Centrale 2016 - PSI 1

Dans tout ce problème, n est un entier supérieur ou égal à 2 et l'on note :

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ;
- $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
- $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n ;
- $\mathcal{X}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont dans $\{0, 1\}$;
- $\mathcal{Y}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont dans $[0, 1]$;
- $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont dans $\{0, 1\}$ et ne contenant qu'un seul coefficient non nul par ligne et par colonne ;
- tM ou M^T la transposée d'une matrice M .

Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{X}_3 \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \exp(-1) & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \in \mathcal{Y}_2 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_3$$

Ce problème aborde l'étude de matrices à coefficients dans $\{0, 1\}$ à travers plusieurs thématiques indépendantes les unes des autres. Les deux premières parties étudient quelques propriétés algébriques et topologiques des ensembles $\mathcal{X}_n$ et $\mathcal{Y}_n$ définis ci-dessus. La partie 3 étudie le cas particulier des matrices de permutation. La partie 4 étudie deux modalités de génération aléatoire de matrices à coefficients dans $\{0, 1\}$.

1 Généralités

1.A. Propriétés élémentaires

- 1.A.1** Justifier que $\mathcal{X}_n$ est un ensemble fini et déterminer son cardinal.
- 1.A.2** Démontrer que pour tout $M \in \mathcal{Y}_n$, $\det(M) \leq n!$ et qu'il n'y a pas égalité.
- 1.A.3** Démontrer que $\mathcal{Y}_n$ est une partie convexe et compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- 1.A.4** Soit $M \in \mathcal{Y}_n$ et λ une valeur propre complexe de M . Montrer que $|\lambda| \leq n$ et donner un exemple explicite où l'on a l'égalité.

1.B. Etude de $\mathcal{X}'_n = \mathcal{X}_n \cap GL_n(\mathbb{R})$

- 1.B.1** Faire la liste des éléments de $\mathcal{X}'_2$. Préciser (en justifiant) ceux qui sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$.
- 1.B.2** Démontrer que $\mathcal{X}'_2$ engendre l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Est-ce que, pour $n \geq 2$, $\mathcal{X}'_n$ engendre l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

2 Deux problèmes d'optimisation

2.A. Etude de la distance à $\mathcal{Y}_n$

Pour tout $(M, N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, on note

$$(M|N) = \text{Tr}(M^T N)$$

2.A.1 Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Expliciter $(M|N)$ en fonction des coefficients de M et N .

On notera $\|M\|$ la norme euclidienne associée.

2.A.2 On fixe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, prouver qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{Y}_n$ telle que :

$$\forall N \in \mathcal{Y}_n, \|A - M\| \leq \|A - N\|$$

2.A.3 Justifier l'unicité de la matrice M ci-dessus et expliciter ses coefficients en fonction de ceux de A .

2.B. Maximisation du déterminant sur $\mathcal{X}_n$ et $\mathcal{Y}_n$

2.B.1 Justifier que le déterminant possède un maximum sur $\mathcal{X}_n$ (noté x_n) et un maximum sur $\mathcal{Y}_n$ (noté y_n).

2.B.2 Démontrer que la suite $(y_k)_{k \geq 2}$ est croissante.

2.B.3 Soit $J \in \mathcal{X}_n$ la matrice dont tous les coefficients valent 1. On pose $M = J - I_n$. Calculer $\det(M)$ et en déduire que $\lim_{k \rightarrow +\infty} y_k = +\infty$.

2.B.4 Soit $N = (n_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{Y}_n$. Fixons $1 \leq i, j \leq n$ et supposons que $n_{i,j} \in]0, 1[$. Démontrer qu'en remplaçant $n_{i,j}$ soit par 0 soit par 1, on peut obtenir une matrice N' de $\mathcal{Y}_n$ telle que $\det(N) \leq \det(N')$. En déduire que $x_n = y_n$.

3 Matrices de permutations

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et on note $(e_1, \dots, e_n)$ sa base canonique.

On note S_n l'ensemble des bijections de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ dans lui-même (appelées *permutations*).

Pour tout $\sigma \in S_n$, on note P_σ la matrice de $\mathcal{P}_n$ dont le coefficient ligne i , colonne j vaut 1 si $i = \sigma(j)$ et 0 sinon. On dit que P_σ est la *matrice de permutation* associée à σ .

On note u_σ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à P_σ .

3.A. Description de $\mathcal{P}_n$

3.A.1 Donner deux définitions d'une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^n$ et démontrer leur équivalence.

3.A.2 Démontrer que si $M \in O_n(\mathbb{R})$, alors son déterminant vaut 1 ou -1 . Que penser de la réciproque ?

3.A.3 Démontrer que $\mathcal{P}_n = \mathcal{X}_n \cap O_n(\mathbb{R})$ et déterminer son cardinal.

3.B. Quelques propriétés des éléments de $\mathcal{P}_n$

3.B.1 Soient $\sigma, \sigma' \in S_n$. Démontrer que $P_\sigma P_{\sigma'} = P_{\sigma \circ \sigma'}$.

Justifier que l'application $k \in \mathbb{Z} \mapsto \sigma^k \in S_n$ n'est pas injective. En déduire qu'il existe un entier $N \geq 1$ tel que $\sigma^N = \text{Id}_{\{1, \dots, n\}}$ (application identité de $\{1, \dots, n\}$).

3.B.2 Démontrer que tous les éléments de $\mathcal{P}_n$ sont diagonalisables sur $\mathbb{C}$.

3.B.3 Déterminer les vecteurs propres communs à tous les éléments de $\mathcal{P}_n$ dans les cas $n = 2$ et $n = 3$.

3.B.4 On se propose de démontrer que les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ stables par tous les u_σ , $\sigma \in S_n$, sont $\{0\}$, $\mathbb{R}^n$, la droite D engendrée par $e_1 + \dots + e_n$ et l'hyperplan H orthogonal à D .

(a) Vérifier que ces quatre sous-espaces vectoriels sont stables par tous les u_σ .

(b) Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, non contenu dans D et stable par tous les u_σ . Démontrer qu'il existe un couple $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ avec $i \neq j$ tel que $e_i - e_j \in V$, puis que les $n - 1$ vecteurs $e_k - e_j$ ($k \in \{1, \dots, n\}$, $k \neq j$) appartiennent à V .

(c) Conclure.

3.C. Une caractérisation des éléments de $\mathcal{P}_n$

On se donne une matrice M de $GL_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont des entiers naturels et telle que l'ensemble formé par tous les coefficients de toutes les puissances successives de M est fini.

Démontrer que M^{-1} est à coefficients dans $\mathbb{N}$ et en déduire que M est une matrice de permutation. Que dire de la réciproque ?

4 Matrices aléatoires de $\mathcal{X}_n$

4.A. Génération par une colonne aléatoire

Soit $p \in]0, 1[$. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p .

4.A.1 Calculer la probabilité que $X_1, \dots, X_n$ soient égales.

4.A.2 Quelle est la loi de $S = X_1 + \dots + X_n$? On attend une démonstration du résultat annoncé.

4.A.3 Soient $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Donner la loi de la variable aléatoire $X_{i,j} = X_i \times X_j$.

4.A.4 i $\omega \in \Omega$, on introduit la matrice colonne

$$U(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ \vdots \\ X_n(\omega) \end{pmatrix}$$

et la matrice $M(\omega) = U(\omega)U(\omega)^T$. L'application $M : \omega \in \Omega \mapsto M(\omega)$ est ainsi une variable aléatoire.

(a) Si $\omega \in \Omega$, justifier que $M(\omega) \in \mathcal{X}_n$.

(b) Si $\omega \in \Omega$, justifier que $\text{Tr}(M(\omega)) \in \{0, \dots, n\}$, que $M(\omega)$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et que $\text{rg}(M(\omega)) \leq 1$.

(c) Si $\omega \in \Omega$, justifier que $M(\omega)$ est une matrice de projection orthogonale si et seulement si $S(\omega) \in \{0, 1\}$.

4.A.5 Donner la loi, l'espérance et la variance des variables aléatoires $\text{Tr}(M)$ et $\text{rg}(M)$.

4.A.6 Exprimer M^k en fonction de S et M . Quelle est la probabilité pour que la suite de matrices $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$ soit convergente ? Montrer que, dans ce cas, la limite est une matrice de projection.

4.A.7 Quelle est la probabilité que M admette deux valeurs propres distinctes ?

4.B. Génération par remplissage aléatoire

Soit $p \in]0, 1[$. On part de la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notée M_0 . Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on construit la matrice M_{k+1} à partir de M_k de la manière suivante

- on parcourt en une vague la matrice et chaque coefficient nul est changé en 1 avec la probabilité p ;
- chaque action sur un coefficient est indépendante de ce qui se passe sur les autres et des vagues précédentes.

Les M_k sont donc des variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{X}_n$ et l'on considère qu'elles sont définies sur un espace probabilisé commun $(\Omega, \mathcal{A}, PP)$. Voici un exemple de réalisation de cette évolution pour $n = 2$

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \rightarrow M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour $k \geq 1$, le nombre de modifications réalisées lors de la k -ième vague est noté N_k . Dans l'exemple ci-dessus : $N_1 = 2$, $N_2 = 0$, $N_3 = 1$, $N_4 = 1$, $N_5 = 0$.

On s'intéresse au plus petit indice k pour lequel la matrice M_k ne comporte que des 1 ; on dit alors qu'elle est *totalelement remplie*. Dans l'exemple précédent, ce premier indice vaut 4.

On note $q = 1 - p$ et $m = n^2$.

4.B.1 Dans toute cette question on utilise le langage Python. `M` désigne une matrice carrée d'ordre n . Ses lignes et colonnes sont numérotées de 0 à $n - 1$. L'expression `M[i, j]` permet d'accéder à l'élément situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j et `len(M)` donne l'ordre de la matrice `M`.

- (a) Ecrire une fonction `Somme(M)` qui renvoie la somme des coefficients de la matrice `M`.
- (b) Ecrire une fonction `Bernoulli(p)` qui renvoie 1 avec la probabilité p et 0 avec la probabilité $1 - p$. On pourra utiliser l'expression `random()` qui renvoie un réel de l'intervalle $[0, 1[$ selon la loi uniforme.
- (c) A l'aide de la fonction précédente, écrire une fonction `Modifie(M, p)` qui modifie aléatoirement la matrice `M` selon le principe décrit plus haut.
- (d) Ecrire une fonction `Simulation(n, p)` qui renvoie le plus petit entier k tel que M_k est totalement remplie à partir d'un remplissage aléatoire de la matrice nulle d'ordre n (qui peut être obtenue par `zeros((n, n))`). Il n'est pas demandé de mémoriser les M_k .

4.B.2 Donner la loi de N_1 , puis la loi conditionnelle de N_2 sachant $(N_1 = i)$ pour i dans un ensemble à préciser. N_1 et N_2 sont-elles indépendantes ?

4.B.3 Soient $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Le plus petit entier $k \geq 1$ tel que le coefficient ligne i , colonne j de M_k vaut 1 est noté $T_{i,j}$ (dans l'exemple ci-dessus, $T_{1,1} = 1$ et $T_{1,2} = 3$). Donner la loi de $T_{i,j}$.

4.B.4 Pour un entier $k \geq 1$, donner la valeur de $\mathbb{P}(T_{i,j} \geq k)$.

4.B.5 Soient $r \geq 1$ un entier et $S_r = N_1 + \dots + N_r$. Que représente S_r ? Donner sa loi (on pourra utiliser la question précédente).

4.B.6 On note N le plus petit indice k pour lequel la matrice M_k est totalement remplie.

- (a) Proposer une démarche pour approcher l'espérance de N à l'aide d'une simulation informatique utilisant les fonctions précédentes.
- (b) Donner une expression de la valeur exacte de cette espérance faisant intervenir q et m .