

# Mathématiques 1

## Présentation du sujet

Cette année, le sujet traitait de la transformation de Laplace qui est une transformation intégrale fréquemment utilisée dans les sciences de l'ingénieur, notamment en automatique. Il proposait d'étudier quelques propriétés de cette transformation ainsi que des exemples simples. En dernière partie, une application à la résolution d'une équation différentielle ordinaire a été proposée.

Les notions abordées constituent le cœur du programme d'analyse : intégration, séries et équations différentielles. Quelques notions d'algèbre étaient aussi nécessaires notamment celles relatives aux espaces euclidiens.

## Analyse globale des résultats

Le sujet était assez long et les parties IV, VII et les dernières questions de la partie VIII ont été peu abordées par les candidats.

## Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux candidats

Nous proposons ci-dessous une liste de remarques concernant les difficultés les plus fréquemment rencontrées dans les copies.

- la notion d'intégrabilité est souvent mal connue. Beaucoup de candidats pensent que si une fonction est continue alors elle est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  ou encore que si une fonction tend vers 0 alors elle est intégrable (ou la réciproque) ;
- il est très souvent affirmé que la fonction  $t \rightarrow \exp(f(t))$  est sommable si et seulement si  $f(t) < 0$ . Cela conduit pourtant à des résultats absurdes comme des domaines de convergence dépendant de la variable d'intégration  $t$  ;
- il n'y a pas de théorème affirmant que le produit ou la composée de deux fonctions intégrables est intégrable ;
- il faut savoir calculer des primitives simples. Par exemple celle de  $f'(t) \exp(xf(t))$  devrait être facilement trouvée ;
- on ne peut pas faire d'intégration par parties sur un intervalle non borné ou sans préciser les bornes ;
- le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre n'est pas toujours connu. L'hypothèse de domination est souvent mal vérifiée (le majorant dépendant encore du paramètre). Certains affirment même que l'intégrale d'une fonction continue est toujours continue ;
- les théorèmes de comparaison des fonctions en vue d'étudier leur intégrabilité ne sont pas toujours maîtrisés : oubli des valeurs absolues, utilisation d'une majoration au lieu d'une minoration pour montrer une divergence... ;
- certains candidats utilisent abusivement l'équivalence à la fonction nulle en la confondant avec la convergence vers 0 ;

- les calculs d'équivalents sont généralement mal maîtrisés notamment leurs sommes ;
- les théorèmes d'interversion d'une limite et d'une intégrale (ou une somme infinie) devraient être mieux connus ;
- en algèbre, il faut rappeler que les résultats connus en dimension finie ne peuvent pas être appliqués directement sans justification en dimension infinie (par exemple le théorème spectral) ;
- l'étude du noyau pour prouver l'injectivité d'une application n'a de sens que si cette dernière est linéaire.

## Conclusions

La plupart des candidats ont réussi à entrer dans le sujet et à aborder de nombreuses questions. Néanmoins seuls ceux maîtrisant suffisamment les concepts de base ont réussi à bien les traiter. Il est à noter que nous encourageons fortement les étudiants à être bien plus rigoureux dans leurs raisonnements et bien plus précis dans leur rédaction. Cela leur permettrait d'éviter certaines erreurs de raisonnement et d'être moins déçus par leurs résultats.