

Centrale 2016 - PSI 1

un corrigé

1 Généralités

A. Propriétés élémentaires

1.A.1 \mathcal{X}_n est en bijection avec $\{0, 1\}^{(n^2)}$. C'est donc un ensemble fini et

$$\text{card}(\mathcal{X}_n) = 2^{(n^2)}$$

1.A.2 On procède par récurrence pour montrer que pour tout entier $n \geq 2$ on a

$$\forall M \in \mathcal{Y}_n, |\det(M)| < n!$$

- Initialisation : soit $M \in \mathcal{Y}_2$. On a $\det(M) = m_{1,1}m_{2,2} - m_{1,2}m_{2,1} \in [-1, 1]$ (car $m_{1,1}m_{2,2}, m_{1,2}m_{2,1} \in [0, 1]$). On a donc $|\det(M)| \leq 1 < 2$. Le résultat est donc vrai au rang 1.
- Hérédité : supposons le résultat vrai à un rang $n \geq 1$. Soit $M \in \mathcal{Y}_{n+1}$. Un développement par rapport à la dernière colonne donne

$$\det(M) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{n+1+i} m_{i,n+1} \det(M_{n+1,i}) \leq \sum_{i=1}^{n+1} m_{i,n+1} |\det(M_{n+1,i})|$$

où $M_{n+1,i}$ est obtenue à partir de M en supprimant ligne i et colonne $n+1$ et est donc dans \mathcal{Y}_n . Par hypothèse de récurrence, on a donc

$$|\det(M)| \leq n! \sum_{i=1}^{n+1} m_{i,n+1} \leq (n+1)!$$

La dernière inégalité n'est une égalité que si la dernière colonne vaut $(1, \dots, 1)$ mais dans ce cas $|\det(M)| = 0 < (n+1)!$. On a donc le résultat au rang $n+1$.

On en déduit le résultat demandé qui est moins fort que celui prouvé.

1.A.3 On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|M\| = \sup\{|m_{i,j}| / 1 \leq i, j \leq n\}$ (cela ne change rien puisque l'on travaille en dimension finie où le choix de la norme est indifférent). On a alors

$$\forall M \in \mathcal{Y}_n, \|M\| \leq 1$$

et \mathcal{Y}_n est bornée.

Soit (M_p) une suite convergente d'éléments de \mathcal{Y}_n . En notant M la limite, $M_{i,j}$ est la limite de la suite de terme général $(M_p)_{i,j} \in [0, 1]$ et on a donc $M_{i,j} \in [0, 1]$. Ceci montre que $M \in \mathcal{Y}_n$ et que cet ensemble est fermé. Finalement,

$$\mathcal{Y}_n \text{ est un compact de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Soient $A, B \in \mathcal{Y}_n$ et $\lambda \in [0, 1]$. Posons $M = \lambda A + (1 - \lambda)B$. On a

$$\forall i, j \in [1, n], M_{i,j} = \lambda A_{i,j} + (1 - \lambda)B_{i,j} \in [0, 1]$$

car $[0, 1]$ est convexe. Ainsi $M \in \mathcal{Y}_n$ et

$$\mathcal{Y}_n \text{ est un convexe de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

1.A.4 Soient $M \in \mathcal{Y}_n$ et λ une valeur propre associée. On a $MX = \lambda X$. Il existe un entier i tel que $|x_i| = \max\{|x_k| \mid 0 \leq k \leq n\}$. On a

$$\lambda x_i = (MX)_i = \sum_{k=1}^n m_{i,k} x_k$$

et donc

$$|\lambda| \cdot |x_i| \leq \sum_{k=1}^n m_{i,k} |x_k| \leq |x_i| \sum_{k=1}^n m_{i,k} \leq n |x_i|$$

Comme $|x_i| > 0$ car $X \neq 0$, on en déduit que $|\lambda| \leq n$. Ainsi

$$\forall M \in \mathcal{Y}_n, \forall \lambda \in \text{Sp}(M), |\lambda| \leq n$$

La matrice J_n dont tous les coefficients valent 1 est dans \mathcal{Y}_n et n est valeur propre de J_n (vecteur propre associé $(1, \dots, 1)$).

B. Etude de $\mathcal{X}'_n = \mathcal{X}_n \cap GL_n(\mathbb{R})$

1.B.1 Soit $M \in \mathcal{X}_2$. Si M a 0 ou 1 coefficient non nul, elle est non inversible (de rang 0 ou 1). Si elle en a quatre, elle n'est pas inversible non plus (deux colonnes égales). Il reste à traiter le cas où il y a 2 ou 3 coefficients non nuls. On trouve que

$$\mathcal{X}'_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Les polynômes caractéristiques de ces matrices sont (dans l'ordre)

$$(X-1)^2, X^2-1, (X-1)^2, X^2-X-1, X^2-X-1, (X-1)^2$$

Quand ce polynôme a deux racines distinctes, la matrice est diagonalisable (et possède deux sous-espaces propres de dimension 1). Quand il a une racine double, la matrice n'est diagonalisable que si elle est scalaire. Quand il n'y a pas de racine réelle, on a une matrice non diagonalisable. Les éléments diagonalisables de \mathcal{X}'_2 sont donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1.B.2 On a

$$E_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les éléments de la base canonique s'expriment donc comme combinaisons d'éléments de \mathcal{X}'_2 et \mathcal{X}'_2 engendrent $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

De même, on veut montrer que pour $n \geq 3$, toute matrice $E_{i,j}$ de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire comme combinaison linéaires d'éléments de \mathcal{X}'_n . Soient donc $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- Si $i \neq j$, $E_{i,j} = (I_n + E_{i,j}) - I_n$ est une décomposition convenable.
- Si $i = j$ alors la matrice M obtenue à partir de I_n en permutant les lignes i et j est dans \mathcal{X}'_n et $I_n - M = E_{i,i} + E_{j,j} - E_{i,j} - E_{j,i}$. $E_{i,i} + E_{j,j} = I_n - M + E_{i,j} + E_{j,i}$ est donc combinaison d'éléments de \mathcal{X}'_n avec le premier cas. On a alors

$$E_{i,i} - E_{j,j} = (E_{i,i} + E_{k,k}) - (E_{j,j} + E_{k,k})$$

qui est aussi combinaison d'éléments de \mathcal{X}'_n (on peut choisir $k \notin \{i, j\}$ puisque $n \geq 3$).

- Ainsi, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $E_{i,i} = \frac{1}{2}((E_{i,i} + E_{j,j}) + (E_{i,i} - E_{j,j}))$ est combinaison d'éléments de \mathcal{X}'_n (on peut choisir $j \neq i$).

2 Deux problèmes d'optimisation

A. Etude de la distance à \mathcal{Y}_n

2.A.1 On remarque que

$$(M|N) = \sum_{i=1}^n (M^T N)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{j,i} N_{j,i}$$

Cette application correspond ainsi au produit scalaire canonique en identifiant $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^{(n^2)}$. On trouve d'ailleurs, avec cette formule, facilement les propriétés du produit scalaire (symétrique, linéaire par rapport à la seconde variable, défini positif).

2.A.2 L'application $M \mapsto \|A - M\|$ est continue. Elle est donc bornée et atteint ses bornes sur le compact \mathcal{Y}_n . En notant $M \in \mathcal{Y}_n$ un élément où elle atteint son minimum, on a alors

$$\forall N \in \mathcal{Y}_n, \|A - M\| \leq \|A - N\|$$

2.A.3 La matrice M doit être dans \mathcal{Y}_n , c'est à dire avoir des coefficients dans $[0, 1]$ et minimiser la quantité

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2$$

Elle minimise donc chacune des quantités (indépendantes les unes des autres) $(a_{i,j} - m_{i,j})^2$ et minimise donc $|a_{i,j} - m_{i,j}|$. On a donc

$$m_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & \text{si } a_{i,j} \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } a_{i,j} > 1 \\ 0 & \text{si } a_{i,j} < 0 \end{cases}$$

Il y a unicité de M car pour tout y , $x \mapsto |y - x|$ atteint son minimum sur $[0, 1]$ en un unique point.

B. Maximisation du déterminant sur \mathcal{X}_n et \mathcal{Y}_n

2.B.1 Le déterminant est une application multilinéaire en dimension finie et donc continue. Elle est donc bornée et atteint ses bornes sur tout compact. C'est en particulier le cas sur \mathcal{Y}_n et sur \mathcal{X}_n (toute partie finie est évidemment compacte puisque fermée et bornée). On pose

$$x_n = \max_{M \in \mathcal{X}_n} \det(M) \quad \text{et} \quad y_n = \max_{M \in \mathcal{Y}_n} \det(M)$$

2.B.2 Soit $k \geq 2$. Soit $M \in \mathcal{Y}_k$; notons $M' = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (définition par blocs). On a évidemment $M' \in \mathcal{Y}_{k+1}$ et $\det(M') = \det(M)$ (déterminant bloc diagonal). Ainsi

$$\det(M) = \det(M') \leq y_{k+1}$$

En passant au maximum, on en déduit que

$$y_k \leq y_{k+1}$$

2.B.3 La matrice M a tous ses coefficients égaux sauf ceux sur la diagonale qui valent 1. On effectue l'opération élémentaire $C_1 \leftarrow C_1 + \dots + C_n$ ce qui permet de factoriser le déterminant par $n - 1$. On soustrait alors la première colonne à toutes les autres. Ces opérations laissent le déterminant

invariant et donnent un déterminant triangulaire de coefficients diagonaux $1, -1, \dots, -1$. On a ainsi

$$\det(M) = (n-1)(-1)^{n-1}$$

En particulier, $y_{2n+1} \geq 2n$ et $y_{2n+1} \rightarrow +\infty$. Par croissance de la suite (y_k) , on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty$$

2.B.4 Un développement par rapport à la colonne j donne

$$\det(N) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} n_{k,j} \det(N_{k,j})$$

où $N_{k,j} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ est obtenue à partir de N en enlevant colonne j et ligne k . Si $(-1)^{i+j} \det(N_{i,j}) \geq 0$, on pose $n'_{i,j} = 1$ et sinon on pose $n'_{i,j} = 0$. Par ailleurs, on pose $n'_{u,v} = n_{u,v}$ si $(u,v) \neq (i,j)$.

N et N' ayant même colonne j , $\det(N_{k,j}) = \det(N'_{k,j})$ pour tout k .

Par choix de $n'_{i,j}$, on a $(-1)^{i+j} \det(N_{i,j}) n_{i,j} \leq (-1)^{i+j} \det(N'_{i,j}) n'_{i,j}$.

Enfin, $(-1)^{k+j} \det(N_{k,j}) n_{k,j} = (-1)^{k+j} \det(N'_{k,j}) n'_{k,j}$ pour $k \neq i$. Ainsi,

$$\det(N) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} n_{k,j} \det(N_{k,j}) \leq \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} n'_{k,j} \det(N'_{k,j}) = \det(N')$$

et bien sûr $N' \in \mathcal{Y}_n$.

En répétant ce processus pour tous les couples (i,j) , on trouve une matrice $M \in \mathcal{X}_n$ telle que $\det(N) \leq \det(M)$. On a ainsi

$$\forall N \in \mathcal{Y}_n, \det(N) \leq x_n$$

En passant au maximum, on trouve que $y_n \leq x_n$. Comme $\mathcal{X}_n \subset \mathcal{Y}_n$, l'inégalité inverse est évidente et finalement

$$x_n = y_n$$

3 Matrices de permutations

A. Description de \mathcal{P}_n

3.A.1 On dit que u est une isométrie vectorielle de \mathbb{R}^n si

$$u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \text{ et } \forall x, y \in \mathbb{R}^n, (u(x)|u(y)) = (x|y) \quad (1)$$

Montrons que ceci équivaut à

$$u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \text{ et } \text{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(u) \in O_n(\mathbb{R}) \quad (2)$$

- Supposons (1) vérifiée. En particulier, $(u(e_i)|u(e_j)) = (e_i|e_j) = \delta_{i,j}$ et $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une b.o.n. de \mathbb{R}^n . $\text{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(u)$ s'interprétant aussi comme matrice de passage entre (e_1, \dots, e_n) et $(u(e_1), \dots, u(e_n))$, c'est une matrice de passage entre b.o.n. et donc une matrice orthogonale.
- Supposons (2) vérifiée. Les colonnes de $\text{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(u)$ forment alors une b.o.n. de \mathbb{R}^n et cette matrice s'interprète comme matrice de passage entre b.o.n. On en déduit que $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une b.o.n. de \mathbb{R}^n . Soient alors $x, y \in \mathbb{R}^n$. On a

$$(u(x)|u(y)) = \left(\sum_{i=1}^n x_i u(e_i) \middle| \sum_{i=1}^n y_i u(e_i) \right) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = (x|y)$$

3.A.2 Si $M \in O_n(\mathbb{R})$ alors $M^T M = I_n$. Le déterminant étant un morphisme multiplicatif invariant par transposition, on en déduit que $\det(M)^2 = 1$ et on a donc

$$\forall M \in O_n(\mathbb{R}), \det(M) \in \{1, -1\}$$

La réciproque est fautive comme le montre la matrice $\text{diag}(2, 1/2, 1, \dots, 1)$ qui est de déterminant 1 mais non orthogonale (première colonne non normée).

3.A.3 On doit prouver une double inclusion.

- Soit $M \in \mathcal{P}_n$. Chaque colonne de P est un des e_i (car il y a un unique 1 et des 0) et pour tout i , il existe $s(i)$ tel que la colonne i de P soit $e_{s(i)}$. De plus, deux colonnes sont différentes (car il y a un unique 1 et des 0 sur chaque ligne). Les $s(i)$ sont donc deux à deux distincts et s est une permutation de $[[1, n]]$. Les colonnes de P forment donc une b.o.n. de \mathbb{R}^n et $P \in O_n(\mathbb{R})$. On a aussi $P \in \mathcal{X}_n$.
- Supposons réciproquement que $M \in O_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{X}_n$. Chaque colonne de P est normée et composée de 0 et de 1. Il faut donc qu'il y ait un unique 1 sur chaque colonne (et des zéros ailleurs). De plus, $M^T \in O_n(\mathbb{R})$ et on a la même propriété sur les lignes. Ainsi, $M \in \mathcal{P}_n$.

On a en fait montré que \mathcal{P}_n est composé des matrices de permutation. Son cardinal est égal à $n!$.

B. Quelques propriétés des éléments de \mathcal{P}_n

3.B.1 La j colonne de P_σ est $e_{\sigma(j)}$. u_σ est donc caractérisé par

$$\forall j \in [[1, n]], u_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}$$

On en déduit, pour

•

$\sigma, \sigma' \in S_n$, que

$$\forall j, u_\sigma \circ u_{\sigma'}(e_j) = u_\sigma(e_{\sigma'(j)}) = e_{\sigma \circ \sigma'(j)}$$

Un endomorphisme étant caractérisé par son action sur une base, on trouve que $u_\sigma \circ u_{\sigma'} = u_{\sigma \circ \sigma'}$ ce qui donne matriciellement

$$P_\sigma P_{\sigma'} = P_{\sigma \circ \sigma'}$$

$k \in \mathbb{Z} \mapsto \sigma^k \in S_n$ ne peut être injective puisque son ensemble de départ est infini alors que son ensemble d'arrivée est fini. Il existe donc $i < j$ tel que $\sigma^i = \sigma^j$ c'est à dire (en composant i fois par l'inverse de σ) que $\text{Id}_{\{1, \dots, n\}} = \sigma^{j-i}$. Comme $j - i > 0$, on a montré que

$$\exists N \geq 1 / \sigma^N = \text{Id}_{\{1, \dots, n\}}$$

3.B.2 Soit $M \in \mathcal{P}_n$. On a vu en **3.1.3** qu'il existe $s \in S_n$ telle que $M = P_s$. Comme il existe $N \geq 1$ tel que $s^N = \text{Id}$, on trouve

$$M^N = P_{s^N} = P_{\text{Id}} = I_n$$

et $X^N - 1$ annule M . Ce polynôme étant scindé à racines simples dans \mathbb{C} (les racines N -ièmes de l'unité), M est diagonalisable (dans \mathbb{C}).

3.B.3 Il y a autant d'éléments dans \mathcal{P}_n que dans S_n , c'est à dire $n!$. On a

$$\mathcal{P}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Les vecteurs propres communs à ces deux matrices sont ceux de la seconde (tout vecteur non nul est propre pour I_2) et ce sont les multiples non nuls de $(1, 1)$ et $(1, -1)$.

Passons au cas $n = 3$. On a cette fois

$$\mathcal{P}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Les sous-espaces propres de la seconde matrice sont $A = \text{Vect}((1, 1, 1), (0, 0, 1))$ et $B = \text{Vect}((1, -1, 0))$.

Les sous-espaces propres de la troisième matrice sont $C = \text{Vect}((1, 1, 1), (0, 1, 0))$ et $D = \text{Vect}((1, 0, -1))$.

Un vecteur propre commun à toutes les matrices est donc dans $A \cap C$ ou $A \cap D$ ou $B \cap C$ ou $B \cap D$. Deux de ces espaces sont égaux à $\{0\}$ et deux autres égaux à $\text{Vect}(1, 1, 1)$. Un vecteur propre commun à tous les éléments de \mathcal{P}_3 est donc un multiple non nul de $(1, 1, 1)$.

Réciproquement, $(1, 1, 1)$ est propre pour chaque élément de \mathcal{P}_3 et il en est donc de même pour tous ses multiples non nuls.

3.B.4 (a) Soit $\sigma \in S_n$. On a immédiatement

$$u_\sigma(\{0\}) = \{0\} \quad \text{et} \quad u_\sigma(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^n$$

De plus $u_\sigma(e_1 + \cdots + e_n) = e_{\sigma(1)} + \cdots + e_{\sigma(n)} = e_1 + \cdots + e_n$ et donc

$$u_\sigma(\text{Vect}(e_1 + \cdots + e_n)) \subset \text{Vect}(e_1 + \cdots + e_n)$$

Soit $x \in H = D^\perp$. Pour tout $y \in D$, on a $u_\sigma(y) = y$ (on vient de le voir) et donc (comme u_σ est une isométrie vectorielle puisqu'elle transforme une b.o.n. en b.o.n.)

$$(u_\sigma(x)|y) = (u_\sigma(x)|u_\sigma(y)) = (x|y) = 0$$

Ceci montre que $u_\sigma(x) \in D^\perp = H$ et on a donc

$$u_\sigma(H) \subset H$$

(b) Comme V est un sous-espace de \mathbb{R}^n non contenu dans D , il existe des scalaires x_1, \dots, x_n non tous égaux tels que $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in V$.

Les x_i n'étant pas tous égaux, il existe $i < j$ tels que $x_i \neq x_j$. Soit s l'application qui échange i et j et laisse les autres éléments invariants. Comme $s \in S_n$, on a $u_s(x) \in V$ et donc $x - u_s(x) \in V$. Ceci donne $(x_i - x_j)(e_i - e_j) \in V$ et comme $x_i \neq x_j$, $e_i - e_j \in V$.

Soit alors $k \notin \{i, j\}$. Utilisons l'application σ qui permute i et k et laisse les autres éléments invariants (et donc en particulier j). On a $u_\sigma(e_i - e_j) = e_k - e_j \in V$. On a donc montré que

$$\exists j \in [1, n] / \forall k \neq j, e_k - e_j \in V$$

(c) La famille $(e_k - e_j)_{k \neq j}$ est libre, et composée de $n - 1$ éléments tous dans H (orthogonaux à $e_1 + \cdots + e_n$). Comme $\dim(H) = n - 1$, cette famille est une base de H . On a donc $H \subset V$. Or, H est un hyperplan et les seuls sous-espaces qui contiennent H sont donc H et \mathbb{R}^n .

On vient de voir qu'un sous-espace qui est laissé stable par tous les u_σ est soit inclus dans D et donc égal à $\{0\}$ ou D , soit égal à H ou \mathbb{R}^n . C'est la réciproque voulue.

C. Une caractérisation des éléments de \mathcal{P}_n

Avec l'hypothèse faite, les matrices M^k ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs. Or \mathbb{N} est infini. Comme en **3.B.1**, on va donc avoir deux puissances égales et trouver $N \geq 1$ tel que $M^N = 1$. On a alors $M^{-1} = M^{N-1}$ qui est à coefficients dans \mathbb{N} (comme toutes les M^k pour $k \in \mathbb{N}$ et par récurrence).

Notons $M^{-1} = (n_{i,j})$ et $M = (m_{i,j})$. Comme $MM^{-1} = I_n$, on a

$$\forall i, j, \sum_{k=1}^n m_{i,k} n_{k,j} = \delta_{i,j}$$

Les quantités $m_{i,k} n_{k,j}$ étant entières naturelles, la somme ne peut valoir 0 que si toutes les quantités sont nulles et ne peut valoir 1 que si elle sont toutes nulles sauf une qui vaut 1.

Pour chaque i , on trouve donc $s(i)$ tel que $m_{i,s(i)} = n_{s(i),i} = 1$. On a alors, en utilisant $(MN)_{j,s(i)} = 0$ pour $j \neq s(i)$:

$$\forall i, \forall j \neq s(i), \forall k \in [1, n], m_{j,k} n_{k,s(i)} = 0$$

et donc, en particulier $k = i$, $m_{j,i} = 0$. Sur la colonne i , tous les termes sont nuls sauf celui en position $s(i)$ qui vaut 1. Comme M est inversible, les $s(i)$ sont ainsi deux à deux distincts (sinon deux colonnes sont égales) et $s \in S_n$ et $M = P_s$.

Réciproquement, les P_σ sont à coefficients entiers naturels et les coefficients de toutes les puissances de P_σ valent 0 ou 1 et sont donc dans un ensemble fini.

4 Matrices aléatoires de \mathcal{X}_n

A. Génération par une colonne aléatoire

4.A.1 La probabilité que les X_i soient égales est

$$\mathbb{P}((X_1 = 0 \cap \dots \cap X_n = 0) \cup (X_1 = 1 \cap \dots \cap X_n = 1))$$

Par incompatibilité des événements de la réunion et indépendance des X_i , cette probabilité vaut

$$\prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = 0) + \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = 1) = p^n + (1-p)^n$$

4.A.2 Le cours indique que $X_1 + \dots + X_n$ suit une loi binomiale de paramètres n et p , c'est à dire que

$$\forall k \in [0, n], \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Justifions ce résultat. Les X_i étant à valeurs dans $\{0, 1\}$, $X_1 + \dots + X_n$ est à valeurs dans $[0, n]$. De plus

$$(X_1 + \dots + X_n = k) = \bigcup_{j_1 + \dots + j_n = k} \mathbb{P}(X_1 = j_1 \cap \dots \cap X_n = j_n)$$

Comme en question précédente (incompatibilité puis indépendance)

$$(X_1 + \dots + X_n = k) = \sum_{j_1 + \dots + j_n = k} \mathbb{P}(X_1 = j_1) \dots \mathbb{P}(X_n = j_n) = \sum_{j_1 + \dots + j_n = k} p^k (1-p)^{n-k}$$

puisque k des valeurs j_i valent 1 et $n - k$ valent 0. Il y a autant de termes dans la somme que de façon de répartir les 1, c'est à dire $\binom{n}{k}$. Ceci donne la formule annoncée.

4.A.3 $X_{i,j}$ est une variable de Bernoulli (prend la valeur 0 ou 1) de paramètre $\mathbb{P}(X_i X_j) = 1$. Deux cas sont possibles

$$\forall i \neq j, \mathbb{P}(X_i X_j = 1) = \mathbb{P}(X_i = 1 \cap X_j = 1) = \mathbb{P}(X_i = 1)\mathbb{P}(X_j = 1) = p^2$$

$$\forall i, \mathbb{P}(X_i X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = 1) = p$$

4.A.4 (a) On a

$$\forall \omega \in \Omega, M(\omega)_{i,j} = X_i(\omega)X_j(\omega) \in \{0, 1\}$$

Ainsi, M est à valeurs dans \mathcal{X}_x .

(b) On a de façon immédiate

$$\forall A \in \mathcal{X}_n, \text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i} \in \{0, \dots, n\}$$

puisque l'on somme des 0 ou 1.

$M(\omega)$ étant un produit de matrice de rang 1, son rang est inférieur à 1 (toutes ses colonnes sont des multiples de $U(\omega)$). Distinguons deux cas.

- Si $U(\omega) = 0$ alors $M(\omega) = 0$ est diagonale (et donc diagonalisable).
- Sinon, il existe i tel que $X_i(\omega) = 1$ et $M(\Omega)_{i,i} = 1$. $M(\omega)$ est ainsi de rang 1 (non nulle et de rang ≤ 1). 0 est valeur propre et le sous-espace propre associé est de dimension $n - 1$. On vérifie que $U(\omega)$ est vecteur propre associé à $\text{Tr}(M(\omega)) = \sum_{i=1}^n X_i(\omega)^2 > 0$. On a donc un second sous-espace propre de dimension au moins 1. Les sous-espaces propres étant en somme directe, on a finalement deux sous-espaces propres : celui associé à 0 de dimension $n - 1$ et celui associé à $\text{Tr}(M(\omega)) > 0$ de dimension 1. $M(\omega)$ est donc diagonalisable et semblable à $\text{diag}(0, \dots, 0, \text{Tr}(M(\omega)))$.

(c) On a

$$M(\omega)^2 = (U(\omega)U(\omega)^T)(U(\omega)U(\omega)^T) = U(\omega)(U(\omega)^T U(\omega))U(\omega)^T$$

Le produit intermédiaire est un scalaire égal à $\sum_{i=1}^n X_i(\omega)^2$ et donc

$$M(\omega)^2 = \left(\sum_{i=1}^n X_i(\omega)^2 \right) M(\omega)$$

- Si $M(\omega)$ est une matrice de projection orthogonale, c'est une matrice de projecteur et donc égale à son carré. Ainsi, $\sum_{i=1}^n X_i(\omega)^2 \in \{0, 1\}$ (1 si $M(\omega) \neq 0$ et 0 si $M(\omega) = 0$ auquel cas les $X_i(\omega)$ sont tous nuls). Dans le premier cas, les $X_i(\omega)$ valent tous 0 sauf l'un qui vaut 1 et donc $S(\omega) = 1$. Dans le second il sont tous nuls et $S(\omega) = 0$.
- Réciproquement, si $S(\omega) = 0$ alors les $X_i(\omega)$ sont tous nuls et donc $M(\omega) = 0$ qui est la matrice de projection orthogonale sur $\{0\}$.
Si $S(\omega) = 1$ alors les $X_i(\omega)$ valent tous 0 sauf l'un qui vaut 1 et alors $\sum_{i=1}^n X_i(\omega)^2 = 1$ ce qui indique que $M(\omega)$ est une matrice de projection. L'image de $M(\omega)$ est égale à $\text{Vect}(U(\omega))$ (vu plus haut) qui est de dimension 1 (car $U(\omega) \neq 0$). Si $(V|U(\omega)) = 0$ alors $U(\omega)^T V = 0$ et $M(\omega)V = 0$. Le noyau de $M(\omega)$ contient donc $\text{Vect}(U(\omega))^\perp$ et il y a égalité par dimension (théorème du rang). $M(\omega)$ est la matrice d'une projection orthogonale.

4.A.5 On a $\text{Tr}(M(\omega)) = \sum_{i=1}^n X_i(\omega)^2 = S(\omega)$ (car $X_i = X_i^2$). $\text{Tr}(M)$ suit donc une loi binomiale de paramètres n et p et

$$\mathbb{E}(\text{Tr}(M)) = np, \quad \mathbb{V}(\text{Tr}(M)) = np(1 - p)$$

Le rang de $M(\omega)$ valant 0 ou 1, $\text{rg}(M)$ est une variable de Bernoulli de paramètre

$$1 - \mathbb{P}(\text{rg}(M) = 0) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n X_i(\omega) = 0\right) = 1 - (1 - p)^n$$

et on a donc

$$\mathbb{E}(\text{rg}(M)) = 1 - (1 - p)^n, \quad \mathbb{V}(\text{rg}(M)) = (1 - (1 - p)^n)(1 - p)^n$$

4.A.6 On a vu plus haut que $M^2 = SM$. Une récurrence immédiate donne

$$\forall k \geq 1, M^k = S^{k-1}M$$

et on a bien sûr $M^0 = I_n$.

La suite $(M(\omega)^k)$ convergera ssi $M(\omega) = 0$ ou $S(\omega) \in]-1, 1]$, c'est à dire en fait ssi $M(\omega) = 0$ ou $S(\omega) \in \{0, 1\}$ ce qui équivaut à $S(\omega) \in \{0, 1\}$. La probabilité de convergence est donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((\text{Tr}(M) = 0) \cup (\text{Tr}(M) = 1)) &= \mathbb{P}(\text{Tr}(M) = 0) + \mathbb{P}(\text{Tr}(M) = 1) \\ &= (1 - p)^n + np(1 - p)^{n-1} \\ &= (1 - p)^{n-1}(1 - p + np) \end{aligned}$$

S'il y a convergence alors la limite est $M(\omega)$ si $S(\omega) = 1$ et 0 si $S(\omega) = 0$. Dans tous les cas, la limite est $M(\omega)$ (nulle dans le second cas) et comme $S(\omega) \in \{0, 1\}$, c'est une matrice de projection orthogonale.

4.A.7 On a vu plus haut que $M(\omega)$ possédait deux valeurs propres distinctes si et seulement si $U(\omega) \neq 0$, c'est à dire ssi $S(\omega) \neq 0$. La probabilité que M possède deux valeurs propres distinctes est donc

$$\mathbb{P}(S \neq 0) = 1 - \mathbb{P}(S = 0) = 1 - (1 - p)^n$$

B. Génération par remplissage aléatoire

4.B.1 (a) def Somme(M):

```
n=len(M)
s=0
for i in range(n):
    for j in range(n):
        s=s+M[i,j]
return(s)
```

(b) def Bernoulli(p):

```
if random()<=p:
    return(1)
else:
    return(0)
```

(c) def Modifie(M,p):

```
n=len(M)
for i in range(n):
    for j in range(n):
        if M[i,j]==0:
            M[i,j]=Bernoulli(p)
```

(d) On commence par écrire une fonction `EstRemplie` qui prend en argument une matrice carrée et renvoie `True` si et seulement si ses coefficients sont tous non nuls. On se permet une interruption prématurée de boucle `for` par utilisation d'un `return` dans la boucle pour plus de lisibilité (une boucle conditionnelle est en fait plus naturelle).

```

def EstRemplie(M):
    n=len(M)
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if M[i,j]==0:
                return(False)
    return(True)

```

On gère alors un compteur et on itère en l'incrémentant tant que les modifications n'amènent pas la matrice avec que des 1.

```

def simulation(n,p):
    M=zeros((n,n))
    k=0
    while not(EstRemplie(M)):
        Modifie(M,p)
        k=k+1
    return(k)

```

4.B.2 N_1 est la somme des coefficients de M_1 . C'est donc une somme de $m = n^2$ variables qui suivent des lois de Bernoulli de même paramètre p et qui sont indépendantes. Ainsi

$$N_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$$

Si ($N_1 = i$) avec $i \in [0, m]$, on effectue $m - i$ nouvelles expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre p et pour $\mathbb{P}_{(N_1=i)}$, N_2 suit une loi $\mathcal{B}(m - i, p)$.

La loi de N_2 conditionnée par ($N_1 = i$) dépend donc de i et les variables N_1 et N_2 ne sont pas indépendantes.

4.B.3 i et j étant fixés, on effectue une suite d'expériences de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p et $T_{i,j}$ est le rang du premier succès. On sait alors que

$$T_{i,j} \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$$

c'est à dire que $T_{i,j}$ suit une loi géométrique de paramètre p .

4.B.4 On a ainsi

$$\mathbb{P}(T_{i,j} \geq k) = \sum_{l=k}^{\infty} \mathbb{P}(T_{i,j} = l) = \sum_{l=k}^{\infty} p(1-p)^{l-1} = (1-p)^{k-1}$$

On peut obtenir le résultat en constatant que ($T_{i,j} \geq k$) correspond à $k - 1$ échecs consécutifs.

4.B.5 S_r est le nombre de coefficients valant 1 après r étapes. ($S_r = l$) signifie que ($T_{i,j} < r + 1$) pour exactement l couples (i, j) et ($T_{i,j} \geq r + 1$) pour les $m - l$ autres. Il y a $\binom{m}{l}$ façons de choisir l couples. Par indépendance des $T_{i,j}$ (et incompatibilité des situations pour deux choix différents des couples) et comme ces $T_{i,j}$ suivent tous la même loi (celle de $T_{1,1}$) on a donc

$$\mathbb{P}(S_r = l) = \binom{m}{l} \mathbb{P}(T_{1,1} < r + 1)^l \mathbb{P}(T_{1,1} \geq r + 1)^{m-l} = \binom{m}{l} (1 - (1-p)^r)^l (1-p)^{r(m-l)}$$

4.B.6 (a) On effectue un grand nombre de simulations et on calcule la moyenne des résultats obtenus. Avec 1000 simulation, cela donne la fonction suivante.

```

def esperance(n,p):
    s=0
    for i in range(1000):
        s=s+simulation(n,p)
    return(s/1000)

```

(b) On a

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(N = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N \geq k)$$

L'événement $(N \geq k)$ signifie qu'au bout de $k-1$ étapes, tout n'était pas rempli et équivaut à $(S_{k-1} < m)$. Sa probabilité est $1 - \mathbb{P}(S_k = m)$ et avec la question précédente,

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - (1 - q^k)^m)$$

Mathématiques 1

Présentation du sujet

Le sujet propose l'étude de matrices à coefficients prenant les valeurs 0 ou 1. Il est constitué de quatre parties abordant des aspects différents : propriétés algébriques et topologiques, matrices de permutation et génération aléatoire de telles matrices.

Ce sujet permet de parcourir de nombreux points du programme de mathématique de PSI notamment les nouveaux thèmes introduits en 2014 : probabilités et informatique.

La notion de compacité posée à la question **I.A.3**) est hors programme. Le barème n'en a pas tenu compte et les élèves ayant su répondre à la question ont eu leurs points comptabilisés dans la partie II où l'hypothèse de fermé borné était utile.

Analyse globale des résultats

Les correcteurs ont pu constater que les candidats maîtrisent les bases de la programmation en Python ainsi que les calculs élémentaires de probabilité. Il était donc assez facile d'obtenir des points dans la partie IV.

En revanche certaines notions mathématiques sont moins bien maîtrisées : cardinalité, convexité, projection, diagonalisation... De manière moins surprenante, les questions de topologie posent problème à de nombreux candidats.

Le sujet est d'une longueur et d'une difficulté raisonnable. À l'exception de la question **IV.B.6b**), toutes les questions ont été correctement traitées par au moins un candidat. Néanmoins, certaines ont été très peu abordées (typiquement la fin des parties III et IV) ou très mal (partie II surtout).

Enfin, de nombreux candidats ne portent aucune attention à la présentation de leurs copies. Celles-ci sont parfois difficilement lisibles ce qui fait courir un risque de mauvaise compréhension par les correcteurs.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Le jury souhaite insister sur un certain nombre de points qui ont souvent posé problème aux candidats.

- Les candidats doivent faire un effort de présentation des copies.
- Les candidats cherchent parfois des rédactions inutilement compliquées alors qu'une démonstration sobre permet d'obtenir un résultat juste et convainquant.
- La diagonalisation est très mal maîtrisée : matrice déjà diagonale, matrice déjà triangulaire avec unique valeur sur la diagonale, matrice symétrique réelle, confusion sur les conditions nécessaires et suffisantes, difficulté à calculer un polynôme caractéristique d'une matrice 2×2 ...
- La notion d'ensemble fini a semblé être d'une difficulté et d'une abstraction inaccessibles à la plupart avec souvent une confusion entre cardinal et dimension. Rares sont les candidats qui s'appuient sur la non existence d'une injection d'un ensemble infini dans un ensemble fini.

- La démonstration de l'existence d'un max ou d'un min pose souvent problème, d'autant plus qu'il y a souvent confusion avec sup et inf.
- Beaucoup de candidats croient qu'une projection orthogonale a une matrice orthogonale ou se trompent sur le lien entre matrices orthogonales et symétriques.
- Il faut bien lire les questions et ne pas confondre « valeurs propres communes » et « vecteurs propres communs ».
- L'inégalité triangulaire et les majorations de valeur absolues sont très mal maîtrisées.

Le jury a apprécié les points suivants.

- L'informatique et la syntaxe Python sont bien, voire très bien, maîtrisées.
- Les probabilités sont généralement bien maîtrisées, par exemple pour l'écriture des événements avec intersections et réunions, et justifications avec incompatibilité ou indépendance. Les lois usuelles aussi. Quelques copies sont néanmoins d'une faiblesse étonnante.
- Les correcteurs ont pris plaisir à lire quelques excellentes copies.

Conclusion

Le sujet était d'une longueur et d'une difficulté raisonnable. Il a permis de mettre en évidence les sujets maîtrisés par une majorité de candidats (programmation Python, probabilités de base) ainsi que les notions posant problème (topologie, cardinalité, projection, recherche d'extrema, diagonalisation).

De nombreuses erreurs choquantes pourraient être évitées si les candidats avaient en tête quelques exemples et contre-exemples simples sur les notions essentielles du programme. Il leur serait alors plus facile de généraliser (passer en dimension infinie par exemple) ou de comprendre la difficulté (ou la simplicité) des cas proposés.

Résultats par épreuve

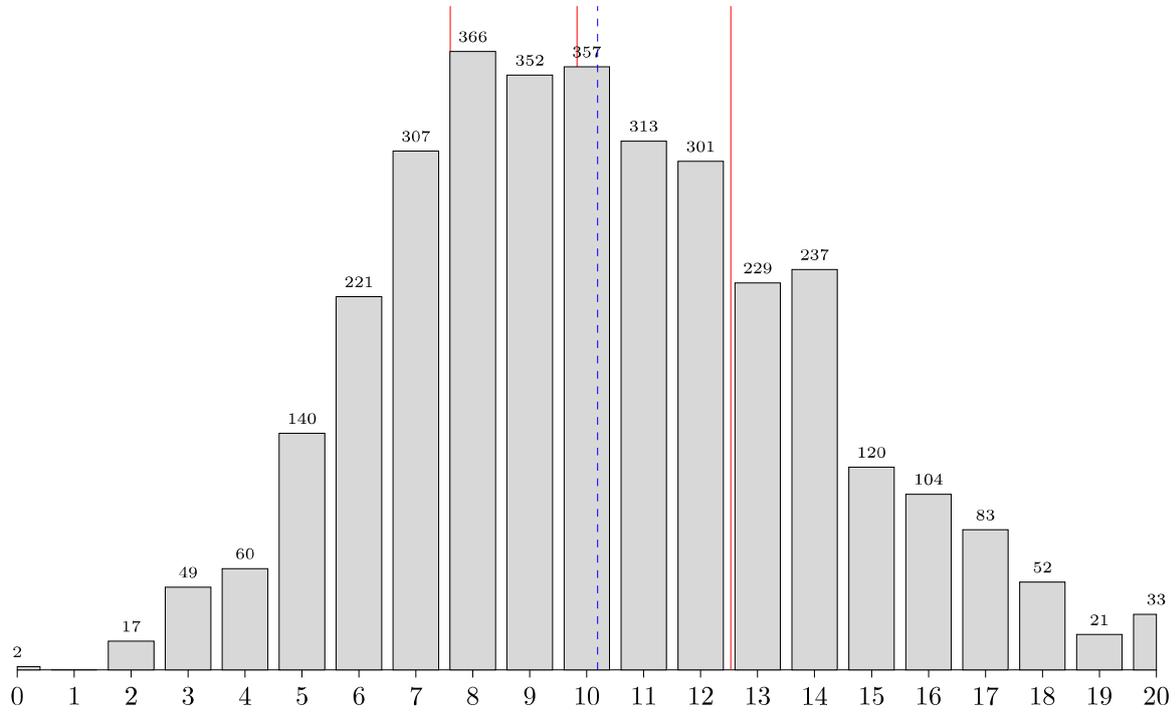
Le tableau ci-dessous donne, pour chaque épreuve, les paramètres statistiques calculés sur les notes sur 20 des candidats présents. Les colonnes ont la signification suivante :

M	moyenne
ET	écart-type
Q1	premier quartile
Q2	médiane
Q3	troisième quartile
EI	écart interquartile

Épreuve	Inscrits	Absents	Présents	M	ET	Q1	Q2	Q3	EI
Informatique	3744	10,1%	3364	10,19	3,59	7,6	9,8	12,5	4,9
Mathématiques 1	3744	7,1%	3479	9,55	3,54	7,0	9,0	11,4	4,5
Mathématiques 2	3744	10,1%	3366	9,78	3,58	7,0	9,2	12,0	5,1
Physique-chimie 1	3744	8,3%	3434	9,47	3,54	6,8	9,0	11,5	4,7
Physique-chimie 2	3744	9,6%	3383	9,50	3,55	6,8	8,9	11,6	4,8
Rédaction	3744	7,8%	3451	10,07	3,58	7,4	9,8	12,2	4,8
S2I	3744	8,5%	3424	9,78	3,53	7,1	9,3	11,9	4,8
Langue	3742	9,8%	3376	10,51	3,82	8,1	10,3	13,0	5,0
Allemand	120	2,5%	117	10,51	3,77	7,6	10,8	13,0	5,4
Anglais	3411	9,2%	3098	10,39	3,81	7,6	10,3	13,0	5,4
Arabe	130	30,0%	91	12,24	3,10	9,8	12,4	14,1	4,3
Chinois	12	0,0%	12	16,16	2,26	13,6	16,7	17,4	3,8
Espagnol	51	15,7%	43	13,12	3,94	9,8	12,5	16,2	6,4
Italien	14	21,4%	11	13,45	1,98	12,0	13,1	14,7	2,7
Portugais	1	0,0%	1	14,60	—	—	—	—	—
Russe	3	0,0%	3	11,90	3,07	—	—	—	—

Les histogrammes suivants donnent la répartition des notes des candidats présents. Chaque barre verticale (sauf la première et la dernière), regroupe les copies ayant obtenu des notes dans un intervalle d'un point. Ainsi la barre centrée sur 10 regroupe les notes $\geq 9,5$ et $< 10,5$. Les traits continus (rouge) matérialisent les quartiles et le trait pointillé (bleu), la moyenne.

Informatique



Mathématiques 1

