I Généralités

IA - ***Propriétés élémentaires***

I.A.1) L'application φ de $\mathcal{X}_n$ dans $\{0,1\}^{n^2}$ qui envoie $A=(a_{i,j})_{i,j}\in\mathcal{X}_n$ sur $\varphi(A)=(a_{1,1},\dots,a_{1,n},a_{2,1},\dots,a_{n,n})$ est une bijection et donc comme $\{0,1\}^{n^2}$ est un ensemble fini de cardinal 2^{n^2}, $\mathcal{X}_n$ est une ensemble fini de cardinal 2^{n^2}.

I.A.2) Si $M=(m_{i,j})_{i,j}\in\mathcal{X}_n$ alors on a

$$|\det(M)| = |\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)m_{\sigma(1),1}\dots m_{\sigma(n),n}| \leqslant \sum_{\sigma\in S_n}|\varepsilon(\sigma)m_{\sigma(1),1}\dots m_{\sigma(n),n}|$$

Or, $|\varepsilon(\sigma)m_{\sigma(1),1}\dots m_{\sigma(n),n}| = |m_{\sigma(1),1}\dots m_{\sigma(n),n}|\leqslant 1$ donc $|\det(M)|\leqslant\sum_{\sigma\in S_n}1=n!$.
S'il y a égalité alors nécessairement $m_{\sigma(1),1}\dots m_{\sigma(n),n}=1$ pour tout $\sigma\in S_n$ ce qui implique que $m_{i,j}=1$ pour tout indice $i,j\in\{1,\dots,n\}$ mais dans ce cas M est la matrice constituée uniquement de 1, et son déterminant est donc $0\neq n!$, il n'y a donc pas égalité.

I.A.3) Soient A et B deux éléments de $\mathcal{Y}_n$. Pour tout $t\in[0,1]$, pour tout indice $i,j\in\{1,\dots,n\}$,

$$0\leqslant[(1-t)A+tB]_{i,j}=(1-t)A_{i,j}+tB_{i,j}\leqslant(1-t)+t=1$$

car $0\leqslant A_{i,j},B_{i,j}\leqslant 1$ et donc $(1-t)A+tB\in\mathcal{Y}_n$, ce qui prouve que $\mathcal{Y}_n$ est une partie convexe.
On sait que $\|M\|_\infty=\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}|M_{i,j}|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et par définition $\mathcal{Y}_n$ est inclus dans la boule de centre la matrice nulle et de rayon 1 donc $\mathcal{Y}_n$ est une partie bornée.
Si (M_k) est une suite d'éléments de $\mathcal{Y}_n$ qui converge vers M alors

- pour tout indice $i,j\in\{1,\dots,n\}$, $(M_k)_{i,j}\in[0,1]$ et $(M_k)_{i,j}$ tend vers $M_{i,j}$ donc $M_{i,j}\in[0,1]$
- on en déduit que $M\in\mathcal{Y}_n$ et le caractérisation séquentielle des fermés prouve alors que $\mathcal{Y}_n$ est une partie fermée.

Par conséquent $\mathcal{Y}_n$ est une partie convexe, fermée et bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

I.A.4) Soit $M\in\mathcal{Y}_n$ et λ une valeur propre complexe de M. Il existe $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ un vecteur propre de M pour λ. Notons i_0 un indice tel que $|x_{i_0}|=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$, comme $X\neq 0$ (c'est un vecteur propre !) on sait que $x_{i_0}\neq 0$ et

- $MX=\lambda X$ par définition de X.
- En identifiant le coefficient de la ligne i_0, on obtient $\sum_{j=1}^n m_{i_0,j}x_j=\lambda x_{i_0}$ donc $|\lambda x_{i_0}|\leqslant\sum_{j=1}^n|m_{i_0,j}x_j|\leqslant\sum_{j=1}^n|1\times x_{i_0}|=n|x_{i_0}|$ et ainsi $|\lambda|\leqslant n$.

En notant M la matrice qui ne contient que des 1, on peut observer que n est une valeur propre associée au vecteur propre $\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$.

IB - ***Étude de*** $\mathcal{X}_n'=\mathcal{X}_n\cap GL_n(\mathbb{R})$

I.A.1) On a directement

$$\mathcal{X}_2=\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\right.$$
$$\left.\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right\}$$

donc

$$\mathcal{X}_2'=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$$

et l'on obtient facilement,

Matrice	Diagonalisabilité	Matrice	Diagonalisabilité
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	diagonalisable car symétrique réelle	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	diagonale !
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	diagonalisable car symétrique réelle	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	non diagonalisable car 1 vp de multiplicité 2 dans le polynôme caractéristique et E_1 de dim 1
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	diagonalisable car symétrique réelle	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	non diagonalisable car 1 vp de multiplicité 2 dans le polynôme caractéristique et E_1 de dim 1

I.A.2) Si on appelle E_2' le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{X}_2'$ alors

- $E_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in E_2'$ et $E_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in E_2'$
- $E_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + E_{2,1} + E_{1,2} \in E_2'$ et $E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + E_{2,1} + E_{1,2} \in E_2'$

donc E_2' contient les vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc $E_2' = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et ainsi $\mathcal{X}_2'$ engendre $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Dans le cas général, pour $n \geqslant 3$, notons $E_n' = \mathrm{Vect}(\mathcal{X}_n')$

- Pour $i \neq j$, $I_n \in \mathcal{X}_n', I_n + E_{i,j} \in \mathcal{X}_n'$ donc $E_{i,j} = I_n + E_{i,j} - I_n \in E_n'$
- La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & (1) & \\ \vdots & (1) & \ddots & \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{X}_n$ et son déterminant est

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & (1) & \\ \vdots & (1) & \ddots & \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & (0) & \\ \vdots & (0) & \ddots & \\ 1 & & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}$$

donc $M \in E_n'$ et donc $E_{1,1} = M - E_{1,2} - \ldots - E_{1n} - E_{2,1} - \ldots - E_{n,1} \in E_n'$

- de même $E_{2,2}, \ldots, E_{n,n} \in E_n'$ et finalement tous les vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont dans E_n' donc $E_n' = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{X}_n'$ engendre $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

II Deux problème d'optimisation

IIA - ***Etude de la distance à $\mathcal{Y}_n$***

II.A.1) L'application ϕ définie par $(M, N) \longmapsto \mathrm{tr}({}^tMN)$ est une application bilinéaire (par linéarité de la trace et de la transposition) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$,

$$(M|N) = \mathrm{tr}({}^tMN) = \mathrm{tr}({}^t({}^tMN)) = \mathrm{tr}({}^tNM) = (N|M)$$

ce qui que ϕ est symétrique. Si $M = (m_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors

$$(M|N) = \sum_{i=1}^{n} ({}^tMM)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{j,i}^2 \geqslant 0$$

et il y a égalité si et seulement si $m_{j,i} = 0$ pour tous les indices $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. par conséquent, ϕ est une forme bilinéaire symétrique définie positive donc est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

II.A.2) On fixe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{Y}_n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & N & \longmapsto & \|A-N\| \end{array}$$

vérifie d'après la double inégalité triangulaire, pour tout $N, N' \in \mathcal{Y}_n$,

$$|\varphi(N)-\varphi(N')| = |\|A-N\| - \|A-N'\|| \leqslant \|A-N-(A-N')\| = \|N-N'\|$$

ainsi φ est 1-lipschitzienne donc continue sur le fermé borné $\mathcal{Y}_n$, on sait alors que φ atteint son minimum et si on note $M \in \mathcal{Y}_n$ tel que $\varphi(M) = \min(\varphi)$ alors

$$\forall N \in \mathcal{Y}_n, \|A-M\| \leqslant \|A-N\|$$

II.A.3) Supposons par l'absurde que les matrices M et M' conviennent avec $M \neq M'$.

- Comme $M' \in \mathcal{Y}_n$, $\|A-M\| \leqslant \|A-M'\|$ et comme $M \in \mathcal{Y}_n$, $\|A-M'\| \leqslant \|A-M\|$ donc $\|A-M'\| = \|A-M\|$
- Par convexité de $\mathcal{Y}_n$, la matrice $\frac{M+M'}{2} \in \mathcal{Y}_n$ et d'après l'égalité de la médiane

$$\begin{aligned} \left\|A - \tfrac{M+M'}{2}\right\|^2 &= \left\|\tfrac{1}{2}(A-M) + \tfrac{1}{2}(A-M')\right\|^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\|A-M\|^2 + \tfrac{1}{2}\|A-M'\|^2 - \|M-M'\|^2 \\ &= \|A-M\|^2 - \|M-M'\|^2 \\ &< \|A-M\|^2 \end{aligned}$$

ce qui est absurde car $\|A-M\| \leqslant \|A - \frac{M+M'}{2}\|$. Ainsi l'unicité de la matrice M est démontrée.

Il reste à expliciter la matrice M. On commence par l'observation suivante, si $P(x) = (a-x)^2 + b$ alors le minimum de $P(x)$ lorsque $x \in [0,1]$ est atteint pour $x = 0$ si $a < 0$, $x = a$ si $a \in]0,1[$ et $x = 1$ si $a > 1$ (cela se voit en faisant trois études de fonction). Pour $N \in \mathcal{Y}_n$, $\|A-N\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{i,j} - n_{i,j})^2$, donc si on note

$$m_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } a_{i,j} < 0 \\ a_{i,j} & \text{si } 0 < a_{i,j} < 1 \\ 1 & \text{si } a_{i,j} > 1 \end{cases}$$

alors en effectuant le remplacement successivement de $n_{1,1}$ puis de $n_{1,2}$, jusquà $n_{n,n}$ suivant ce principe, on obtient l'inégalité $\|A-M\|^2 \leqslant \|A-N\|^2$ et donc M est bien la matrice cherchée.

IIB - ***Maximisation du déterminant sur $\mathcal{X}_n$ et $\mathcal{Y}_n$***

II.B.1) L'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{Y}_n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & N & \longmapsto & \det(A) \end{array}$$

est continue car polynômiale et donc comme $\mathcal{Y}_n$ est une partie fermée et bornée, $\varphi(\mathcal{Y}_n)$ possède un maximum. Comme l'ensemble $\mathcal{X}_n$ est fini, il est immédiat que la fonction déterminant possède un maximum sur cet ensemble.

II.B.2) Notons $Y_n \in \mathcal{Y}_n$ telle que $y_n = \det(Y_n)$. On a dans ce cas

- $Y'_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & Y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{Y}_{n+1}$
- $\det(Y'_{n+1}) = \det(Y_n) = y_n \leqslant y_{n+1}$ ce qui prouve que la suite $(y_k)_{k \geqslant 2}$ est croissante.

II.B.3) En reprenant les notations de l'énoncé, mais en notant J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui ne contient que des 1

$$\det(J_n - I_n) = \begin{vmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & (1) & \\ & (1) & \ddots & \\ & & & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n-1 & & & \\ \vdots & & \ddots & (1) \\ \vdots & & (1) & \ddots \\ n-1 & & & 0 \end{vmatrix} = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & & & \\ \vdots & \ddots & (1) & \\ \vdots & (1) & \ddots & \\ 1 & & & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)$$

Posons $P_n = J_n - I_n$, de sorte que $P_n \in \mathcal{Y}_n$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\det(M_{2p+1}) = 2p \leqslant y_{2p+1}$ donc $\lim_{p\to+\infty} y_{2p+1} = +\infty$, comme la suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante elle possède une limite, nécessairement la même que celle de la suite extraite $(y_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ ce qui permet de conclure.

II.B.4) Soient $N = (n_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{Y}_n$. Fixons $1 \leqslant i, j \leqslant n$ et supposons que $n_{i,j} \in]0,1[$. Si nous développons le déterminant de N suivant la ligne i alors $\det(N) = (-1)^{i+j} n_{i,j} + \sum_{k\neq j}(-1)^{i+k} a_{i,k}\Delta_{i,k}$ où $\Delta_{r,s}$ est le déterminant de la matrice obtenue à partir de N en enlevant la ligne r et la colonne s. Le déterminant de N s'écrit donc $an_{i,j} + b$ avec a et b deux constantes. Si $a \geqslant 0$ alors en remplaçant $n_{i,j}$ par 1, on obtient un déterminant plus grand car $an_{i,j} + b \leqslant a + b$ et si $a < 0$ alors en remplaçant $n_{i,j}$ par 0, on obtient un déterminant plus grand car $an_{i,j} + b \leqslant b$. Procédons ainsi, à partir de la matrice M, successivement, pour les coefficients $m_{1,}, \dots m_{1,n}, \dots, m_{n,n}$ et notons M' la matrice obtenue. Il est clair que $M' \in \mathcal{X}_n$ et par construction $\det(M) = y_n \leq \det(M') \leqslant x_n$. Or, si $N \in \mathcal{X}_n$ vérifie $\det(N) = x_n$, comme $N \in \mathcal{Y}_n$ on a $\det(N) = x_n \leqslant y_n$ et finalement $x_n = y_n$.

III Matrices de permutations

IIIA - ***Description de*** $\mathcal{P}_n$

III.A.1) Nous allons établir l'équivalence entre les deux définitions suivantes d'une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire usuel.

i) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, $(f(x)|f(y)) = (x|y)$

ii) La matrice de f dans la base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ (notée $\mathcal{B}$) est orthogonale i.e. $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) \in O_n(\mathbb{R})$

On note $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et on pose $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$. L'implication $i \Longrightarrow ii$ résulte du fait que si x et y sont représentés dans $\mathcal{B}$ par les matrices colonnes X et Y alors l'égalité $(f(x)|f(y)) = (x|y)$ s'écrit matriciellement ${}^tX{}^tAAY = {}^tXY$, lorsque $x = e_i$ et $y = e_j$ cette égalité devient $({}^tAA)_{i,j} = \delta_{i,j}$ et donc ${}^tAA = I_n$ de sorte que $A \in O_n(\mathbb{R})$.
Réciproquement si $A \in O_n(\mathbb{R})$ alors avec les mêmes notations $(f(x)|f(y)) = {}^tX{}^tAAY = {}^tXY = (x|y)$ et donc $i)$ est vérifié.

III.A.2) Si $M \in O_n(\mathbb{R})$ alors ${}^tMM = I_n$ donc $1 = \det(I_n) = \det({}^tMM) = \det({}^tM)\det(M) = \det(M)^2$ ce qui impose que $\det(M) = \pm 1$. La réciproque est fausse, par exemple $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a pour déterminant 1 mais ${}^tMM \neq I_2$.

III.A.3) Soit $P \in \mathcal{P}_n$. La matrice $P \in \mathcal{X}_n$ et $[{}^tPP]_{i,j} = \sum_{k=1}^n P_{k,i}P_{k,j}$, or pour chaque indice k, il n'y a qu'un seul terme non nul sur la ligne k donc si $i \neq j$ alors pour tous les indices k, $P_{k,i}P_{k,j} = 0$ et donc $\sum_{k=1}^n P_{k,i}P_{k,j} = 0$. Lorsque $i = j$, l colonne j comporte un seul terme non nul qui vaut 1 donc $[{}^tPP]_{i,i} = \sum_{k=1}^n P_{k,i}^2 = 1$ et par suite ${}^tPP = I_n$. La matrice $P \in \mathcal{X}_n \cap O_n(\mathbb{R})$.
Réciproquement, si $P \in \mathcal{X}_n \cap O_n(\mathbb{R})$ alors ${}^tPP = I_n$ et les coefficients de P sont égaux à 0 ou à 1.

- Pour chaque indice i, $[{}^tPP]_{i,i} = \sum_{k=1}^n P_{k,i}^2 = 1$ donc un seul des termes vaut 1 et les autres sont nuls, la colonne i contient un seul terme non nul qui vaut 1.
- On a également $P{}^tP = I_n$ et donc pour chaque indice i, $[P{}^tP]_{i,i} = \sum_{k=1}^n P_{i,k}^2 = 1$ donc un seul des termes vaut 1 et les autres sont nuls, la ligne i contient un seul terme non nul qui vaut 1. Ainsi $P \in \mathcal{P}_n$.

Par double inclusion, $\mathcal{P}_n = \mathcal{X}_n \cap O_n(\mathbb{R})$.
Nous allons pour déterminer le cardinal de $\mathcal{P}_n$ montrer que $\mathcal{P}_n = \{P_\sigma / \sigma \in S_n\}$. Si $\sigma \in S_n$ alors $P_\sigma \in \mathcal{X}_n$ et

$$({}^tP_\sigma P_\sigma)_{i,j} = \sum_{k=1}^n P_{\sigma\, k,j} P_{\sigma\, k,i} = \sum_{k=1}^n \delta_{k,\sigma(i)}\delta_{k,\sigma(j)} = \delta_{i,j}$$

donc ${}^tP_\sigma P_\sigma = I_n$ et $P_\sigma \in \mathcal{X}_n \cap O_n(\mathbb{R}) = \mathcal{P}_n$.
Si $P \in \mathcal{P}_n$ alors notons $\varphi(j)$ l'indice de l'unique terme non nul (donc égal à 1) de P dans la colonne j. La fonction φ est injective car si $j \neq j'$ alors la ligne $\varphi(j)$ contient un seul terme non nul (celui de la colonne j) et donc $\varphi(j') \neq \varphi(j)$.
La fonction φ est une injection de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots, n\}$ donc une bijection, ainsi $\varphi \in S_n$ et $P = P_\varphi$ ce qui termine la preuve de l'égalité $\mathcal{P}_n = \{P_\sigma / \sigma \in S_n\}$.
L'application $\sigma \longmapsto P_\sigma$ est une bijection de S_n dans $\mathcal{P}_n$ donc$\mathcal{P}_n$ a le même cardinal que S_n c'est à dire $n!$.

IIIB - ***Quelques propriétés des éléments de*** $\mathcal{P}_n$

III.B.1) Soient σ et σ' deux éléments de S_n. Pour $i,j\in\{1,\ldots,n\}$,

$$[P_\sigma P_{\sigma'}]_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}[P_\sigma]_{i,k}[P_{\sigma'}]_{k,j}=\sum_{k=1}^{n}\delta_{i,\sigma(k)}\delta_{k,\sigma'(j)}=\delta_{i,\sigma\circ\sigma'(j)}=[P_{\sigma\circ\sigma'}]_{i,j}$$

donc $P_\sigma P_{\sigma'}=P_{\sigma\circ\sigma'}$. Comme l'ensemble $\mathbb{Z}$ est infini et comme S_n est un ensemble fini l'application $\left\{\begin{array}{l}\mathbb{Z}\to S_n\\ k\longmapsto\sigma^k\end{array}\right.$ n'est pas injective. Il existe donc deux entiers $n_1<n_2$ qui ont la même image i.e. tels que $\sigma^{n_1}=\sigma^{n_2}$ donc $\sigma^N=id_{\{1,\ldots,n\}}$ avec $N=n_2-n_1$.

III.B.2) Soit σ un élément de S_n. Il existe un entier $N\in\mathbb{N}^*$ tel que $\sigma^N=id_{\{1,\ldots,n\}}$ et donc $P_\sigma^N=P_{\sigma^N}=I_n$, le polynôme $X^N-1=\prod_{\omega\in\mathbb{U}_N}=(X-\omega)$ est un polynôme annulateur, scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ donc P_σ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, comme $\mathcal{P}_n=\{P_\sigma/\sigma\in S_n\}$ on en déduit que tous les éléments de $\mathcal{P}_n$ sont diagonalisables sur $\mathbb{C}$.

III.B.3) Les élements de $\mathcal{P}_2$ sont $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$.

Un calcul donne $\chi_A(X)=X^2-1$, et $E_1(A)=\mathbb{R}(1,1)$, $E_{-1}(A)=\mathbb{R}(1,-1)$ sont stables[1] par A et I_2.

Les éléments de $\mathcal{P}_3$ sont I_3, $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ et $E=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.

Déterminer les vecteurs propres communs à toutes ces matrices revient à déterminer les sous-espaces stables de dimensions 1. Le polynôme caractéristique de E est X^3-1, ces sev propres sont $\mathbb{R}(1,1,1)$, $\mathbb{R}(1,j,j^2)$ et $\mathbb{R}(1,j^2,j)$. Le sous-espace $\mathbb{R}(1,1,1)$ est stable par toutes les autres matrices, $\mathbb{R}(1,j,j^2)$ n'est pas stable par A et $\mathbb{R}(1,j^2,j)$ non plus.

III.B.4) On doit démontrer que les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ stables par tous les u_σ, $\sigma\in S_n$ sont $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$, $\mathbb{R}^n$, la droite D engendrée par $e_1+e_2+\ldots+e_n$ et l'hyperplan H orhogonal à D.

a) Les sous-espaces $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$, $\mathbb{R}^n$ sont clairement stables par tous les u_σ. On a directement pour tout $\sigma\in S_n$,

$$u_\sigma(e_1+e_2+\ldots+e_n)=e_{\sigma(1)}+e_{\sigma(2)}+\ldots+e_{\sigma(n)}=e_1+e_2+\ldots+e_n$$

donc D est une droite stable par tous les u_σ, et comme les u_σ sont des automorphismes orthogonaux (car$P_\sigma\in O_n(\mathbb{R})$), $D^\perp$ est un sous-espace stable par tous les u_σ.

b) Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, non contenu dans D et stable par tous les u_σ. Notons $v=(v_1,\ldots,v_n)$ un vecteur de V qui n'appartient pas à D. Il existe donc deux indices $i<j$ tel que $v_i\neq v_j$. Notons $\tau_{i,j}$ la transposition d'indice i,j,

- $u_{\tau_{i,j}}(v)=(v_1,\ldots,v_j,\ldots,v_i,\ldots,v_n)\in V$ car V est stable par l'endomorphisme $u_{\tau_{i,j}}$.
- $v-u_{\tau_{i,j}}(v)=(v_i-v_j)(e_i-e_j)$ appartient donc à V et $v\neq v_j$ donc $e_i-e_j\in V$

Puis pour $k\in\{1,\ldots,n\}$ avec $k\neq j$, $u_{\tau_{k,i}}(e_i-e_j)=e_k-e_j\in V$ car V est stable par l'endomorphisme $u_{\tau_{k,i}}$. ainsi les $n-1$ vecteurs e_k-e_j ($k\in\{1,\ldots,n\}$, $k\neq j$) appartiennent à V.

c) Ainsi $H=\mathrm{Vect}(e_1-e_j,\ldots,e_{j-1}-e_j,e_{j+1}-e_j,\ldots,e_n-e_j)\subset V$, or H est de dimension $n-1$, donc $H=V$ ou $V=\mathbb{R}^n$. Les e_k-e_j sont orthogonaux à $e_1+\ldots+e_n$ donc $H=D^\perp$. Par conséquent

- $\{0\}$ et D sont stables par tous les u_σ
- si V est stable non contenu dans D alors $V=D^\perp$ ou $D=\mathbb{R}^n$

de sorte que les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ stables par tous les u_σ, $\sigma\in S_n$ sont $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$, $\mathbb{R}^n$, la droite D engendrée par $e_1+e_2+\ldots+e_n$ et l'hyperplan H orhogonal à D.

III.B.5) **Une caractérisation des éléments de $\mathcal{P}_n$** Comme l'ensemble formé par tous les coefficients de toutes les puissances successives de M est fini, l'ensemble des valeurs prisent par M^k lorsque $k\in\mathbb{N}$ est fini. Il existe donc $k_1<k_2$ tels que $M^{k_1}=M^{k_2}$, comme M est inversible on en déduit que $M^K=I_n$ avec $K=k_2-k_1$, et donc $M^{-1}=M^{K-1}$ est à coefficients entiers naturels.

- $[M^{-1}M]_{i,i}=\sum_{k=1}^{n}[M^{-1}]_{i,k}[M]_{k,i}=1$, $[M^{-1}]_{i,k}$ et $[M]_{k,i}$ sont des entiers naturels, il existe donc un unique indice k tel que $[M^{-1}]_{i,k}[M]_{k,i}=1$ i.e. tel que $[M^{-1}]_{i,k}=[M]_{k,i}=1$, notons k_i cet indice.

1. On a identifié $\mathbb{R}^2$ avec $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

- Pour $j \neq i$, $[M^{-1}M]_{i,j} = \sum_{k=1}^n [M^{-1}]_{i,k}[M]_{k,j} = 0$, $[M^{-1}]_{i,k}$ et $[M]_{k,j}$ sont des entiers naturels, donc d'une part $[M]_{k_i,j} = [M^{-1}]_{i,k_i}[M]_{k_i,j} = 0$ et donc la ligne k_i ne M possède qu'un unique terme non nul et d'autre part $[M^{-1}]_{i,k_j} = [M^{-1}]_{i,k_j}[M]_{k_j,j} = 0$ donc $k_j \neq k_i$.
- L'application $i \longmapsto k_i$ est injective de $\{1,\dots,n\}$ dans lui-même donc bijective et donc chaque ligne de M contient un et un seul terme non nul qui vaut 1.
- En raisonnant à partir de $MM^{-1} = I_n$ on obtiendrait que chaque colonne de M contient un et un seul terme non nul qui vaut 1. Par conséquent $M \in \mathcal{P}_n$ est donc une matrice permutation.

Si M est une matrice de permutation alors la suite $(M^k)_k$ est périodique, à valeurs dans $\mathcal{P}_n$ donc l'ensemble formé par tous les coefficients de toutes les puissances successives de M est fini.

IV Matrices aléatoires de $\mathcal{X}_n$

IVA - ***Génération par une colonne alétoire***

Soit $p \in]0,1[$. Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, définies sur un espace probabilisés $(\Omega,\mathcal{A},P)$ et suivant une même loi de bernoulli de paramètre p.

IV.A.1) Directement $[X_1 = \ldots = X_n] = [X_1 = 0,\dots,X_n = 0] \cup [X_1 = 1,\dots,X_n = 1]$, la réunion étant disjointe et les variables X_i étant mutuellement indépendantes,

$$\begin{aligned} P([X_1 = \ldots = X_n]) &= P([X_1 = 0,\dots,X_n = 0]) + P([X_1 = 1,\dots,X_n = 1]) \\ &= P(X_1 = 0)\ldots P(X_n = 0) + P(X_1 = 1)\ldots P(X_n = 1) \\ &= q^n + p^n \end{aligned}$$

IV.A.2) Directement, en suivant la démonstration de votre cours favori $S \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

IV.A.3) Soient i et j dans $\{1,\dots,n\}$. Lorsque $i \neq j$, la variable aléatoire $X_{i,j}$ est à valeurs dans $\{0,1\}$ c'est donc une variable de Bernoulli, et $P(X_{i,j} = 1) = P(X_i = 1, X_j = 1) = p^2$ donc $X_{i,j} \hookrightarrow \mathcal{B}(p^2)$, lorsque $i = j$, $X_{i,j} = X_i^2 = X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

IV.A.4) Si $\omega \in \Omega$, on introduit la matrice colonne

$$U(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ \vdots \\ X_n(\omega) \end{pmatrix}$$

et la matrice $M(\omega) = U(\omega)^t(U(\omega))$. L'application $M : \begin{cases} \Omega \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \omega \longmapsto M(\omega) \end{cases}$ est ainsi une variable aléatoire.

a) Si $\omega \in \Omega$, alors pour i et j dans $\{1,\dots,n\}$, $M(\omega)_{i,j} = X_i(\omega)X_j(\omega) = X_{i,j}(\omega) \in \{0,1\}$ donc $M(\omega) \in \mathcal{X}_n$.

b) Les colonnes de $M(\omega) = (X_1(\omega)U(\omega),\dots,X_n(\omega)U(\omega))$ sont colinéaires à $U(\omega)$ donc $\mathrm{rg}(M(\omega)) \leqslant 1$. Comme la matrice $M(\omega)$ est une matrice symétrique réelle, elle est diagonalisable.

c) Déjà, si $\omega \in \Omega$, alors $\mathrm{tr}(M(\omega)) = \sum_{i=1}^n \underbrace{X_i(\omega)^2}_{=X_i} = S(\omega) \in \{0,\dots,n\}$. Si $\omega \in \Omega$, alors $M(\omega)^2 = U(\omega)^t(U(\omega))U(\omega)^t(U(\omega))$ or, ${}^t(U(\omega))U(\omega) = \sum_{i=1}^n \underbrace{X_i(\omega)^2} = S(\omega)$ donc $M(\omega)^2 = S(\omega)U(\omega)^t(U(\omega)) = S(\omega)M(\omega)$.

- Si $U(\omega) = 0$ alors $M(\omega) = 0$ et donc $M(\omega)$ est une projection orthogonale et $\mathrm{tr}(S(\omega) = 0$. Réciproquement si $S(\omega) = 0$ alors $X_1 = \ldots = X_n = 0$ et donc $M(\omega) = 0$ est bien une projection orthogonale.
- Si $U(\omega) \neq 0$ alors $M(\omega) \neq 0$. Dans ce cas, $M(\omega)$ est un projecteur ssi $M(\omega)^2 = S(\omega)M(\omega) = M(\omega)$ ssi $S(\omega) = 1$, et comme $M(\omega)$ est une matrice symétrique, la projection est orthogonale.

Bilan, $M(\omega)$ est une matrice de projection orthogonale si et seulement si $S(\omega) \in \{0,1\}$

IV.A.5) Comme $\mathrm{tr}(M) = S \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ on a $E(\mathrm{tr}(M)) = np$ et $V(\mathrm{tr}(M)) = npq$. La variable aléatoire [2] $X = \mathrm{rg}(M)$ est à valeurs dans $\{0,1\}$ et $[X = 1] = [\mathrm{tr}(S) \neq 0] = [X_1 = 0,\dots,X_n = 0]^c$ donc $P(X = 1) = 1 - q^n$ de sorte que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1-q^n)$ et par suite $E(X) = 1 - q^n$, $V(X) = q^n(1 - q^n)$.

2. doit-on considérer comme une évidence que c'est une variable aléatoire ?

IV.A.6) Comme $M^2 = SM$, on obtient successivement $M^3 = SM^2 = \mathrm{tr}(S)^2 M$, ..., $M^k S^{k-1} M$ (pour $k \geqslant 1$).
Si $M = 0$ alors la suite $(M^k)_k$ converge et si $M \neq 0$ alors suite $(M^k)_k$ converge si et seulement si la suite $(S^k)_k$ converge et comme $S \in \{0, \ldots, n\}$, la suite $(S^k)_k$ converge si et seulement si $S \in \{0,1\}$ et le cas $S = 0$ correspond au cas $M = 0$.
La suite $(M^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $S \in \{0,1\}$ et

$$P(S \in \{0,1\}) = P(S = 0) + P(S = 1) = q^n + npq^{n-1}$$

Dans ce cas M est une matrice de projecteur donc la limite de la suite $(M^k)_k$ est M qui est une matrice de projecteur.

IV.A.7) Vu ce qui précède, la matrice M possède deux valeurs propres distinctes si et seulement si $\mathrm{tr}(M) = S \neq 0$ et donc la probabilité cherchée est

$$P(S \neq 0) = 1 - P(S = 0) = 1 - q^n$$

IVB - ***Génération par remplissage aléatoire***

IV.B.1) a) Avec deux boucles imbriquées, classiquement

```
def Somme(M):
    n=len(M)
    S=0
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            S+=M[i,j]
    return S
```

b) Lorsque l'on effectue un tirage uniforme dans $[0,1]$, la probabilité que ce tirage soit dans l'intervalle $[0,p]$ est p ce qui justifie l'algorithme

```
def Bernoulli(p):
    assert 0<=p<=1
    a=random.rand() #pour que cela fonction avec le module chargé
    if a<=p:
        return 1
    else:
        return 0
```

c) On parcours les éléments de M et lorsque le coefficient est nul on effectue un tirage pour savoir si la valeur du coefficient est modifiée ou pas.

```
def Modifie(M,p):
    n=len(M)
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if M[i,j]==0:
                M[i,j]=Bernoulli(p)
    return M
```

d) On utilise une boucle *while*, il n'y a aucune assurance de terminaison, mais la probabilité théorique que cela ne termine pas est nulle.

```
def Simulation(n,p):
    M=zeros((n,n),dtype=int) #pour avoir des entiers
    k=0
    while Somme(M)!=n*n:
        M=Modifie(M,p)
        k+=1
    return k
```

e) La variable N_1 est le nombre de tirages favorables lorsque l'on effectue n^2 tirages de Bernoulli de paramètre p, mutuellement indépendants donc $N_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n^2, p)$.
La loi conditionnelle de N_2 sachant $N_1 = i$ (avec $i \in \{0, \dots, n^2\}$ est la loi du nombre de tirages favorables lorsque l'on effectue $n^2 - i$ tirages de Bernoulli de paramètre p, mutuellement indépendants et donc

$$P(N_2 = k | N_1 = i) = \binom{n^2 - i}{k} p^k q^{n^2-i-k}$$

Puis,

$$\frac{P(N_2 = k|N_1 = i)}{P(N_1 = i)} = \frac{\binom{n^2-i}{k} p^k q^{n^2-i-k}}{\binom{n^2}{i} p^i q^{n^2-i}} = \frac{\binom{n^2-i}{k}}{\binom{n^2}{i}} p^{k-i} q^{-k}$$

Si les variables N_2 et N_1 sont indépendantes alors cette quantité ne doit dépendre que de k, or pour $k = 0$ et $i = 0$ on trouve 1 et pour $k = 0$ et $i = 1$ on trouve $\frac{1}{pn^2}$ et pour $k = 0$ et $i = 2$ on trouve $\frac{2}{n^2(n^2-1)p^2}$ et ces trois égalités ne peuvent pas avoir lieues simultanément car si $pn^2 = 1$ alors $n^2(n^2 - 1)p^2 = pn^2 - p = 1 - p = q \neq 2$. Les variables aléatoires N_1 et N_2 ne sont pas indépendantes.

f) La loi de $T_{i,j}$ est la loi du premier succés dans une succession de tirages de Bernoulli mutuellement indépendants, de paramètre p donc $T_{i,j} \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. En particulier, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $P(T_{i,j} = k) = q^{k-1}p$.

g) Pour un entier $k \geqslant 1$, donner la valeur de $P(T_{i,j} \geqslant k)$. Il s'agit d'un calcul classique,

$$P(T_{i,j} \geqslant k) = \sum_{i=k}^{+\infty} q^{i-1}p = q^{k-1} \sum_{i=0}^{+\infty} q^i p = q^{k-1} \frac{p}{1-q} = q^{k-1}$$

h) Soient $r \geqslant 1$ un entier. Le nombre $S_r = N_1 + \ldots + N_r$ représente le nombre de 1 dans la matrice M.
Notons I_k une partie de $\{1, \dots, n\}$ de cardinal k. La probabilité de l'événement

$$E_k = \bigcap_{(i,j)\in I_k} [T_{i,j} < r+1] \cap \bigcap_{(i,j)\notin I_r} [T_{i,j} \geqslant r+1]$$

se calcule facilement par indépendance des événements et vaut $P(T_{1,1} < r+1)^k P(T_{1,1} \geqslant r+1)^{n^2-k} = (q^r)^{n^2-k}(1-q^r)^k$.
Or $[S_r = k] = \bigcup_{\substack{I_k \subset \{1,\dots,n\} \\ |I_k|=k}} E_k$ donc

$$P(S_r = k) = \binom{n^2}{k} (q^r)^{n^2-k}(1-q^r)^k$$

et finalement $S_r \hookrightarrow \mathcal{B}(n^2, 1 - q^r)$.

i) a) Un façon de procéder est d'effectuer un grand nombre de simulation pour calculer N et de faire la moyenne, la loi des grands nombres nous assure que l'on aura une estimation de l'espérance. Avec python et les fonctions précédentes on obtient

```
#valeur théorique 6.005 à 10-3 près
>>> L=[Simulation(5,0.5) for i in range(1000)]
>>> sum(L)/len(L)
6.0469999999999997
>>> L=[Simulation(5,0.5) for i in range(10000)]
sum(L)/len(L)
>>> 5.9767000000000001
>>> L=[Simulation(5,0.5) for i in range(100000)]
sum(L)/len(L)
>>> 6.0066600000000001
```

b) C'est un calcul assez technique,

$$\begin{aligned}
E(N) &= \sum_{k=1}^{+\infty} kP(N=k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} P(N \geqslant k) && \text{propriété du cours} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} P(S_{k-1} < n^2) && \text{car } [S_{k-1} < n^2] = [N \geqslant k] \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} 1 - P(S_{k-1} = n^2) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} 1 - (1 - q^{k-1})^m \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} (-1)^{i+1} q^{(k-1)i} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} (-1)^{i+1} \sum_{k=1}^{+\infty} q^{(k-1)i} && \text{Fubini hors programme} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} (-1)^{i+1} \frac{1}{1-q^i}
\end{aligned}$$