

PARTIE I

1. Pour tous $A, B \in \text{Sym}^+(p)$, pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+$, $aA + bB \in \text{Sym}^+(p)$ car :
 - $(aA + bB)^T = aA^T + bB^T = aA + bB$ (par linéarité de la transposition et car $A, B \in \text{Sym}^+(p)$)
 - pour tout $u \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$,

$$u^T(aA + bB)u = au^T Au + bu^T Bu \geq 0$$

comme produit et somme de termes positifs.

Rq : On peut facilement généraliser ce résultat par récurrence à une combinaison linéaire à coefficients positifs de matrices de $\text{Sym}^+(p)$, ce qu'on utilisera dans plusieurs questions.

2. Soit $v \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $A = vv^T$. On a :
 - $A^T = (vv^T)^T = (v^T)^T v^T = vv^T = A$
 - pour tout $u \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$,

$$u^T Au = u^T vv^T u = \langle u, v \rangle \langle v, u \rangle = (\langle u, v \rangle)^2 \geq 0$$

où on a noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et on a utilisé la symétrie du produit scalaire.

On a donc bien $A \in \text{Sym}^+(p)$.

3. (a) Pour tous $u, v \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$,

$$(uu^T)_{ij} = u_i u_j$$

$$(vv^T)_{ij} = v_i v_j$$

$$((uu^T) \odot (vv^T))_{i,j} = (uu^T)_{ij} (vv^T)_{ij} = u_i u_j v_i v_j$$

$$(u \odot v)_i = u_i v_i$$

$$((u \odot v)(u \odot v)^T)_{i,j} = (u \odot v)_i (u \odot v)_j = u_i v_i u_j v_j$$

On a donc bien $((uu^T) \odot (vv^T))_{i,j} = ((u \odot v)(u \odot v)^T)_{i,j}$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$, donc $(uu^T) \odot (vv^T) = (u \odot v)(u \odot v)^T$.

- (b) • Pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on a $u_k^T A u_k \geq 0$ (car $A \in \text{Sym}^+(p)$) et

$$u_k^T A u_k = u_k^T (\lambda_k u_k) = \lambda_k u_k^T u_k = \lambda_k \underbrace{\langle u_k, u_k \rangle}_{=1} = \lambda_k,$$

donc on a bien $\lambda_k \geq 0$.

• La matrice par blocs $P = (u_1 \ \dots \ u_p)$ (où les vecteurs u_i sont écrits en colonne) est orthogonale (car la famille (u_1, \dots, u_p) est une base orthonormale de \mathbb{R}^p) et, d'après les propriétés des matrices de changement de base, on a $A = P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p) P^T$, donc, par produit matriciel par blocs,

$$A = P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p) P^T = (\lambda_1 u_1 \ \dots \ \lambda_p u_p) \begin{pmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_p^T \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^p \lambda_k u_k u_k^T.$$

- (c) • remarquons déjà que \odot est un opérateur symétrique ($A \odot B = B \odot A$) et linéaire à gauche ($(\lambda A + B) \odot C = \lambda A \odot C + B \odot C$), donc bilinéaire.

• Soient $A, B \in \text{Sym}^+(p)$.

D'après la question précédente, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \beta_1, \dots, \beta_p \in \mathbb{R}^{2p}$, (u_1, \dots, u_p) une base orthonormale de \mathbb{R}^p formée de vecteurs propres de A associés respectivement aux valeurs propre $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ et (v_1, \dots, v_p) une base orthonormale de \mathbb{R}^p formée de vecteurs propres de B associés respectivement aux valeurs propre β_1, \dots, β_p telles que :

$$A = \sum_{k=1}^p \lambda_k u_k u_k^T \quad \text{et} \quad B = \sum_{k=1}^p \beta_k v_k v_k^T.$$

Par bilinéarité de \odot , on a alors

$$\begin{aligned} A \odot B &= \left(\sum_{k=1}^p \lambda_k u_k u_k^T \right) \odot \left(\sum_{j=1}^p \beta_j v_j v_j^T \right) \\ &= \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^p \lambda_k \beta_j (u_k u_k^T) \odot (v_j v_j^T) \\ &= \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^p \lambda_k \beta_j (u_k \odot v_j)(u_k \odot v_j)^T \quad (\text{d'après 3a}) \\ &= \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^p \underbrace{\lambda_k \beta_j}_{\geq 0 \text{ d'après 3b}} \underbrace{(u_k \odot v_j)(u_k \odot v_j)^T}_{\in \text{Sym}^+(p) \text{ d'après 2}} \in \text{Sym}^+(p) \end{aligned}$$

comme combinaison linéaire à coefficients positifs de matrices de $\text{Sym}^+(p)$ (cf. 1)

Partie II

4. (a) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

- Par récurrence immédiate, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$,

$$(A^{(k)})_{ij} = (A_{ij})^k.$$

- Par définition de $P[A]$, avec les notations prises pour P , on a, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$,

$$(P[A])_{ij} = P(A_{ij}) = \sum_{k=0}^n a_k (A_{ij})^k = \sum_{k=0}^n a_k (A^{(k)})_{ij} = \left(\sum_{k=0}^n a_k A^{(k)} \right)_{ij},$$

donc on a bien $P[A] = \sum_{k=0}^n a_k A^{(k)}$.

(b) Soit $A \in \text{Sym}^+(p)$.

- Montrons par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^{(k)} \in \text{Sym}^+(p)$ (HR_k).

Initialisation : Pour $k = 0$, on a $A^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots \end{pmatrix}$, donc $A^{(0)}$ est symétrique et pour tout $u = (u_1, \dots, u_p) \in \mathbb{R}^p$,

$$u^T A^{(0)} u = u^T \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^p u_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^p u_k \end{pmatrix} = \left(\sum_{k=1}^p u_k \right) u^T \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\sum_{k=1}^p u_k \right) \left(\sum_{k=1}^p u_k \right) = \left(\sum_{k=1}^p u_k \right)^2 \geq 0,$$

donc $A^{(0)} \in \text{Sym}^+(p)$. On a bien HR_0 .

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ et supposons HR_k vérifiée.

Alors $A^{(k+1)} = \underbrace{A^{(k)}}_{\in \text{Sym}^+(p) \text{ d'après } HR_k} \odot A \in \text{Sym}^+(p)$ d'après la question 3c. On a donc bien HR_{k+1} .

Conclusion : D'où, par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^{(k)} \in \text{Sym}^+(p)$.

- Comme, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $a_k \geq 0$ (par hypothèse sur P), $P[A] = \sum_{k=0}^n a_k A^{(k)} \in \text{Sym}^+(p)$ comme combinaison linéaire à coefficients positifs de matrices de $\text{Sym}^+(p)$.

5. Soit $A \in \text{Sym}^+(p)$.

(a) Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$, par définition de $P_n[A]$, on a

$$(P_n[A])_{ij} = \sum_{k=0}^n \frac{(A_{ij})^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp(A_{ij})$$

comme limite de la suite des sommes partielles de la série exponentielle de paramètre A_{ij} .

(b) • Comme A est symétrique, on a, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$,

$$(\exp[A])_{ij} = \exp(A_{ij}) = \exp(A_{ji}) = (\exp[A])_{ji},$$

donc $\exp[A]$ est une matrice symétrique.

- D'après la question précédente, on a $\exp[A] = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n[A]$ (convergence coordonnée par coordonnée).

De plus, pour tout $u \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, l'application $\varphi_u : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto u^T M u$ est linéaire en dimension finie, donc continue.

On a donc, pour tout $u \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$,

$$u^T \exp[A] u = \varphi_u(\exp[A]) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_u(P_n[A]) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u^T P_n[A] u.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n[A] \in \text{Sym}^+(p)$ (d'après la question 4b avec $A \in \text{Sym}^+(p)$), donc $u^T P_n[A] u \geq 0$, donc $u^T \exp[A] u \geq 0$ comme limite d'une suite de nombres positifs.

(c) Soit $u \in \mathbb{R}^p$.

D'après la question précédente, $\exp[A] \in \text{Sym}^+(p)$.

D'après la question 2, $u u^T \in \text{Sym}^+(p)$.

D'où, d'après la question 3c, $\exp[A] \odot (u u^T) \in \text{Sym}^+(p)$.

6. (a) • Par symétrie du produit scalaire, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$,

$$A_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle = \langle x_j, x_i \rangle = A_{ji},$$

donc A est une matrice symétrique.

- Pour tout $u = (u_1, \dots, u_p) \in \mathbb{R}^p$,

$$\begin{aligned}
 u^T A u &= u^T \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^p \langle x_1, x_j \rangle u_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^p \langle x_p, x_j \rangle u_j \end{pmatrix} \\
 &= u^T \begin{pmatrix} \left\langle x_1, \sum_{j=1}^p u_j x_j \right\rangle \\ \vdots \\ \left\langle x_p, \sum_{j=1}^p u_j x_j \right\rangle \end{pmatrix} \quad (\text{par linéarité à droite du produit scalaire}) \\
 &= \sum_{i=1}^p u_i \left\langle x_i, \sum_{j=1}^p u_j x_j \right\rangle \\
 &= \left\langle \sum_{i=1}^p u_i x_i, \sum_{j=1}^p u_j x_j \right\rangle \quad (\text{par linéarité à gauche du produit scalaire}) \\
 &= \left| \sum_{i=1}^p u_i x_i \right|^2 \geq 0
 \end{aligned}$$

- On a donc bien $A = (\langle x_i, x_j \rangle)_{(i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2} \in \text{Sym}^+(p)$.

(b) Avec les notations de l'énoncé, on a, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$,

$$\begin{aligned}
 (\exp[A] \odot (uu^T))_{ij} &= (\exp[A])_{ij} (uu^T)_{ij} = \exp(A_{ij}) u_i u_j \\
 &= \exp(\langle x_i, x_j \rangle) \exp\left(-\frac{|x_i|^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{|x_j|^2}{2}\right) \\
 &= \exp\left(-\frac{|x_i|^2 + |x_j|^2 - 2\langle x_i, x_j \rangle}{2}\right) \\
 &= \exp\left(-\frac{|x_i - x_j|^2}{2}\right).
 \end{aligned}$$

(c) Soient $\lambda > 0$.

D'après le début de la question 6 et la question 5c, pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in (\mathbb{R}^d)^p$,

$$\exp[A] \odot (uu^T) = \left(\exp\left(-\frac{|x_i - x_j|^2}{2}\right) \right)_{1 \leq i, j \leq p} \in \text{Sym}^+(p).$$

Soit alors, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $y_i = x_i / \sqrt{\lambda}$.

Alors, en posant $B = (\langle y_i, y_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq p}$ et $v = \left(\exp\left(-\frac{|y_1|^2}{2}\right), \dots, \exp\left(-\frac{|y_p|^2}{2}\right) \right)$, on obtient que

$$K = \left(\exp\left(-\frac{|x_i - x_j|^2}{2\lambda}\right) \right)_{1 \leq i, j \leq p} = \left(\exp\left(-\frac{|y_i - y_j|^2}{2}\right) \right)_{1 \leq i, j \leq p} = \exp[B] \odot (vv^T) \in \text{Sym}^+(p).$$

PARTIE III

7. Soit $(f, g) \in \mathcal{E}^2$.

- Par définition de \mathcal{E} , il existe $(a, A, b, B) \in (\mathbb{R}_+^*)^4$ tels que :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad |f(y)| \leq A \exp(-y^2/a) \quad \text{et} \quad |g(y)| \leq B \exp(-y^2/b).$$

Quitte à inverser les rôles de f et g , on peut supposer que $0 < a \leq b$.

Alors, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
 |(fg)(y)| &= |f(y)| \cdot |g(y)| \leq A \exp(-y^2/a) + B \exp(-y^2/b) \\
 &\leq A \exp(-y^2/b) + B \exp(-y^2/b) \quad (\text{car } \exp \text{ est croissante sur } \mathbb{R} \text{ et } a \leq b, \text{ donc } -y^2/a \leq -y^2/b) \\
 &= (A + B) \exp(-y^2/b).
 \end{aligned}$$

- $y \mapsto \exp(-y^2/b)$ est continue sur \mathbb{R} .

$$\frac{\exp(-y^2/b)}{\exp(-y)} = \underbrace{\exp\left(y - \frac{y^2}{b}\right)}_{\rightarrow -\infty} \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 0, \text{ donc } \exp(-y^2/b) = \underset{y \rightarrow +\infty}{o}(\exp(-y)).$$

Or $y \mapsto e^{-y}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ (fonction usuelle), donc, par comparaison, $y \mapsto \exp(-y^2/b)$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ . Comme de plus $y \mapsto \exp(-y^2/b)$ est paire, elle est intégrable sur \mathbb{R} .

• fg est continue sur \mathbb{R} (comme produit de fonctions de \mathcal{E} , donc continues).

Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $|(fg)(y)| \leq (A+B)\exp(-y^2/b)$. Or $y \mapsto (A+B)\exp(-y^2/b)$ est intégrable sur \mathbb{R} (cf. point précédent), donc, par comparaison, fg est intégrable sur \mathbb{R} .

8. Pour tout $(f, g) \in \mathcal{E}^2$, fg est intégrable sur \mathbb{R} , donc $(f|g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(y)dy$ est bien défini.

(a) • Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f^2(y) \geq 0$.

D'où, par positivité de l'intégrale convergente (" $-\infty \leq +\infty$ "), on a :

$$(f|f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(y)dy \geq 0.$$

• Soit $f \in \mathcal{E}$ telle que $(f|f) = 0$.

Comme f^2 est continue et positive sur \mathbb{R} , $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(y)dy$ converge et vaut 0 et " $-\infty \neq +\infty$ ", on a $f^2(y) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, donc $f(y) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

• Le caractère bilinéaire symétrique étant évident, $(\cdot|\cdot)$ définit donc un produit scalaire sur \mathcal{E} .

On sera potentiellement amené à utiliser ce résultat par la suite.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

Pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\tau_x(\gamma_\lambda)(y) = \gamma_\lambda(y-x) = \exp(-(y-x)^2/\lambda).$$

$\tau_x(\gamma_\lambda)$ est donc continues sur \mathbb{R} par opérations sur les fonctions usuelles.

De plus, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \tau_x(\gamma_\lambda)(y) &= \exp(-(y-x)^2/\lambda) = \exp\left(-\frac{y^2 - 2xy + x^2}{\lambda}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{y^2}{2\lambda}\right) \exp\left(-\frac{y^2 - 4xy + 2x^2}{2\lambda}\right). \end{aligned}$$

Or $h_x : y \mapsto y^2 - 4xy + 2x^2$ est un trinôme en y , qui atteint son minimum en $y = 2x$, et $h_x(2x) = 4x^2$, donc, par décroissance de la fonction $y \mapsto \exp(-y)$ sur \mathbb{R} , on a, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\exp\left(-\frac{y^2 - 4xy + 2x^2}{2\lambda}\right) = \exp\left(-\frac{h_x(y)}{2\lambda}\right) \leq \exp\left(-\frac{2x^2}{\lambda}\right) \leq 1,$$

donc, en posant $A = 1 > 0$ et $a = 2\lambda > 0$, on a, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\tau_x(\gamma_\lambda)(y) = \exp\left(-\frac{y^2}{2\lambda}\right) \exp\left(-\frac{y^2 - 4xy + 2x^2}{2\lambda}\right) \leq A \exp(-y^2/a).$$

• On a donc bien $\tau_x(\gamma_\lambda) \in \mathcal{E}$.

9. (a) Soit $a > 0$.

• $y \mapsto \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) = \tau_x(\gamma_\lambda)(y) \in \mathcal{E}$ et $y \mapsto \exp(-y^2/a) \in \mathcal{E}$ (car continue sur \mathbb{R} , et en prenant $A = 1$), donc,

d'après la question 7, $y \mapsto \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) \exp\left(-\frac{y^2}{a}\right)$ est intégrable sur \mathbb{R} .

En particulier, $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) \exp\left(-\frac{y^2}{a}\right) dy$ converge.

• Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{(y-x)^2}{\lambda} + \frac{y^2}{a} = \frac{a(y-x)^2 + \lambda y^2}{a\lambda} = \frac{(a+\lambda)y^2 - 2ax + ax^2}{a\lambda}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{a+\lambda}{a\lambda} \left(y - \frac{ax}{a+\lambda}\right)^2 + \frac{x^2}{a+\lambda} &= \frac{1}{a\lambda(a+\lambda)} ((a+\lambda)y - ax)^2 + \frac{a\lambda x^2}{a\lambda(a+\lambda)} \\ &= \frac{(a+\lambda)^2 y^2 - 2a(a+\lambda)x + a^2 x^2 + a\lambda x^2}{a\lambda(a+\lambda)} \\ &= \frac{(a+\lambda)^2 y^2 - 2a(a+\lambda)x + a(a+\lambda)x^2}{a\lambda(a+\lambda)} \\ &= \frac{(a+\lambda)y^2 - 2ax + ax^2}{a\lambda}, \end{aligned}$$

donc on a bien

$$\frac{(y-x)^2}{\lambda} + \frac{y^2}{a} = \frac{a+\lambda}{a\lambda} \left(y - \frac{ax}{a+\lambda}\right)^2 + \frac{x^2}{a+\lambda}.$$

- Par suite, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) \exp\left(-\frac{y^2}{a}\right) dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\left(\frac{(y-x)^2}{\lambda} + \frac{y^2}{a}\right)\right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\left(\frac{a+\lambda}{a\lambda}\left(y - \frac{ax}{a+\lambda}\right)^2 + \frac{x^2}{a+\lambda}\right)\right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{a+\lambda}{a\lambda}\left(y - \frac{ax}{a+\lambda}\right)^2\right) \exp\left(-\frac{x^2}{a+\lambda}\right) dy \\ &= \exp\left(-\frac{x^2}{a+\lambda}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{a+\lambda}{a\lambda}\left(y - \frac{ax}{a+\lambda}\right)^2\right) dy. \end{aligned}$$

Posons le changement de variable $u = y - \frac{ax}{a+\lambda}$.

Ce changement de variable est de classe \mathcal{C}^1 strictement croissant et réalise une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

On a $du = dy$.

De plus, $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{a+\lambda}{a\lambda}\left(y - \frac{ax}{a+\lambda}\right)^2\right) dy$ converge, donc, par changement de variable, $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{a+\lambda}{a\lambda}u^2\right) du$ converge et

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) \exp\left(-\frac{y^2}{a}\right) dy &= \exp\left(-\frac{x^2}{a+\lambda}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{a+\lambda}{a\lambda}\left(y - \frac{ax}{a+\lambda}\right)^2\right) dy \\ &= \exp\left(-\frac{x^2}{a+\lambda}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{a+\lambda}{a\lambda}u^2\right) du. \end{aligned}$$

En posant $c = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{a+\lambda}{a\lambda}u^2\right) du$, constante par rapport à x , on a bien la propriété demandée.

(b) Soit $g \in \mathcal{E}$.

- Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g \in \mathcal{E}$ et $\tau_x(\gamma_\lambda) \in \mathcal{E}$, $C(g)(x) = (\tau_x(\gamma_\lambda)|g)$ est bien définie, donc $C(g)$ est définie sur \mathbb{R} .
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$C(g)(x) = (\tau_x(\gamma_\lambda)|g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) g(y) dy.$$

- Posons $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) g(y)$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y \mapsto f(x, y)$ est continue (par morceaux) sur \mathbb{R} .
- Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x, y)$ est continue sur \mathbb{R} .
- Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} |f(x, y)| &= \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) |g(y)| \\ &\leq \exp\left(-\frac{y^2}{2\lambda}\right) |g(y)| \quad (\text{majoration prouvée en 8b}) \\ &= \varphi(y) \end{aligned}$$

où φ est intégrable sur \mathbb{R} comme produit de deux éléments de \mathcal{E} (d'après 7).

D'où, d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, $x \mapsto C(g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$ est continue sur \mathbb{R} .

- Comme $g \in \mathcal{E}$, il existe $(a, A) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $|g(y)| \leq A \exp(-y^2/a)$.

Par l'inégalité triangulaire généralisée et par positivité de l'intégrale, on a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |C(g)(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) g(y) dy \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) |g(y)| dy \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) A \exp(-y^2/a) dy \\ &= A \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) \exp(-y^2/a) dy \\ &\leq Ac \exp\left(-\frac{x^2}{a+\lambda}\right) \end{aligned}$$

où c a été introduit à la question 9a, indépendant de x .

Par suite, en prenant $B = Ac > 0$ et $b = a + \lambda > 0$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|C(g)(x)| \leq B \exp(-x^2/b).$$

• On a donc bien $C(g) \in \mathcal{E}$.

(c) Pour tout $g, h \in \mathcal{E}$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} C(\alpha g + h)(x) &= (\tau_x(\gamma_\lambda)|\alpha g + h) \\ &= \alpha(\tau_x(\gamma_\lambda)|g) + (\tau_x(\gamma_\lambda)|h) \quad (\text{par linéarité à droite du produit scalaire, cf question 8a}) \\ &= \alpha C(g)(x) + C(h)(x), \end{aligned}$$

donc $C(\alpha g + h) = \alpha C(g) + C(h)$, donc C est linéaire.

Comme de plus $C : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ d'après la question précédente, C est bien un endomorphisme de \mathcal{E} .

PARTIE IV

10. Par définition, \mathcal{G} est l'ensemble des combinaison linéaires des éléments de la famille $(\tau_x(\gamma_\lambda))_{x \in \mathbb{R}}$, donc

$$\mathcal{G} = \text{Vect}((\tau_x(\gamma_\lambda))_{x \in \mathbb{R}})$$

est le plus petit sous-espace vectoriel de \mathcal{E} qui contient toutes les fonctions $\tau_x(\gamma_\lambda)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

11. (a) Pour tout $(x, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (\tau_x(\gamma_\lambda)|\tau_{x'}(\gamma_\lambda)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) \exp\left(-\frac{(y-x')^2}{\lambda}\right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2 + (y-x')^2}{\lambda}\right) dy. \end{aligned}$$

Or, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\frac{(y-x)^2 + (y-x')^2}{\lambda} = \frac{2y^2 + x^2 + x'^2 - 2xy - 2x'y}{\lambda}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{2}{\lambda}(y - (x+x')/2)^2 + \frac{1}{2\lambda}(x' - x)^2 &= \frac{1}{2\lambda}((2y - (x+x'))^2 + (x' - x)^2) \\ &= \frac{1}{2\lambda}(4y^2 + x^2 + x'^2 + 2xx' - 4yx - 4yx' + x'^2 + x^2 - 2xx') \\ &= \frac{1}{2\lambda}(4y^2 + 2x^2 + 2x'^2 - 4yx - 4yx') \\ &= \frac{2y^2 + x^2 + x'^2 - 2xy - 2x'y}{\lambda}, \end{aligned}$$

donc

$$\frac{(y-x)^2 + (y-x')^2}{\lambda} = \frac{2}{\lambda}(y - (x+x')/2)^2 + \frac{1}{2\lambda}(x' - x)^2$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} (\tau_x(\gamma_\lambda)|\tau_{x'}(\gamma_\lambda)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2 + (y-x')^2}{\lambda}\right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{2}{\lambda}(y - (x+x')/2)^2 - \frac{1}{2\lambda}(x' - x)^2\right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{2}{\lambda}(y - (x+x')/2)^2\right) \exp\left(-\frac{1}{2\lambda}(x' - x)^2\right) dy \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2\lambda}(x' - x)^2\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{2}{\lambda}(y - (x+x')/2)^2\right) dy. \end{aligned}$$

En posant le changement de variable $u = y - (x+x')/2$, on obtient alors, comme dans la question 9a,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{2}{\lambda}(y - (x+x')/2)^2\right) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{2}{\lambda}u^2\right) dy = c_\lambda,$$

constante indépendante de x et x' .

Comme de plus on a

$$\exp\left(-\frac{1}{2\lambda}(x' - x)^2\right) = \exp\left(-\frac{1}{2\lambda}(x - x')^2\right) = \gamma_{2\lambda}(x - x'),$$

on a bien montré l'existence d'une constante c_λ indépendante de x et x' telle que pour tout $(x, x') \in \mathbb{R}^2$,

$$(\tau_x(\gamma_\lambda)|\tau_{x'}(\gamma_\lambda)) = c_\lambda \gamma_{2\lambda}(x - x').$$

- (b) • Soit $x \in \mathbb{R}$.
Pour tout $x' \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} C(\tau_x(\gamma_\lambda))(x') &= (\tau_{x'}(\gamma_\lambda)|\tau_x(\gamma_\lambda)) \quad (\text{par définition de } C) \\ &= c_\lambda \gamma_{2\lambda}(x' - x) \quad (\text{d'après la question précédente, en inversant les rôles de } x \text{ et } x') \\ &= c_\lambda \tau_x(\gamma_{2\lambda})(x'), \end{aligned}$$

donc on a bien $C(\tau_x(\gamma_\lambda)) = c_\lambda \tau_x(\gamma_{2\lambda})$. • Comme $(\tau_x(\gamma_\lambda))_{x \in \mathbb{R}}$ est une famille génératrice de \mathcal{G} et comme C est linéaire, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= C(\mathcal{G}) = \text{Vect}((C(\tau_x(\gamma_\lambda)))_{x \in \mathbb{R}}) \\ &= \text{Vect}((\tau_x(\gamma_{2\lambda}))_{x \in \mathbb{R}}) \quad (\text{d'après le premier point de cette question}) \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) \mid n \in \mathbb{N}^*, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket (x_i, \alpha_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \right\} \quad (\text{par définition d'un Vect}). \end{aligned}$$

12. (a) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que, "si $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille de n réels deux à deux distincts, alors $\sum_{i=1}^n \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})$ est nulle si et seulement si $\alpha_i = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$ " (HR_n). **Initialisation** : pour $n = 1$, si $\alpha_1 \tau_{x_1}(\gamma_{2\lambda}) = 0$, alors, en particulier, pour $y = x_1$, on a

$$0 = \alpha_1 \tau_{x_1}(\gamma_{2\lambda}) = \alpha_1 \exp(0) = \alpha_1.$$

On a donc bien HR_1 .

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons HR_n vérifiée.

Soit alors $(x_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ est une famille de $n+1$ réels deux à deux distincts.

Supposons que $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) = 0$. On a alors, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \exp\left(-\frac{(y-x_i)^2}{2\lambda}\right) = 0.$$

Supposons, quitte à renommer les variables, que la famille (x_i) est classée par ordre croissant.

Alors, en multipliant l'égalité précédente par $\exp\left(\frac{(y-x_{n+1})^2}{2\lambda}\right)$, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \exp\left(\frac{(y-x_{n+1})^2 - (y-x_i)^2}{2\lambda}\right) = 0,$$

ie

$$\alpha_{n+1} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \exp\left(\frac{2y(x_i - x_{n+1}) + x_{n+1}^2 - x_i^2}{2\lambda}\right) = 0.$$

Comme $x_i - x_{n+1} < 0$ (car les x_i sont deux à deux distincts et classés par ordre croissant), on a

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{2y(x_i - x_{n+1}) + x_{n+1}^2 - x_i^2}{2\lambda}\right) = 0,$$

donc, en passant à la limite (et comme la somme est finie), on obtient, par unicité de la limite,

$$\alpha_{n+1} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \times 0 = 0, \quad \text{donc} \quad \alpha_{n+1} = 0.$$

On a alors $\sum_{i=1}^n \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) = 0$, avec les x_i deux à deux distincts, donc, d'après HR_n , $\alpha_i = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

On a donc bien $\alpha_i = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, et on a donc bien établi HR_{n+1} .

Conclusion : D'où, par récurrence, la propriété demandée.

- (b) • La famille $(\tau_x(\gamma_{2\lambda}))_{x \in \mathbb{R}}$ est donc libre (car toute sous-famille finie est libre) et génératrice de \mathcal{H} , donc c'est une base de \mathcal{H} .
• De même qu'à la question précédente (en remplaçant 2λ par λ), on peut montrer que toute sous-famille finie de $(\tau_x(\gamma_\lambda))_{x \in \mathbb{R}}$ est libre, et donc que la famille $(\tau_x(\gamma_\lambda))_{x \in \mathbb{R}}$ est libre.
De plus, elle est génératrice de \mathcal{G} , donc c'est une base de \mathcal{G} .
• Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $C(\tau_x(\gamma_\lambda)) = c_\lambda \tau_x(\gamma_{2\lambda})$, avec $c_\lambda \neq 0$, C transforme une base de \mathcal{G} en une base de \mathcal{H} , donc réalise une bijection de \mathcal{G} sur \mathcal{H} .
• Ceci assure l'existence d'une unique application linéaire $D : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$ telle que $D \circ C(g) = g$ pour tout $g \in \mathcal{G}$ et $C \circ D(h) = h$ pour tout $h \in \mathcal{H}$ et on a $D = C^{-1}$.
Rq : On avait déjà le caractère surjectif de C par définition de $\mathcal{H} = C(\mathcal{G})$.

On aurait alors pu montrer le caractère injectif en écrivant : Soit $g = \sum_{i=1}^n \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_\lambda) \in \text{Ker } C$, où les x_i sont deux à deux distincts (quitte à regrouper deux termes de la somme dépendant du même x_i).

Alors $C(g) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) = 0$, donc $\alpha_i = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, donc $g = 0$.

Il ne reste plus alors qu'à conclure de la même façon, car on a alors prouvé que $C : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ est bijective.

(c) Pour tout $h \in \mathcal{H}$, $h = (C \circ D)(h) = C(D(h))$, donc, par définition de C , pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h(x) = C(D(h))(x) = (\tau_x(\gamma_\lambda)|D(h)).$$

13. (a) Remarquons que, pour tout $h \in \mathcal{H}$, $D(h) \in \mathcal{G} \subset \mathcal{E}$ (où la dernière inclusion vient du fait que \mathcal{G} est engendré par des éléments de \mathcal{E}).

• Pour tout $(h_1, h_2, h_3) \in \mathcal{H}^3$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (\alpha h_1 + h_2|h_3)_{\mathcal{H}} &= c_\lambda(D(\alpha h_1 + h_2)|D(h_3)) \\ &= c_\lambda(\alpha D(h_1) + D(h_2)|D(h_3)) \quad (\text{par linéarité de } D) \\ &= \alpha c_\lambda(D(h_1)|D(h_3)) + c_\lambda(D(h_2)|D(h_3)) \quad (\text{par linéarité à gauche de } (.|), \text{ qui est un produit scalaire d'ailleurs}) \\ &= \alpha(h_1|h_3)_{\mathcal{H}} + (h_2|h_3)_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

donc $(.|)_{\mathcal{H}}$ est linéaire à gauche.

• $(.|)_{\mathcal{H}}$ est symétrique par symétrie de $(.|)$.

• $(.|)_{\mathcal{H}}$ est linéaire à gauche et symétrique, donc bilinéaire.

• Pour tout $h \in \mathcal{H}$, $(h|h)_{\mathcal{H}} = \underbrace{c_\lambda(D(h)|D(h))}_{\geq 0} \geq 0$, avec égalité si et seulement si $(D(h)|D(h)) = 0 \Leftrightarrow D(h) = 0$ (car

$(.|)$ est un produit scalaire), donc, comme D est une bijection, si et seulement si $h = 0$.

$(.|)_{\mathcal{H}}$ est donc défini positif.

• $(.|)_{\mathcal{H}}$ est donc bien un produit scalaire sur \mathcal{H} .

(b) Comme $C(\tau_x(\gamma_\lambda)) = c_\lambda \tau_x(\gamma_{2\lambda})$, on a

$$D \circ C(\tau_x(\gamma_\lambda)) = D(c_\lambda \tau_x(\gamma_{2\lambda})) = c_\lambda D(\tau_x(\gamma_{2\lambda})),$$

$$\text{donc } D(\tau_x(\gamma_{2\lambda})) = \frac{1}{c_\lambda} D \circ C(\tau_x(\gamma_\lambda)) = \frac{1}{c_\lambda} \tau_x(\gamma_\lambda).$$

Par suite, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (\tau_x(\gamma_{2\lambda})|h)_{\mathcal{H}} &= c_\lambda(D(\tau_x(\gamma_{2\lambda}))|D(h)) \quad (\text{par définition de } (.|)_{\mathcal{H}}) \\ &= (c_\lambda D(\tau_x(\gamma_{2\lambda}))|D(h)) \quad (\text{par linéarité à gauche de } (.|)) \\ &= (\tau_x(\gamma_\lambda)|D(h)) \quad (\text{d'après le calcul préliminaire de cette question}) \\ &= h(x) \quad (\text{d'après la question 12c}). \end{aligned}$$

(c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |h(x)| &= |(\tau_x(\gamma_{2\lambda})|h)_{\mathcal{H}}| \\ &\leq \|\tau_x(\gamma_{2\lambda})\|_{\mathcal{H}} \|h\|_{\mathcal{H}} \quad (\text{d'après Cauchy-Schwartz}). \end{aligned}$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \|\tau_x(\gamma_{2\lambda})\|_{\mathcal{H}}^2 &= (\tau_x(\gamma_{2\lambda})|\tau_x(\gamma_{2\lambda}))_{\mathcal{H}} \\ &= c_\lambda(D(\tau_x(\gamma_{2\lambda}))|D(\tau_x(\gamma_{2\lambda}))) \quad (\text{par définition de } (.|)_{\mathcal{H}}) \\ &= \frac{1}{c_\lambda} (\tau_x(\gamma_\lambda)|\tau_x(\gamma_\lambda)) \quad (\text{d'après le calcul fait au début de la question précédente}) \\ &= \frac{1}{c_\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) dy \\ &= \frac{1}{c_\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{2(y-x)^2}{\lambda}\right) dy \\ &= \frac{1}{c_\lambda} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{2u^2}{\lambda}\right) du}_{=c_\lambda} \quad (\text{en posant } u = y - x. \text{ Toutes les hypothèses sont vérifiées}) \\ &= 1, \end{aligned}$$

donc on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|h(x)| \leq \|\tau_x(\gamma_{2\lambda})\|_{\mathcal{H}} \|h\|_{\mathcal{H}} \leq \|h\|_{\mathcal{H}},$$

ie $\|h\|_\infty \leq \|h\|_{\mathcal{H}}$.

PARTIE V

14. • Si tous les a_i sont nuls, alors $J_* = 0$, atteint uniquement pour $h = 0$.

En effet, on a $J_* \geq 0$ comme minimum de nombres positifs, et, pour $h = 0$, $J(0) = 0$, donc $J_* \leq J(0) \leq 0$, et, par suite, $J_* = 0$.

On a alors $J(j) = J_* \Leftrightarrow \|h\|_{\mathcal{H}} = 0 \Leftrightarrow h = 0$ (hypothèse de séparation pour une norme).

- Supposons à présent qu'au moins un des a_i est non nul, et, quitte à les renommer, on supposera que $a_1 \neq 0$.

Supposons que \mathcal{S}_* possède au moins deux éléments distincts g et h . Alors, $j = \frac{g+h}{2} \in \mathcal{S}$ car $j \in \mathcal{H}$ (comme combinaison

linéaire d'éléments de \mathcal{H}) et pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $j(x_i) = \frac{g(x_i) + h(x_i)}{2} = \frac{a_i + a_i}{2} = a_i$.

De plus,

$$\begin{aligned} J(j) &= \frac{1}{2} \|j\|_{\mathcal{H}}^2 = \frac{1}{8} \|g+h\|_{\mathcal{H}}^2 = \frac{1}{8} (\|g\|_{\mathcal{H}}^2 + \|g\|_{\mathcal{H}}^2 + 2(g|h)_{\mathcal{H}}) \\ &= \frac{1}{8} (2J_* + 2J_* + 2(g|h)_{\mathcal{H}}) \quad (\text{par choix de } g \text{ et } h) \\ &= \frac{1}{2} J_* + \frac{1}{4} (g|h)_{\mathcal{H}} \\ &\leq \frac{1}{2} J_* + \frac{1}{4} \|g\|_{\mathcal{H}} \|h\|_{\mathcal{H}} \quad (\text{d'après Cauchy-Schwartz}) \\ &= \frac{1}{2} J_* + \frac{1}{4} 2J_* \quad (\text{toujours par choix de } g \text{ et } h) \\ &= J_* \end{aligned}$$

Or, par définition de J_* , on a aussi $J(j) \geq J_*$, donc on a égalité, et, par suite, on est dans le cas d'égalité de Cauchy-Schwartz, donc (g, h) est liée, donc, quitte à inverser g et h , il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $g = \mu h$.

Enfin, $g(x_1) = a_1 = \mu h(x_1) = \mu a_1$, donc, comme $a_1 \neq 0$, on a $\mu = 1$, et, par suite, $g = h$, ce qui est exclu.

D'où, par l'absurde, \mathcal{S}_* possède bien au plus un élément dans ce cas.

15. Pour tout $h_0 \in \mathcal{H}_0$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\tilde{h} + th_0 \in \mathcal{S}$ car

— $\tilde{h} + th_0 \in \mathcal{H}$ comme combinaison linéaire d'éléments de \mathcal{H}

— pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$,

$$(\tilde{h} + th_0)(x_i) = \tilde{h}(x_i) + th_0(x_i) = a_i + t \times 0 = a_i.$$

De plus, par définition de \tilde{h} , on a $J(\tilde{h} + th_0) \geq J(\tilde{h})$, ie $\|\tilde{h} + th_0\|_{\mathcal{H}}^2 \geq \|\tilde{h}\|_{\mathcal{H}}^2$.

Or

$$\|\tilde{h} + th_0\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\tilde{h}\|_{\mathcal{H}}^2 + 2t(\tilde{h}|h_0)_{\mathcal{H}} + t^2 \|h_0\|_{\mathcal{H}}^2,$$

donc

$$\|\tilde{h} + th_0\|_{\mathcal{H}}^2 \geq \|\tilde{h}\|_{\mathcal{H}}^2 \Leftrightarrow 2t(\tilde{h}|h_0)_{\mathcal{H}} + t^2 \|h_0\|_{\mathcal{H}}^2 \geq 0.$$

Si $(\tilde{h}|h_0)_{\mathcal{H}} \neq 0$, alors

$$2t(\tilde{h}|h_0)_{\mathcal{H}} + t^2 \|h_0\|_{\mathcal{H}}^2 \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 2t(\tilde{h}|h_0)_{\mathcal{H}},$$

donc est du signe de $(\tilde{h}|h_0)_{\mathcal{H}}$ en 0^+ et de $-(\tilde{h}|h_0)_{\mathcal{H}}$ en 0^- .

Comme cette quantité doit être toujours positive, c'est exclu, donc $(\tilde{h}|h_0)_{\mathcal{H}} = 0$.

16. (a) • Soit $h \in \mathcal{S}_*$. Alors $h \in \mathcal{S}$ par définition de \mathcal{S}_* et $h \in \mathcal{H}_0^\perp$ d'après la question précédente, donc $h \in \mathcal{S} \cap \mathcal{H}_0^\perp$.

On a donc $\mathcal{S}_* \subset \mathcal{S} \cap \mathcal{H}_0^\perp$.

- Soit $h \in \mathcal{S} \cap \mathcal{H}_0^\perp$.

Alors, pour tout $g \in \mathcal{S}$, $h - g \in \mathcal{H}_0$ car pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $(g - h)(x_i) = g(x_i) - h(x_i) = a_i - a_i = 0$.

On a donc

$$\begin{aligned} \|g\|_{\mathcal{H}}^2 &= \|h + (g - h)\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &= \|h\|_{\mathcal{H}}^2 + \|g - h\|_{\mathcal{H}}^2 + 2 \underbrace{(h, g - h)_{\mathcal{H}}}_{=0} \quad (\text{car } g - h \in \mathcal{H}_0 \text{ et } h \in \mathcal{H}_0^\perp) \\ &= \|h\|_{\mathcal{H}}^2 + \|g - h\|_{\mathcal{H}}^2 \geq \|h\|_{\mathcal{H}}^2, \end{aligned}$$

donc

$$J_* = \inf_{g \in \mathcal{H}} J(g) = \inf_{g \in \mathcal{H}} \frac{1}{2} \|g\|_{\mathcal{H}}^2 \geq \frac{1}{2} \|h\|_{\mathcal{H}}^2 = J(h),$$

et, comme par ailleurs $J_* = \inf_{g \in \mathcal{H}} J(g) \leq J(h)$, on a $J_* = J(h)$ et $h \in \mathcal{S}_*$.

On a donc $\mathcal{S} \cap \mathcal{H}_0^\perp \subset \mathcal{S}_*$.

- Par double inclusion, on a bien l'égalité : $\mathcal{S}_* = \mathcal{S} \cap \mathcal{H}_0^\perp$.

- (b) Soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$.
Pour tout $h_0 \in \mathcal{H}_0$,

$$\begin{aligned} (\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})|h_0)_{\mathcal{H}} &= h_0(x_i) \quad (\text{d'après la question 13b avec } h_0 \in \mathcal{H}) \\ &= 0 \quad (\text{par définition de } \mathcal{H}_0), \end{aligned}$$

donc $\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) \in \mathcal{H}_0^\perp$ (on a bien $\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) \in \mathcal{H}$). Par suite, $\text{Vect}((\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}))_{1 \leq i \leq p}) \subset \mathcal{H}_0^\perp$ comme sous-espace vectoriel engendré par des éléments de \mathcal{H}_0^\perp .

17. (a) h_α est une interpolante si et seulement si pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $h_\alpha(x_i) = a_i$.
Or, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$,

$$\begin{aligned} a_i = h_\alpha(x_i) &= \sum_{j=1}^p \alpha_j \tau_{x_j}(\gamma_{2\lambda})(x_i) \\ &= \sum_{j=1}^p \alpha_j \exp\left(-\frac{(x_i - x_j)^2}{2\lambda}\right) \\ &= \sum_{j=1}^p K_{ij} \alpha_j \quad (\text{par définition de } K, \text{ en dimension } d = 1, \text{ car } |x_i - x_j|^2 = (x_i - x_j)^2) \\ &= (K\alpha)_i \end{aligned}$$

donc on a bien $K\alpha = a$.

- (b) Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$,

$$K_{ij} = \exp\left(-\frac{(x_i - x_j)^2}{2\lambda}\right) = \tau_{x_j}(\gamma_{2\lambda})(x_i) = (\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})|\tau_{x_j}(\gamma_{2\lambda}))_{\mathcal{H}}$$

d'après la question 13b.

Notons (C_1, \dots, C_p) les colonnes de K .

Soit $(\beta_1, \dots, \beta_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\sum_{j=1}^p \beta_j C_j = 0$.

Alors, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p \beta_j K_{ij} = 0 &\Rightarrow \sum_{i=1}^p \beta_j (\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})|\tau_{x_j}(\gamma_{2\lambda}))_{\mathcal{H}} = 0 \\ &\Rightarrow \left(\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) \left| \sum_{j=1}^p \tau_{x_j}(\gamma_{2\lambda}) \right. \right)_{\mathcal{H}} = 0 \quad (\text{par linéarité à droite du produit scalaire}). \end{aligned}$$

Par suite,

$$\underbrace{\sum_{i=1}^p \beta_i \left(\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) \left| \sum_{j=1}^p \tau_{x_j}(\gamma_{2\lambda}) \right. \right)_{\mathcal{H}}}_{=0} = 0,$$

donc, par linéarité à droite du produit scalaire,

$$\left(\sum_{i=1}^p \beta_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) \left| \sum_{j=1}^p \tau_{x_j}(\gamma_{2\lambda}) \right. \right)_{\mathcal{H}} = 0, \quad \text{ie} \quad \left\| \sum_{i=1}^p \beta_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) \right\|_{\mathcal{H}}^2 = 0.$$

On a donc $\sum_{i=1}^p \beta_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) = 0$, donc, comme la famille $(\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}))_{1 \leq i \leq p}$ est libre (d'après la question 12a) on a $\beta_i = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

La famille (C_1, \dots, C_p) est donc libre, ce qui assure l'inversibilité de la matrice carrée K .

Rq : Les écritures sont lourdes ici, mais, ce qu'on vient de montrer, c'est que si la famille $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ est libre, alors la matrice $(\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$ est inversible.

18. • Comme K est inversible, $K\alpha = a \Leftrightarrow \alpha = K^{-1}a$.

Par suite, en posant $\alpha_* = K^{-1}a$, on a h_{α_*} interpolante, ie $h_{\alpha_*} \in \mathcal{S}$.

De plus, $h_{\alpha_*} \in \text{Vect}((\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}))_{1 \leq i \leq p}) \subset \mathcal{H}_0^\perp$. On a donc $h_{\alpha_*} \in \mathcal{S} \cap \mathcal{H}_0^\perp = \mathcal{S}_*$.

• Comme \mathcal{S}_* contient au plus un élément (d'après la question 14), on a donc $\mathcal{S}_* = \{h_{\alpha_*}\}$.

• De plus, $J_* = \frac{1}{2} \|h_*\|_{\mathcal{H}}$.

Or, en notant $\alpha_* = (\alpha_1^*, \dots, \alpha_p^*)$, on a

$$\begin{aligned}
\|h_*\|_{\mathcal{H}}^2 &= \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i^* \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) \middle| \sum_{i=1}^p \alpha_i^* \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) \right)_{\mathcal{H}} \\
&= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \alpha_i^* \alpha_j^* (\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) | \tau_{x_j}(\gamma_{2\lambda}))_{\mathcal{H}} \\
&= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \alpha_i^* \alpha_j^* K_{ij} \quad (\text{d'après les calculs faits au début de la question précédente}) \\
&= \sum_{i=1}^p \left(\alpha_i^* \sum_{j=1}^p K_{ij} \alpha_j^* \right) \\
&= \sum_{i=1}^p (\alpha_i^* (K \alpha_*)_i) \\
&= \alpha_*^T (K \alpha_*) = (K^{-1} a)^T K K^{-1} a = a^T (K^{-1})^T a,
\end{aligned}$$

donc

$$J_* = \frac{1}{2} \|h_{\alpha_*}\|_{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \sqrt{a^T (K^{-1})^T a}.$$