamma_1, \dots, \gamma_{2n}))\right)P(X_{2n+2} = -1) \\
&\quad + P(X_1 = -1)\left(\sum_{\gamma \in D_n} P(-(X_2, \dots, X_{2n+1}) = (\gamma_1, \dots, \gamma_{2n}))\right)P(X_{2n+2} = 1) \quad (\text{incompatibles}) \\
&= P(X_1 = 1)\left(\sum_{\gamma \in D_n} P(A_{1,\gamma})\right)P(X_{2n+2} = -1) + P(X_1 = -1)\left(\sum_{\gamma \in D_n} P(A_{1,-\gamma})\right)P(X_{2n+2} = 1) \\
&= p\left(\sum_{\gamma \in D_n} (p(1-p))^n\right)(1-p) + (1-p)\left(\sum_{\gamma \in D_n} (p(1-p))^n\right)p \\
&\quad (\text{car les calculs faits à la question 5 sont facilement adaptables au cas où } -\gamma \text{ est un chemin de Dyck}) \\
&= p(1-p)C_n(p(1-p))^n + (1-p)pC_n(p(1-p))^n = 2C_n p^{n+1} (1-p)^{n+1}.
\end{aligned}$$

### I.C - Série génératrice des nombres de Catalan

7. D'après la question 4, si  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{2n+2})$  est un chemin de Dyck, alors, en posant  $r = \max\{i \in \llbracket 0, n \rrbracket : s_\gamma(2i) = 0\}$ , on a

$$(\gamma_1, \dots, \gamma_{2r}) \text{ et } (\gamma_{2r+2}, \dots, \gamma_{2n+1}) \text{ sont des chemins de Dyck et } \gamma_{2r+1} = 1 \text{ et } \gamma_{2n+2} = -1.$$

Réciproquement, si

$$(\gamma_1, \dots, \gamma_{2r}) \text{ et } (\gamma_{2r+2}, \dots, \gamma_{2n+1}) \text{ sont des chemins de Dyck et } \gamma_{2r+1} = 1 \text{ et } \gamma_{2n+2} = -1,$$

alors  $(\gamma_1, \dots, \gamma_{2n+2})$  est un chemin de Dyck.

On a donc, en notant  $D_n$  l'ensemble des chemins de Dyck de longueur  $2n$  (et en considérant que  $D_0 = \{()\}$  a pour seul élément la suite vide, ce qui est cohérent avec la convention  $C_0 = 1$ ),

$$D_{n+1} = \bigcup_{r=0}^n \{(\gamma_1, \dots, \gamma_{2n+2}) : (\gamma_1, \dots, \gamma_{2r}) \in D_r, (\gamma_{2r+2}, \dots, \gamma_{2n+1}) \in D_{n-r}, \gamma_{2r+1} = 1 \text{ et } \gamma_{2n+2} = -1\},$$

où cette réunion est disjointe, donc

$$\begin{aligned}
C_{n+1} &= \text{Card}(D_{n+1}) \\
&= \sum_{r=0}^n \text{Card}(\{(\gamma_1, \dots, \gamma_{2n+2}) : (\gamma_1, \dots, \gamma_{2r}) \in D_r, (\gamma_{2r+2}, \dots, \gamma_{2n+1}) \in D_{n-r}, \gamma_{2r+1} = 1 \text{ et } \gamma_{2n+2} = -1\}) \\
&= \sum_{r=0}^n (\text{Card}(D_r) \times \text{Card}(D_{n-r}) \times 1 \times 1) \\
&= \sum_{r=0}^n C_r C_{n-r}.
\end{aligned}$$

8. Comme  $T$  est une variable aléatoire et  $T(\Omega) \subset 2\mathbb{N}$ ,  $\sum_{n=0}^{+\infty} P(T = 2n + 2)$  converge et vaut  $P(T \in 2\mathbb{N}^*) = 1 - P(T = 0)$ .

Or, pour  $p = 1/2$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P(T = 2n + 2) = \frac{2C_n}{4^{n+1}} = \frac{1}{2} \frac{C_n}{4^n}$ , donc la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{C_n}{4^n}$  converge.

9. Posons  $f_n : t \in [-1/4, 1/4] \mapsto C_n t^n$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , pour tout  $t \in [-1/4, 1/4]$ ,

$$|f_n(t)| = C_n |t|^n \leq \frac{C_n}{4^n},$$

donc  $\|f_n\|_\infty \leq \frac{C_n}{4^n}$ , et on a même égalité car  $|f_n(1/4)| = \frac{C_n}{4^n}$ .

Or, d'après la question précédente,  $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_\infty = \sum_{n \geq 0} \frac{C_n}{4^n}$  converge, donc la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge normalement sur  $I = [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ .

10. Comme  $T(\Omega) \subset 2\mathbb{N}$ , on a  $P(T = n) = 0$  pour tout  $n$  impair, donc, pour tout  $t \in [-1, 1]$ ,

$$\begin{aligned} G_T(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(T = n)t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} P(T = 2n)t^{2n} \\ &= P(T = 0) + \sum_{n=0}^{+\infty} P(T = 2n + 2)t^{2n+2} \\ &= P(T = 0) + \sum_{n=0}^{+\infty} 2C_n p^{n+1} (1-p)^{n+1} t^{2n+2} \\ &= P(T = 0) + 2 \times (p(1-p)t^2) \sum_{n=0}^{+\infty} C_n (p(1-p)t^2)^n \\ &= P(T = 0) + 2g(p(1-p)t^2). \end{aligned}$$

11. Le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \geq 0} C_n t^n$  est au moins égal à  $1/4$  d'après la question 9.

Or, pour tout  $t \in ]0, 1[$ ,  $0 < p(1-p) \leq 1/4$  et  $p(1-p) = 1/4$  si et seulement si  $p = 1/2$  (se prouve en étudiant les variations de la fonction  $p \mapsto p(1-p)$  sur  $]0, 1[$ ), donc pour tout  $t \in [0, \sqrt{\frac{1/4}{p(1-p)}}]$ , comme  $p(1-p)t^2 \in [0, 1/4]$ ,  $\sum_{n \geq 0} C_n (p(1-p)t^2)^n$

converge, donc le rayon de convergence de  $G_T$  est au moins égal à  $\sqrt{\frac{1/4}{p(1-p)}} > 1$  pour  $p \neq 1/2$ .

Par suite, pour  $p \neq 1/2$ ,  $G_T$  est dérivable en 1, donc  $T$  admet une espérance.

12. Pour tout  $\forall t \in I$ ,

$$\begin{aligned} g(t)^2 &= 4t^2 (f(t))^2 = 4t^2 \left( \sum_{n=0}^{+\infty} C_n t^n \right)^2 \\ &= 4t^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{r=0}^n C_r C_{n-r} \right) t^n \quad (\text{produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes}) \\ &= 4t^2 \sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+1} t^n \quad (\text{d'après la question 7}) \\ &= 4t \sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+1} t^{n+1} = 4t \sum_{n=1}^{+\infty} C_n t^n \\ &= 4t \left( \sum_{n=0}^{+\infty} C_n t^n - C_0 \right) = 4t(f(t) - 1) = 4tf(t) - 4t = 2g(t) - 4t. \end{aligned}$$

13. Pour tout  $t \in I$ ,  $g(t)$  est donc une racine du trinôme  $X^2 - 2X + 4t = 0$ , qui a pour discriminant  $\Delta = 4 - 16t^2 = 4(1 - 4t) \geq 0$ . Les racines de ce trinôme sont donc

$$X_1(t) = \frac{2 + \sqrt{\Delta}}{2} = 1 + \sqrt{1 - 4t} \quad \text{et} \quad X_2(t) = 1 - \sqrt{1 - 4t},$$

ce qui assure l'existence d'une fonction  $\varepsilon : I \rightarrow \{-1, 1\}$  telle que

$$\forall t \in I, \quad g(t) = 1 + \varepsilon(t) \sqrt{1 - 4t}$$

(où  $\varepsilon(t) = \pm 1$  selon que  $g(t) = X_1(t)$  ou  $X_2(t)$ ).

14. • On a, pour tout  $t \in I \setminus \{\frac{1}{4}\}$ ,

$$\varepsilon : t \mapsto \frac{g(t) - 1}{\sqrt{1 - 4t}} = \frac{2tf(t) - 1}{\sqrt{1 - 4t}},$$

donc  $\varepsilon$  est continue sur  $I \setminus \{\frac{1}{4}\}$  comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas ( $f$  est continue sur  $I$  comme somme d'une série de fonctions continues normalement convergente sur  $I$ ).

•  $\varepsilon$  est donc constante sur  $I \setminus \{\frac{1}{4}\}$ , car, s'il existe  $t_0$  et  $t_1 \in I \setminus \{\frac{1}{4}\}$  tels que  $\varepsilon(t_0) = -1$  et  $\varepsilon(t_1) = 1$ , alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existerait  $t_2 \in [t_0, t_1] \subset I \setminus \{1/4\} = [-1/4, 1/4[$  tel que  $\varepsilon(t_2) = 0$  (car  $0 \in [-1, 1] = [\varepsilon(t_0), \varepsilon(t_1)]$ ), ce qui est exclu car  $\varepsilon : [-1/4, 1/4[ \rightarrow \{\pm 1\}$ .

Par suite,  $\varepsilon : t \in [1/4, 1/4[ \mapsto -1$  ou  $\varepsilon : t \in [1/4, 1/4[ \mapsto 1$ .

Or  $\varepsilon(0) = \frac{g(0) - 1}{\sqrt{1 - 4 \times 0}} = -1$  donc  $\varepsilon : t \in [1/4, 1/4[ \mapsto -1$  et

$$\forall t \in [-1/4, 1/4[, \quad g(t) = 1 + \varepsilon(t)\sqrt{1 - 4t} = 1 - \sqrt{1 - 4t}.$$

Enfin, pour  $t = 1/4$ ,  $g(1/4)$  est racine de  $X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$ , donc  $g(1/4) = 1 = 1 - \sqrt{1 - 4 \times 1/4}$ , donc l'égalité est encore valable pour  $t = 1/4$  et, par suite,

$$\forall t \in I, \quad g(t) = 1 - \sqrt{1 - 4t}.$$

15. • Par construction de la série génératrice, on a

$$G_T(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(T = n) = 1 \quad (\text{car } T(\Omega) \subset \mathbb{N}),$$

donc, d'après la question 10,

$$P(T = 0) = G_T(1) - 2g(p(1 - p)) = \sqrt{1 - 4p(1 - p)} \quad (\text{car } p(1 - p) \in I),$$

donc

$$P(T \neq 0) = 1 - P(T = 0) = 1 - \sqrt{1 - 4p(1 - p)}.$$

• Pour  $p = 1/2$ , on obtient  $P(T \neq 0) = 1$ , donc, pour  $p = 1/2$ , l'événement  $T \neq 0$  est presque certain, donc on est presque sûr que la particule revient à son point de départ à un instant donné.

16. Fixons  $p = 1/2$  et supposons que  $T$  admette une espérance. Alors

$$\sum_{n \in T(\Omega)} nP(T = n) = \sum_{n \geq 0} 2nP(T = 2n) = \sum_{n \geq 0} 2(n + 1)P(T = 2n + 2) = \sum_{n \geq 0} (n + 1) \frac{C_n}{4^n}$$

converge absolument.

Or, pour tout  $t \in I$ ,

$$1 - \sqrt{1 - 4t} = g(t) = 2tf(t) = 2t \sum_{n=0}^{+\infty} C_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2C_n t^{n+1}.$$

Posons, pour tout  $t \in I$ ,  $g_n(t) = 2C_n t^{n+1}$ .

— pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $g_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ .

—  $\sum_{n \geq 0} g_n$  converge simplement sur  $I$  (vers  $g$ ).

— pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $g'_n(t) = 2(n + 1)C_n t^n$ , donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, \quad |g'_n(t)| = 2(n + 1)C_n |t|^n \leq 2(n + 1) \frac{C_n}{4^n},$$

$$\text{donc } \|g'_n\|_\infty \leq 2(n + 1) \frac{C_n}{4^n}.$$

Or  $\sum_{n \geq 0} 2(n + 1) \frac{C_n}{4^n}$  converge (par hypothèse, car  $T$  admet une espérance), donc, par comparaison des séries à termes positifs,  $\sum_{n \geq 0} \|g'_n\|_\infty$  converge, donc  $\sum_{n \geq 0} g'_n$  converge normalement, donc uniformément, sur  $I$ .

D'où, d'après le théorème de dérivation sous le signe somme,  $g = \sum_{n \geq 0} g_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ , donc en particulier

dérivable en  $1/4$ , ce qui est exclu car  $g : t \mapsto 1 - \sqrt{1 - 4t}$  n'est pas dérivable en  $1$ .

D'où, par l'absurde,  $T$  n'admet pas d'espérance pour  $p = 1/2$ .

## I.D - Expression des nombres de Catalan et équivalent

17. D'après le cours, pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto (1 + x)^\alpha$  est développable en série entière sur  $] - 1, 1[$  et pour tout  $x \in ] - 1, 1[$ ,

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1)}{n!} x^n = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n)}{(n + 1)!} x^{n+1},$$

donc, en prenant  $\alpha = 1/2$ , il existe une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(1/2)(1/2-1)\dots(1/2-n)}{(n+1)!} = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}(-1)(-3)\dots(-(2n-1)) \\ &= \frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)!} \prod_{k=1}^n (2k-1) \\ &= \frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)!} \frac{\prod_{k=1}^{2n} k}{\prod_{k=1}^n (2k)} \\ &= \frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)!} \frac{(2n)!}{2^n n!} \\ &= \frac{(-1)^n}{2 \cdot 4^n (n+1)} \binom{2n}{n} \end{aligned}$$

telle que pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,

$$\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}.$$

18. On a donc, pour tout  $t \in ]-1/4, 1/4[$ , comme  $-4t \in ]-1, 1[$ ,

$$\sqrt{1-4t} = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-4t)^{n+1} = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{2}{n+1} \binom{2n}{n} t^{n+1},$$

donc

$$g(t) = 1 - \sqrt{1-4t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{n+1} \binom{2n}{n} t^{n+1}.$$

Comme on a par ailleurs, pour tout  $t \in ]-1/4, 1/4[$ ,

$$g(t) = 2t f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2C_n t^{n+1},$$

on obtient, par unicité du développement en série entière de  $g$  sur  $] -1/4, 1/4[$ ,

$$\forall n \in \mathbb{N}, C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

19. L'équivalent de Stirling donne

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{n!n!} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{2\pi(2n)}}{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} \sqrt{2\pi n}^2} \\ &= \frac{1}{n} \frac{2^{2n} 2 \sqrt{\pi n}}{2\pi n} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n^{3/2}}}. \end{aligned}$$

20. • Supposons  $p \neq 1/2$ .

Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$(2n+2)P(T=2n+2) = 4(n+1)C_n(p(1-p))^{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \underbrace{\frac{4p(1-p)}{\sqrt{n}}}_{=O(1)} (4p(1-p))^n = O((4p(1-p))^n).$$

Or  $\sum_{n \geq 0} (4p(1-p))^n$  converge absolument (série géométrique de raison  $4p(1-p) \in ]-1, 1[$ ), donc, par comparaison,

$\sum_{n \geq 0} (2n+2)P(T=2n+2)$  converge absolument, donc  $\sum_{k \in T(\Omega)} kP(T=k)$  converge absolument (car  $T(\Omega) \subset 2\mathbb{N}$ ), donc  $T$

admet une espérance.

• Supposons  $p = 1/2$ .

Alors, en reprenant le calcul précédent, on a cette fois, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$(2n+2)P(T=2n+2) = 4(n+1)C_n(p(1-p))^{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4p(1-p)}{\sqrt{n}} \underbrace{(4p(1-p))}_{=1} = \frac{1}{n^{1/2}}.$$

Or  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{1/2}}$  diverge (Riemann et  $1/2 \leq 1$ ), donc, par comparaison,  $\sum_{n \geq 0} (2n+2)P(T=2n+2)$  diverge, donc  $\sum_{k \in T(\Omega)} kP(T=k)$  ne converge pas absolument, donc  $T$  n'admet pas d'espérance.

## II. Calcul d'un déterminant à l'aide d'un système orthogonal

### II.A - Définition et propriétés d'un système orthogonal

21. La famille  $(V_0, V_1, \dots, V_n)$  est échelonnée en degré (car  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est un système orthogonal), donc c'est une famille libre. De plus, elle est composée de  $(n+1)$  éléments de  $\mathbb{R}_n[X]$ , espace vectoriel de dimension  $n+1$ , donc c'est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

De plus, elle est orthogonale (car  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est un système orthogonal), donc c'est une base orthogonale de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

22. Soit  $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ . Comme  $(V_0, \dots, V_{n-1})$  est une base de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ , il existe  $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$  tel que  $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k V_k$ , et on a alors, par linéarité à droite du produit scalaire,

$$(V_n | P) = \left( V_n \mid \sum_{k=0}^{n-1} a_k V_k \right) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \underbrace{(V_n | V_k)}_{=0 \text{ car } k \neq n} = 0.$$

On aurait grâce à cette question (et avec un peu de travail supplémentaire) pu montrer que  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est un système orthogonal si et seulement si  $V_0 = 1$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $V_n$  est un polynôme unitaire de degré  $n$  qui appartient à  $(\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$ .

L'unicité d'un tel système est alors beaucoup plus simple à obtenir, car  $V_n \in \mathbb{R}_n[X] \cap (\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$ , espace vectoriel de dimension 1, et est unitaire, donc on n'a pas le choix...

23. Soit  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un autre système orthogonal.

Montrons par récurrence forte sur  $n$  que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , " $W_n = V_n$ " ( $HR_n$ ).

**Initialisation :** Pour  $n = 0$ , par définition d'un système orthogonal,  $V_0$  et  $W_0$  sont des polynômes unitaires de degré 0, donc on a  $W_0 = 1$  et  $V_0 = 1$ . On a donc bien  $HR_0$ .

**Hérédité :** Soit  $n \in \mathbb{N}$  et supposons  $HR_k$  vérifiée pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , ie  $(V_0, \dots, V_n) = (W_0, \dots, W_n)$ .

Par définition d'un système orthogonal, on a  $V_{n+1}$  et  $W_{n+1}$  unitaires de degré  $n+1$ , donc  $V_{n+1} - X^{n+1} \in \mathbb{R}_n[X]$  et  $W_{n+1} - X^{n+1} \in \mathbb{R}_n[X]$ .

Par suite, comme  $(V_0, \dots, V_n)$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ , il existe  $(a_0, \dots, a_n)$  et  $(b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$  tels que :

$$W_{n+1} = X^{n+1} + \sum_{k=0}^n a_k V_k \quad \text{et} \quad V_{n+1} = X^{n+1} + \sum_{k=0}^n b_k V_k.$$

Comme de plus  $W_{n+1}$  est orthogonal à  $W_k$  pour tout  $k \neq n+1$ , on a en particulier  $(W_{n+1} | W_k) = 0$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Or, par linéarité à gauche du produit scalaire, et comme  $W_i = V_i$  pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on a

$$\begin{aligned} 0 &= (W_{n+1} | W_k) = \left( X^{n+1} + \sum_{i=0}^n a_i V_i \mid V_k \right) = (X^{n+1} | V_k) + \sum_{i=0}^n a_i \underbrace{(V_i | V_k)}_{=0 \text{ si } i \neq k} \\ &= (X^{n+1} | V_k) + a_k \|V_k\|^2, \end{aligned}$$

donc, comme  $\|V_k\| \neq 0$  (car  $V_k \neq 0$ ), on a  $a_k = -\frac{(X^{n+1} | V_k)}{\|V_k\|^2}$ .

De la même façon, on montre que

$$0 = (V_{n+1} | V_k) = (X^{n+1} | V_k) + b_k \|V_k\|^2,$$

donc on a  $b_k = -\frac{(X^{n+1} | V_k)}{\|V_k\|^2} = a_k$ .

Ceci étant valable pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on obtient :

$$W_{n+1} = X^{n+1} + \sum_{k=0}^n a_k V_k = X^{n+1} + \sum_{k=0}^n b_k V_k = V_{n+1}.$$

On a donc bien  $HR_{n+1}$ .

**Conclusion :** D'où, par récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $W_n = V_n$ .

### II.B - Expression de $\det G_n$ à l'aide de la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$

24. Comme  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est un système orthogonal, on a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $V_n$  est unitaire de degré  $n$ , donc il existe  $(a_{0,n}, \dots, a_{n-1,n})$  tels que

$$V_n = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_{k,n} X^k.$$

On a donc

$$Q_n = \text{Mat}_{(1, X, \dots, X^n)}(V_0, \dots, V_n) = \begin{pmatrix} 1 & a_{0,1} & a_{0,2} & \cdots & a_{0,n} \\ 0 & 1 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

qui est bien triangulaire supérieure.  
De plus, comme  $Q_n$  est triangulaire,

$$\det(Q_n) = \prod_{i=0}^n q_{i,i} = \prod_{i=0}^n 1 = 1.$$

25. Pour simplifier les notations, numérotions les lignes et les colonnes des matrices de 0 à  $n$  au lieu de 1 à  $n+1$ .  
Alors on a  $(G_n)_{i,j} = (X^i | X^j)$  et, pour tout  $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$ ,

$$\begin{aligned} (G_n Q_n)_{i,j} &= \sum_{\ell=0}^n (G_n)_{i,\ell} (Q_n)_{\ell,j} \\ \text{et } (Q_n^T G_n Q_n)_{i,j} &= \sum_{k=0}^n (Q_n^T)_{i,k} (G_n Q_n)_{k,j} \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^n (Q_n^T)_{i,k} (G_n)_{k,\ell} (Q_n)_{\ell,j} \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^n q_{k,i} (X^k | X^\ell) q_{\ell,j} \\ &= \left( \sum_{k=0}^n q_{k,i} X^k \mid \sum_{\ell=0}^n q_{\ell,j} X^\ell \right) \quad (\text{par bilinéarité du produit scalaire}) \\ &= (V_i | V_j) \quad (\text{par définition de la matrice } Q_n) \\ &= (G'_n)_{i,j}. \end{aligned}$$

Ceci étant valable pour tout  $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on a bien  $G'_n = Q_n^T G_n Q_n$ .

26. On a  $G'_n = Q_n^T G_n Q_n$ , donc, par propriété du déterminant,

$$\det(G'_n) = \det(Q_n^T) \det(G_n) \det(Q_n) = (\det(Q_n))^2 \det(G_n) = \det(G_n),$$

car  $\det(Q_n) = 1$  d'après la question 24.

De plus, comme la famille  $(V_0, \dots, V_n)$  est orthogonale, on a, pour tout  $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$  tels que  $i \neq j$ ,

$$(G_n)_{i,j} = (V_i | V_j) = 0,$$

donc  $G'_n$  est diagonale et, par suite,

$$\det G_n = \det(G'_n) = \prod_{i=0}^n (G'_n)_{i,i} = \prod_{i=0}^n (V_i | V_i) = \prod_{i=0}^n \|V_i\|^2.$$

### III. Déterminant de Hankel des nombres de Catalan

#### III.A - Produit scalaire

27. Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  et  $Q \in \mathbb{R}[X]$ .

$x \mapsto P(4x)Q(4x) \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}$  est continue sur  $]0, 1]$ .

De plus, comme  $x \mapsto P(4x)Q(4x)\sqrt{1-x}$  est continue sur  $[0, 1]$ , elle est bornée sur  $[0, 1]$ , donc sur  $]0, 1]$ , donc

$$P(4x)Q(4x) \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} P(4x)Q(4x)\sqrt{1-x} = \frac{1}{\sqrt{x}} O(1) = O\left(\frac{1}{x^{1/2}}\right).$$

Or  $x \mapsto \frac{1}{x^{1/2}}$  est intégrable sur  $]0, 1]$  (Riemann et  $1/2 < 1$ ), donc, par comparaison,  $x \mapsto P(4x)Q(4x) \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}$  est intégrable sur  $]0, 1]$ .

28. — Pour tout  $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$ ,  $(P|Q)$  est bien définie, à valeurs dans  $\mathbb{R}$  d'après la question précédente.

— Pour tout  $(P, Q, R) \in (\mathbb{R}[X])^3$ , pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} (P|\lambda Q + R) &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 P(4x)(\lambda Q + R)(4x) \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 P(4x)(\lambda Q(4x) + R(4x)) \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} dx \quad (\text{par linéarité de l'évaluation}) \\ &= \lambda \frac{2}{\pi} \int_0^1 P(4x)Q(4x) \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} dx + \frac{2}{\pi} \int_0^1 P(4x)R(4x) \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} dx \quad (\text{par linéarité de l'intégrale convergente}) \\ &= \lambda(P|Q) + (P|R), \end{aligned}$$

donc  $(\cdot | \cdot)$  est linéaire à droite.

- $(\cdot|\cdot)$  est symétrique par symétrie du produit dans  $\mathbb{R}$  ( $P(4x)Q(4x) = Q(4x)P(4x)$ ).
- $(\cdot|\cdot)$  est linéaire à droite et symétrique, donc bilinéaire.
- Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ .

Pour tout  $x \in ]0, 1[$ ,  $(P(4x))^2 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} \geq 0$ .

D'où, par positivité de l'intégrale convergente ( $1 \geq 0$ ), on a

$$(P|P) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (P(4x))^2 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} dx \geq 0.$$

De plus, si  $(P|P) = 0$ , alors, comme  $x \mapsto (P(4x))^2 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}$  est continue et positive sur  $]0, 1[$ , comme  $0 < 1$  et comme

$\int_0^1 (P(4x))^2 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} dx$  converge et vaut 0, on a

$$\forall x \in ]0, 1[, \quad \underbrace{(P(4x))^2 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}}_{\neq 0} = 0, \quad \text{donc} \quad P(4x) = 0.$$

$P$  a donc une infinité de racines (tous les éléments de  $]0, 4[$ ), donc  $P = 0$ .

$(\cdot|\cdot)$  est donc défini positif.

$(\cdot|\cdot)$  est donc bien un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$ .

### III.B - Système orthogonal

29. • Montrons par récurrence double que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , " $U_n$  est unitaire de degré  $n$ " ( $HR_n$ ).

**Initialisation :** Comme  $U_0 = 1$  et  $U_1 = X - 1$ ,  $HR_0$  et  $HR_1$  sont vérifiées.

**Hérédité :** Soit  $n \in \mathbb{N}$  et supposons  $HR_n$  et  $HR_{n+1}$  vérifiée.

Alors, comme  $U_{n+1}$  est unitaire de degré  $n+1$ , on a  $U_{n+1} = X^{n+1} + Q_{n+1}$  où  $Q_{n+1} \in \mathbb{R}_n[X]$ , donc

$$U_{n+2} = (X-2)U_{n+1} - U_n = (X-2)(X^{n+1} + Q_{n+1}) - U_n = X^{n+2} - 2X^{n+1} + \underbrace{XQ_{n+1}}_{\text{deg} \leq n+1} - 2 \underbrace{Q_{n+1}}_{\text{deg} \leq n} - \underbrace{U_n}_{\text{deg} = n}$$

est bien unitaire de degré  $n+2$ . On a bien  $HR_{n+2}$ .

**Conclusion :** D'où, par récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n$  est unitaire de degré  $n$ .

• On a  $U_0(0) = 1$ ,  $U_1(0) = -1$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_{n+2}(0) = -2U_{n+1}(0) - U_n(0)$ , donc la suite  $(U_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$  est récurrente linéaire d'ordre 2.

Son équation caractéristique est  $r^2 + 2r + 1 = 0$ , qui a pour racine double  $-1$ .

Il existe donc  $a$  et  $b \in \mathbb{R}$  tels que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n(0) = (an + b)(-1)^n$ .

Or  $U_0(0) = 1$  et  $U_1(0) = -1$ , donc on a

$$\begin{cases} b = 1 \\ -(a+b) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 0 \end{cases}.$$

On a donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n(0) = (-1)^n$ .

30. Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . Montrons par récurrence double que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , " $U_n(4 \cos^2 \theta) \sin(\theta) = \sin((2n+1)\theta)$ " ( $HR_n$ ).

**Initialisation :** Comme  $U_0 = 1$ , on a  $U_0(4 \cos^2 \theta) \sin(\theta) = \sin(\theta) = \sin((2 \times 0 + 1)\theta)$ , donc on a bien  $HR_0$ .

Comme  $U_1 = X - 1$ , on a

$$\begin{aligned} U_1(4 \cos^2 \theta) \sin(\theta) &= (4 \cos^2 \theta - 1) \sin(\theta) = ((e^{i\theta} + e^{-i\theta})^2 - 1) \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \\ &= (e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} + 1) \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{e^{3i\theta} + e^{-i\theta} + e^{i\theta} - e^{i\theta} - e^{-3i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \\ &= \frac{e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}}{2i} = \sin(3\theta) = \sin((2 \times 1 + 1)\theta), \end{aligned}$$

donc on a bien  $HR_1$ .

**Hérédité :** Soit  $n \in \mathbb{N}$  et supposons  $HR_n$  et  $HR_{n+1}$  vérifiée.

Alors, comme  $U_{n+2} = (X-2)U_{n+1} - U_n$ , on a

$$\begin{aligned} U_{n+2}(4 \cos^2 \theta) \sin(\theta) &= (4 \cos^2 \theta - 2)U_{n+1}(4 \cos^2 \theta) \sin(\theta) - U_n(4 \cos^2 \theta) \sin(\theta) \\ &= 2(2 \cos^2 \theta - 1) \sin((2(n+1)+1)\theta) - \sin((2n+1)\theta) \quad (\text{d'après } HR_n \text{ et } HR_{n+1}) \\ &= 2 \cos(2\theta) \sin((2n+3)\theta) - \sin((2n+1)\theta) \quad (\text{car } \cos^2 a = \frac{\cos(2a) + 1}{2}) \\ &= 2 \frac{1}{2} (\sin((2n+5)\theta) + \sin((2n+1)\theta)) - \sin((2n+1)\theta) \quad (\text{car } \sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\sin(a+b) + \sin(a-b))) \\ &= \sin((2n+5)\theta) = \sin((2(n+2)+1)\theta), \end{aligned}$$

donc on a bien  $HR_{n+2}$ .

**Conclusion :** D'où, par récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n(4 \cos^2 \theta) \sin(\theta) = \sin((2n+1)\theta)$ .

31. Comme, pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)),$$

on a, pour tout  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin((2m+1)\theta) \sin((2n+1)\theta) d\theta &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (\cos((2m-2n)\theta) - \cos((2m+2n+2)\theta)) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos((2m-2n)\theta) d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos((2m+2n+2)\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{\sin((2m-2n)\theta)}{2m-2n} \right]_0^{\pi/2} - \left[ \frac{\sin((2m+2n+2)\theta)}{2m+2n+2} \right]_0^{\pi/2} \right. && \text{si } m \neq n \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\pi}{2} - \left[ \frac{\sin((2m+2n+2)\theta)}{2m+2n+2} \right]_0^{\pi/2} \right. && \text{si } m = n \\ &= \frac{1}{2} \begin{cases} 0-0 & \text{si } m \neq n \\ \frac{\pi}{2}-0 & \text{si } m = n \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \frac{\pi}{4} & \text{si } m = n \end{cases}. \end{aligned}$$

32. • D'après la question 29, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n$  est unitaire de degré  $n$ .

• Pour tout  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ , on a :

$$(U_m|U_n) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 U_m(4x)U_n(4x) \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} dx.$$

Posons le changement de variable

$$x = \cos^2 \theta \quad \Leftrightarrow \quad \text{pour } \theta \in ]0, \pi/2[ \quad \cos \theta = \sqrt{x} \Leftrightarrow \theta = \arccos(\sqrt{x}).$$

La fonction  $x \mapsto \arccos(\sqrt{x})$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, 1[$ , strictement décroissante (comme composée d'une fonction strictement croissante et d'une fonction strictement décroissante), donc réalise une bijection de  $]0, 1[$  sur  $]0, \pi/2[$ .

De plus, on a  $dx = -2 \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta$ .

Enfin, l'intégrale définissant  $(U_m|U_n)$  converge, donc on peut effectuer le changement de variable directement sur l'intégrale impropre et la nouvelle intégrale sera convergente et :

$$\begin{aligned} (U_m|U_n) &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 U_m(4x)U_n(4x) \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^0 U_m(4 \cos^2 \theta)U_n(4 \cos^2 \theta) \frac{\sqrt{1-\cos^2 \theta}}{\sqrt{\cos^2 \theta}} (-2 \cos(\theta) \sin(\theta)) d\theta \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} U_m(4 \cos^2 \theta)U_n(4 \cos^2 \theta) \frac{\sin(\theta)}{\cos \theta} \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta \quad (\text{car } \theta \in ]0, \pi/2[, \text{ donc } \cos \theta > 0 \text{ et } \sin \theta > 0) \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} U_m(4 \cos^2 \theta) \sin(\theta) U_n(4 \cos^2 \theta) \sin(\theta) d\theta \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin((2m+1)\theta) \sin((2n+1)\theta) d\theta \quad (\text{d'après la question 30}) \\ &= \frac{4}{\pi} \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \frac{\pi}{4} & \text{si } m = n \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ 1 & \text{si } m = n \end{cases} \end{aligned}$$

•  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc bien un système orthogonal tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\|U_n\| = 1$  (car  $\|U_n\|^2 = (U_n|U_n) = 1$ ).

### III.C - Application

33. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\mu_n = (X^n|1) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (4x)^n \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} dx = \frac{2 \times 4^n}{\pi} \int_0^1 x^{n-1/2} (1-x)^{1/2} dx.$$

Posons  $u(x) = x^{n-1/2}$ ,  $u'(x) = (n-1/2)x^{n-3/2}$ ,  $v'(x) = (1-x)^{1/2}$ ,  $v(x) = -\frac{(1-x)^{3/2}}{3/2} = -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}$ .

$u$  et  $v$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, 1[$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} u(x)v(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{x^{n-1/2}}_{\rightarrow 0 \text{ car } n-1/2 \geq 1/2 > 0} \times \underbrace{\left(-\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}\right)}_{\rightarrow -2/3} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} u(x)v(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{x^{n-1/2}}_{\rightarrow 1} \times \underbrace{\left(-\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}\right)}_{\rightarrow 0} = 0.$$

De plus,  $\int_0^1 u(x)v'(x)dx$  converge (et vaut  $\frac{\pi}{2 \times 4^n} \mu_n$ ), donc, par intégration par parties,  $\int_0^1 u'(x)v(x)dx$  converge et

$$\begin{aligned} \mu_n &= \frac{2 \times 4^n}{\pi} \int_0^1 x^{n-1/2}(1-x)^{1/2} dx = \frac{2 \times 4^n}{\pi} \underbrace{[u(x)v(x)]_0^1}_{=0} - \frac{2 \times 4^n}{\pi} \int_0^1 -\frac{2}{3}(n-1/2)x^{n-3/2}(1-x)\sqrt{1-x} dx \quad (*) \\ &= \frac{2 \times 4^n}{\pi} \frac{2n-1}{3} \int_0^1 x^{n-3/2}\sqrt{1-x} - x^{n-1/2}\sqrt{1-x} dx \\ &= \frac{2 \times 4^n}{3\pi} (2n-1) \left( \int_0^1 x^{n-1/2}\sqrt{1-x} dx - \int_0^1 x^{n-1/2}\sqrt{1-x} dx \right) \\ &= \frac{2 \times 4^n}{3\pi} (2n-1) \left( \frac{\pi}{2 \times 4^{n-1}} \mu_{n-1} - \frac{\pi}{2 \times 4^n} \mu_n \right) \\ &= \frac{4}{3} (2n-1) \mu_{n-1} - \frac{1}{3} (2n-1) \mu_n \end{aligned}$$

donc, en multipliant par  $\frac{3}{2n-1}$ , on a  $4\mu_{n-1} - \mu_n = \frac{3}{2n-1} \mu_n$ .

Enfin, l'égalité  $\frac{2 \times 4^n}{\pi} \int_0^1 x^{n-3/2}(1-x)^{3/2} dx = \frac{3}{2n-1} \mu_n$  vient de (\*), en multipliant aussi par  $\frac{3}{2n-1}$ .

34. • Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} 4C_{n-1} - C_n &= \frac{4}{n} \binom{2(n-1)}{n-1} - \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \\ &= \frac{4}{n} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} - \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \\ &= \frac{4(2n-2)!}{n!(n-1)!} - \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \\ &= \frac{4 \times 2n(2n-1)(2n-2)!}{2n(2n-1)n!(n-1)!} - \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \\ &= \frac{2}{2n-1} \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \\ &= \left( \frac{2}{2n-1} - \frac{1}{n+1} \right) \binom{2n}{n} = \frac{3}{(2n-1)(n+1)} \binom{2n}{n} = \frac{3}{2n-1} C_n. \end{aligned}$$

•  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifient donc la même relation de récurrence d'ordre 1, et ont le même premier terme car

$$\mu_0 = (1|1) = (U_0|U_0) = \|U_0\|^2 = 1 = C_0 \quad (\text{d'après la question 32}),$$

donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mu_n = C_n$ .

*Si on n'est pas convaincu, on peut faire une récurrence immédiate.*

35. Numérotions ici aussi les lignes et les colonnes de  $H_n$  de 0 à  $n$  au lieu de 1 à  $n+1$ .  
pour tout  $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$ ,

$$\begin{aligned} (H_n)_{i,j} &= C_{i+j} = \mu_{i+j} = (X^{i+j}|1) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (4x)^{i+j} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 (4x)^i (4x)^j \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} dx = (X^i|X^j) = (G_n)_{i,j}, \end{aligned}$$

où  $G_n$  est la matrice introduite dans la partie II, donc, d'après la question 26,

$$\det(H_n) = \det(G_n) = \prod_{i=0}^n \|U_i\|^2 = \prod_{i=0}^n 1 = 1,$$

car on a vu que  $(U_n)$  est un système orthogonal de  $\mathbb{R}[X]$  pour le produit scalaire introduit ici.

Rq : Notons au passage que l'on a montré que,  $\boxed{\text{pour tout } (i, j) \in \mathbb{N}^2, (X^i|X^j) = (X^{i+j}|1) = \mu_{i+j}.}$

### III.D - Un autre déterminant de Hankel

36. Soit  $(n, k) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $k < n$ .

En développant  $D_n(X)$  par rapport à la dernière ligne, on obtient une écriture de  $D_n(X)$  sous la forme :

$$D_n(X) = \sum_{j=0}^n (-1)^{n+1+j+1} M_{n,j} X^j$$

où  $M_{n,j} \in \mathbb{R}$  est le déterminant de la matrice obtenue en enlevant la ligne  $n$  (la dernière) et la colonne  $j$  (en numérotant de 0 à  $n$ ).

On a alors, par linéarité à gauche du déterminant,

$$(D_n|X^k) = \sum_{j=0}^n (-1)^{n+j+2} M_{n,j} (X^j|X^k) = \sum_{j=0}^n (-1)^{n+j+2} M_{n,j} (X^{j+k}|1) = \sum_{j=0}^n (-1)^{n+j+2} M_{n,j} C_{k+j},$$

où l'égalité  $(X^k|X^j) = (X^{k+j}|1) = C_{k+j}$  a été prouvée dans les questions 34 et 35.

On reconnaît alors le développement par rapport à la dernière ligne du déterminant :

$$\begin{vmatrix} C_0 & C_1 & C_2 & \cdots & C_{n-1} & C_n \\ C_1 & \ddots & & \ddots & \ddots & C_{n+1} \\ C_2 & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & C_{2n-2} \\ C_{n-1} & C_n & C_{n+1} & \cdots & C_{2n-2} & C_{2n-1} \\ C_k & C_{k+1} & \cdots & C_{k+n-2} & C_{k+n-1} & C_{k+n} \end{vmatrix},$$

matrice qui a les mêmes  $n$  premières lignes que  $D_n(X)$  (et donc les mêmes mineurs lorsque l'on développe par rapport à la dernière ligne).

Or, dans cette dernière matrice,  $L_k = L_n$  (avec  $k \neq n$  et en numérotant de 0 à  $n$ ), donc

$$(D_n|X^k) = \sum_{j=0}^n (-1)^{n+j+2} M_{n,j} C_{k+j} = \begin{vmatrix} C_0 & C_1 & C_2 & \cdots & C_{n-1} & C_n \\ C_1 & \ddots & & \ddots & \ddots & C_{n+1} \\ C_2 & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & C_{2n-2} \\ C_{n-1} & C_n & C_{n+1} & \cdots & C_{2n-2} & C_{2n-1} \\ C_k & C_{k+1} & \cdots & C_{k+n-2} & C_{k+n-1} & C_{k+n} \end{vmatrix} = 0.$$

37. • En développant  $D_n(X)$  par rapport à la dernière ligne, on obtient :

$$D_n(X) = (-1)^{2n+2} M_{n,n} X^n + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n+k+2} M_{n,k} X^k,$$

où  $M_{n,n} = \det(H_{n-1}) = 1$  et  $M_{n,k} \in \mathbb{R}$ , donc  $D_n$  est bien unitaire de degré  $n$ .

Par suite, pour tout  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $m \neq n$ , on a, en supposant  $m < n$  (possible quitte à échanger les rôles de  $m$  et  $n$ ), et en écrivant  $D_m = \sum_{k=0}^m b_k X^k$ ,

$$(D_m|D_n) = \left( \sum_{k=0}^m b_k X^k | D_n \right) = \sum_{k=0}^m b_k \underbrace{(X^k | D_n)}_{=0 \text{ car } k < n} = 0.$$

La famille  $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc un système orthogonal de  $\mathbb{R}[X]$  pour le produit scalaire  $(\cdot | \cdot)$ .

D'où, d'après la question 23, comme  $(D_n)$  et  $(U_n)$  sont deux systèmes orthogonaux pour le même produit scalaire, on a  $D_n = U_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

• D'où, d'après la question 29,

$$(-1)^n = U_n(0) = D_n(0) = (-1)^{n+1} \det(H'_n) \quad \text{développement par rapport à la dernière ligne},$$

donc  $\det(H'_n) = -1$ .