

Composition de Mathématiques - Filière PC (XEULC)

Répartition des notes des candidats français :

Coefficients de l'épreuve (en pourcentage du total d'admission, modifiés pour tenir compte de l'absence d'oraux à la session 2020) :

- ENS Paris-Saclay : 22,0%(phys.)-12,0 %(chimie)
- ENS Lyon : 17,4% %
- ENS Paris : 25,6% %

$0 \leq N < 4$	26	2,13%
$4 \leq N < 8$	339	27,74%
$8 \leq N < 12$	572	46,81%
$12 \leq N < 16$	216	17,68%
$16 \leq N \leq 20$	69	5,65%
Total	1222	100%
Moyenne	9,86	
Ecart-type	3,28	

Commentaires généraux

Les deux premières parties portaient sur l'étude de propriétés de matrices symétriques réelles positives. Puis les deux parties suivantes étudiaient un endomorphisme d'un espace $\mathcal{E}$ de fonctions à décroissance rapide ainsi qu'un produit scalaire défini sur l'un de ses sous-espaces vectoriels. La cinquième partie utilisait les résultats précédents pour résoudre un problème d'interpolation de norme minimale.

La progression de difficulté était lente au sein des différentes parties, chacune d'entre elles étant de difficulté similaire hormis la dernière qui était plus difficile. La présence de multiples questions intermédiaires proposait un découpage très détaillé facilitant ainsi la résolution de nombreuses questions.

Rappelons que le candidat a grand intérêt à lire le sujet intégralement avant de commencer à le traiter et à faire preuve de perspicacité pendant cette lecture.

Il est regrettable qu'une partie non négligeable des candidats fassent preuve d'un manque de rigueur sur des questions élémentaires comme des calculs algébriques, matriciels ou des raisonnements par récurrence simples.

Les correcteurs ont apprécié les efforts faits par une grande partie des candidats dans leur rédaction. Il faut maintenir celui-ci en continuant non seulement à énoncer entièrement les théorèmes mais en vérifiant aussi toutes leurs hypothèses. Il faut également être clair et précis dans sa rédaction et ne pas omettre de quantificateurs aux passages cruciaux des démonstrations. Entre autres, il est important de bien mettre en évidence les points clés d'une démonstration (nom d'un théorème, hypothèse importante utilisée, etc), en les entourant par exemple. C'est plus important que d'entourer la solution elle-même (que le correcteur connaît, voire qui est donnée dans le sujet) et cela détermine pour le correcteur la compréhension ou non de la question

par le candidat. Dans le même ordre d'idée, lorsque les candidats utilisent les résultats des questions précédentes, il faut absolument les mentionner proprement.

Concernant la présentation des copies, le nombre de copies très mal écrites, est heureusement en diminution. Il faut absolument que les candidats aient en mémoire que la copie est un endroit où l'on rend un résultat propre, abouti, réfléchi et rédigé. Ce n'est pas une feuille de brouillon ! Nous avons encore tenu compte cette année de la présentation dans la notation.

Concernant la stratégie, c'est en faisant avec soin les questions un peu difficiles, celles qui demandent un peu de travail, de réflexion ou de calcul, que l'on gagne réellement des points, pas en survolant toutes les questions et en répondant à toutes celles qui sont faciles. On peut dire sans exagérer qu'environ 75% des candidats font le même lot de questions, avec plus ou moins de bonheur. Les candidats qui font vraiment la différence sont ceux qui font deux ou trois questions plus difficiles, plus longues, où il y a un raisonnement en 2 ou 3 étapes à faire. Par ailleurs, il est également stratégiquement intéressant de répondre correctement et avec soin, sans les bâcler, aux premières questions du sujet.

La qualité de la présentation et de la rédaction était notée sur 2,1 points. Passons maintenant au détail, question par question.

I – Première partie

Cette première partie, si elle était entièrement et correctement traitée, pouvait rapporter 1,5 points.

1. Aucune difficulté pour cette vérification élémentaire. Heureusement la très grande majorité des candidats a répondu correctement à cette question. Ceux qui ne l'ont pas fait ont fréquemment oublié de vérifier l'une des deux propriétés de symétrie ou de positivité.

2. Question très simple mais qui a déjà été mal traitée par un nombre trop important de candidats.

3.a. Aucune difficulté pour ce calcul élémentaire. Heureusement la très grande majorité des candidats a répondu correctement à cette question.

3.b. Première question plus complexe à laquelle une quantité importante de candidats n'a pas su répondre correctement. Un grand nombre de candidats oublient de préciser que la norme du vecteur propre est strictement positive

pour en déduire que $\lambda_k \geq 0$.

3.c. Pour résoudre cette question, il suffisait d'utiliser correctement plusieurs résultats démontrés dans les questions précédentes. Une grande quantité de candidats n'y est pas parvenue.

II – Deuxième partie

Cette deuxième partie, si elle était entièrement et correctement traitée, pouvait rapporter 2,9 points.

4.a. et **4.b.** Aucune difficulté pour ces vérifications élémentaires. Il fallait toutefois en proposer des démonstrations rigoureuses, par exemple s'appuyant sur des récurrences.

5.a. Certains candidats n'ont pas suffisamment justifié la convergence alors qu'un recours aux séries entières permettait de le faire sans effort.

5.b. Cette vérification a posé des problèmes à de nombreux candidats : certains n'ont vérifié que la symétrie, d'autres n'ont pas convenablement justifié le passage à la limite de la positivité.

5.c. Une utilisation directe de résultats précédents qui a été vue par la plupart des candidats.

6.a. La symétrie a été montrée par la plupart des candidats. Quant à la positivité, elle n'a été prouvée que par un nombre beaucoup plus réduit de candidats.

6.b. Ce calcul simple a été mal traité par trop de candidats qui ont fourni une justification trop sommaire de ce résultat qui était donné dans l'énoncé. Pour ces questions pour lesquelles la réponse est donnée, il faut faire particulièrement attention à bien justifier les étapes permettant d'y aboutir.

6.c. Le résultat se déduisait d'un résultat obtenu précédemment à condition de remplacer chacun des x_i par $x_i/\sqrt{\lambda}$, ce que trop peu de candidats ont vu.

III – Troisième partie

Cette troisième partie, si elle était entièrement traitée, pouvait rapporter 3,3 points.

7. L'établissement de la majoration permettant de justifier que le produit fg est intégrable sur $\mathbb{R}$ a posé des difficultés inattendues à certains des candidats.

8.a. La positivité n'a pas posé de problème aux candidats. Par contre, l'argument de continuité a été trop souvent absent de la justification de la nullité de f lorsque $(f|f) \geq 0$.

8.b. Cette question a été traitée correctement par très peu de candidats. Les autres ont très majoritairement échoué à obtenir la majoration nécessaire pour prouver que, pour tout x réel, $\tau_x(\gamma_\lambda)$ appartient à $\mathcal{E}$.

9.a. L'indication fournie dans l'énoncé guidait efficacement le candidat pour obtenir l'égalité demandée. Néanmoins, une grande partie des candidats n'est pas parvenue à la prouver.

9.b. Pour montrer que $C(g) \in \mathcal{E}$, il fallait obtenir la majoration nécessaire et surtout ne pas oublier qu'il fallait aussi montrer que $C(g) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Ce dernier point résultait d'une application d'un théorème de continuité pour une intégrale à paramètre.

9.c. Seule la linéarité restait à montrer dans cette question. Une grande partie des candidats l'a fait.

IV – Quatrième partie

Cette quatrième partie, si elle était entièrement traitée, pouvait rapporter 5,8 points.

10. Question assez facile qui a posé des difficultés inattendues à un très grand nombre de candidats. Certains candidats ont pensé que l'entier n était fixé.

11.a. À nouveau l'indication proposée par l'énoncé était d'une grande aide dans la résolution de la question. Néanmoins, seul un petit nombre de candidats est parvenu à mener les calculs à leur terme.

11.b. Une vérification élémentaire permettait d'obtenir les égalités souhaitées. Toutefois, un grand nombre de candidats n'a pas proposé de solution satisfaisante.

12.a. Question qui a été d'une difficulté extrême pour les candidats. Seule une poignée d'entre eux, malgré l'indication fournie dans l'énoncé, en a proposé une preuve correcte.

12.b. Question difficile pour les candidats résolue convenablement par seulement une faible minorité d'entre eux.

12.c. Bien que le calcul ait semblé difficile à la plupart des candidats, il suffisait de se laisser porter par les résultats précédents.

13.a. C'est la preuve de la définition du produit scalaire qui a fait le plus souvent défaut aux candidats qui ont essayé de résoudre cette question. Cette question a été traitée correctement par peu de candidats.

13.b. Dernière question abordée et traitée par un nombre non infime de candidats. Les candidats ayant essayé de résoudre cette question y sont généralement parvenus mais ils restent une minorité.

13.c. Seuls quelques candidats ont abordé cette question et encore moins l'ont résolu avec justesse alors que l'inégalité demandée pouvait s'obtenir à partir d'une inégalité de Cauchy-Schwarz.

V – Cinquième partie

Cette cinquième et dernière partie, si elle était entièrement et correctement traitée, pouvait rapporter 4,4 points.

14. Une poignée de candidat a réussi cette question alors qu'il suffisait de procéder par l'absurde en supposant que $\mathcal{S}^*$ a au moins deux éléments f et g , d'introduire $h_+ = (f + g)/2$ et $h_- = (f - g)/2$ puis d'établir que $\|h_+ + h_-\|_{\mathcal{H}}^2 + \|h_+ - h_-\|_{\mathcal{H}}^2 = 2(\|h_+\|_{\mathcal{H}}^2 + \|h_-\|_{\mathcal{H}}^2)$ et enfin conclure en utilisant les définitions de $\mathcal{S}_*$ et de J_* .

15. Là encore, cette question n'était pas si difficile même si elle a été boudée par la plupart des candidats. Il suffisait en effet, par exemple, d'introduire $g(t) = J(\tilde{h} + th_0)$. Après avoir justifié que $\tilde{h} + th_0 \in \mathcal{S}$, g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $g(0) = J_*$, il résultait que $g'(0) = (\tilde{h}|h_0)_{\mathcal{H}} = 0$.

16.a. L'une des deux inclusions était facile. En revanche, seule une poignée de candidats a essayé de montrer l'autre inclusion.

16.b. Seule une poignée de candidats a montré cette inclusion qui, pourtant, pouvait résulter d'un calcul très simple.

17.a. Cette question a été traitée correctement par très peu de candidats. Il suffisait de se laisser porter par les résultats de questions précédentes.

17.b. Seuls quelques candidats ont abordé cette question et encore moins l'ont résolu avec justesse. Encore une fois, il suffisait de se laisser porter par les résultats de questions précédentes.

18. Cette dernière question a été traitée et résolue par encore moins de candidats que la précédente.