

UN CORRIGÉ du SUJET MINES-PONTS, MATH-2-PC, 2022

PARTIE 1. Norme d'opérateur sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

1. • L'application $\begin{cases} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ X & \mapsto \|X\| \end{cases}$ est continue car elle est 1-lipschitzienne.

L'application $\begin{cases} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) & \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \\ X & \mapsto MX \end{cases}$ est continue car elle est linéaire en dimension finie.

Par composition, l'application $f : \begin{cases} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ X & \mapsto \|MX\| \end{cases}$ est continue.

La sphère-unité Σ_n est une partie fermée bornée de l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Elle est en effet fermée grâce à la continuité de $X \mapsto \|X\|$ mentionnée ci-dessus. Du théorème des bornes atteintes, on déduit l'existence de

$$\|M\|_{\text{op}} = \max_{\Sigma_n} f = \max_{X \in \Sigma_n} \|MX\| = \max_{\|X\|=1} \|MX\|.$$

• Si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$, posons $Y = \frac{X}{\|X\|}$, alors $Y \in \Sigma_n$ donc $\|MY\| \leq \|M\|_{\text{op}}$.

Mais $MY = \frac{MX}{\|X\|}$ donc $\|MY\| = \frac{\|MX\|}{\|X\|}$, on a donc $\frac{\|MX\|}{\|X\|} \leq \|M\|_{\text{op}}$.

Ainsi, $\|M\|_{\text{op}}$ est un majorant de l'ensemble $\left\{ \frac{\|MX\|}{\|X\|} ; X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\} \right\}$.

D'autre part, par définition de $\|M\|_{\text{op}}$, il existe $X_0 \in \Sigma_n$ tel que $\|MX_0\| = \|M\|_{\text{op}}$. On a alors $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ et $\frac{\|MX_0\|}{\|X_0\|} = \|M\|_{\text{op}}$. Ce majorant est donc atteint, donc

$$\|M\|_{\text{op}} = \max \left\{ \frac{\|MX\|}{\|X\|} ; X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\} \right\}.$$

• On a donc $\|MX\| \leq \|M\|_{\text{op}} \|X\|$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Donc

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \quad \|M'MX\| \leq \|M'\|_{\text{op}} \|MX\| \leq \|M'\|_{\text{op}} \|M\|_{\text{op}} \|X\|.$$

Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$, on a donc $\frac{\|M'MX\|}{\|X\|} \leq \|M'\|_{\text{op}} \|M\|_{\text{op}}$. De la définition d'un maximum, on déduit que $\|M'M\|_{\text{op}} \leq \|M'\|_{\text{op}} \|M\|_{\text{op}}$.

2. • On connaît les produits scalaires et l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cadre des espaces préhilbertiens réels, on s'y ramène facilement en écrivant que, avec $U = (u_1 \ \dots \ u_n)^T$ et $V = (v_1 \ \dots \ v_n)^T$ appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, alors

$$|V^T U| = \left| \sum_{k=1}^n u_k v_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |u_k| |v_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |u_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n |v_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|U\| \|V\|.$$

Donc, si $V \in \Sigma_n$, on a $|V^T U| \leq \|U\|$. Puis,

- si $U = 0$, alors clairement $\max \left\{ |V^T U| ; V \in \Sigma_n \right\} = 0 = \|U\|$;

- sinon, en choisissant $V_0 = \frac{\overline{U}}{\|U\|} \in \Sigma_n$, on a

$$|V_0^T U| = \frac{|\overline{U}^T U|}{\|U\|} = \frac{\|U\|^2}{\|U\|} = \|U\|,$$

le majorant obtenu est donc atteint, donc $\max \left\{ |V^T U| ; V \in \Sigma_n \right\} = \|U\|$.

- D'abord, si $(X, Y) \in \Sigma_n^2$, on a $|X^T M Y| \leq \|M Y\| \leq \|M\|_{\text{op}} \|Y\| = \|M\|_{\text{op}}$. Puis,
 - si $M = 0$, l'inégalité demandée est triviale ;
 - sinon, soit $Y_0 \in \Sigma_n$ tel que $\|M Y_0\| = \|M\|_{\text{op}} > 0$, choisissons $X_0 = \frac{\overline{M Y_0}}{\|M Y_0\|}$, alors $X_0 \in \Sigma_n$ et

$$|X_0^T M Y_0| = \left| \frac{(\overline{M Y_0})^T M Y_0}{\|M Y_0\|} \right| = \frac{\|M Y_0\|^2}{\|M Y_0\|} = \|M Y_0\| = \|M\|_{\text{op}},$$

on conclut donc que $\max \left\{ |X^T M Y| ; (X, Y) \in \Sigma_n \times \Sigma_n \right\} = \|M\|_{\text{op}}$.

Remarque. Si $(X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}))^2$, on a $|X^T M Y| \leq \|M\|_{\text{op}} \|X\| \|Y\|$.

PARTIE 2. L'ensemble \mathcal{B}_n

3. • Si $M \in \mathcal{B}_n$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, alors

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \|M^k X\| \leq \|M^k\|_{\text{op}} \|X\| \leq b(M) \|X\|,$$

la suite $(\|M^k X\|)_{k \in \mathbb{N}}$ est donc bornée.

- Si $X \neq 0$ et $M X = \lambda X$, classiquement $M^k X = \lambda^k X$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- Soit $M \in \mathcal{B}_n$, soit $\lambda \in \sigma(M)$, soit X un vecteur propre associé. Alors la suite de terme général $\|M^k X\| = \|\lambda^k X\| = |\lambda|^k \|X\|$ doit être bornée, ce qui implique $|\lambda| \leq 1$. On a donc l'inclusion $\sigma(M) \subset \mathbb{D}$.

4. Considérons $M = I_n + E_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & 0 & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ (0) & & & \ddots & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Cette matrice est triangulaire

supérieure avec $\sigma(M) = \{1\} \subset \mathbb{D}$. Mais on calcule facilement $M^k = I_n + k E_{1,2}$, et en prenant $X = E_2$ (deuxième vecteur de la base canonique de \mathbb{C}^n), on a $M^k X = k E_1 + E_2$, donc $\|M^k X\| = \sqrt{k^2 + 1} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty$. La suite $(\|M^k E_2\|)_{k \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée, on déduit alors de la question 3. que $M \notin \mathcal{B}_n$.

PARTIE 3. Résolvante d'un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

5. • Soit $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonale, alors $\sigma(M) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ (non nécessairement distincts), et $\chi_D = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$. Si $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(D)$, alors $z I_n - D$ est inversible et

$$R_z(D) = (z I_n - D)^{-1} = \text{diag} \left(\frac{1}{z - \lambda_1}, \dots, \frac{1}{z - \lambda_n} \right).$$

On a donc $(R_z(D))_{i,j} = 0$ si $i \neq j$, et $(R_z(D))_{i,i} = \frac{1}{z - \lambda_i} = \frac{\prod_{k \neq i} (z - \lambda_k)}{\chi_D(z)}$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. La propriété \mathcal{P} est alors vérifiée avec les polynômes (de degré au plus $n - 1$):

$$\begin{cases} P_{D,i,j} = 0 & \text{si } i \neq j \\ P_{D,i,i} = \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i}} (X - \lambda_k) & \text{pour } i \in \llbracket 1, n \rrbracket . \end{cases}$$

- Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable, posons $M = QDQ^{-1}$ avec $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Alors $\chi_M = \chi_D$ et $\sigma(M) = \sigma(D)$.

Si $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(M)$, alors $zI_n - M = Q(zI_n - D)Q^{-1}$, puis

$$R_z(M) = (zI_n - M)^{-1} = Q \cdot R_z(D) \cdot Q^{-1},$$

donc, en utilisant l'étude faite pour une matrice diagonale, pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$,

$$\begin{aligned} (R_z(M))_{i,j} &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (Q)_{i,k} (R_z(D))_{k,l} (Q^{-1})_{l,i} \\ &= \sum_{k,l} (Q)_{i,k} \frac{P_{D,k,l}(z)}{\chi_D(z)} (Q^{-1})_{l,i} = \frac{P_{M,i,j}(z)}{\chi_M(z)} \end{aligned}$$

avec $P_{M,i,j} = \sum_{k,l} (Q)_{i,k} (Q^{-1})_{l,i} P_{D,k,l} \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ puisque c'est une combinaison linéaire de polynômes appartenant à $\mathbb{C}_{n-1}[X]$. Donc M vérifie \mathcal{P} .

6. Si $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(M)$, avec $X = (x_1 \ \dots \ x_n)^T$ et $Y = (y_1 \ \dots \ y_n)^T$, on a

$$X^T \cdot R_z(M) \cdot Y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j (R_z(M))_{i,j} = \sum_{i,j} x_i y_j \frac{P_{M,i,j}(z)}{\chi_M(z)} = \frac{P_{M,X,Y}(z)}{\chi_M(z)}$$

en posant $P_{M,X,Y} = \sum_{i,j} x_i y_j P_{M,i,j}$, polynôme de degré $n - 1$ au plus.

7. • Si $M \in \mathcal{B}_n$, alors $\forall j \in \mathbb{N} \quad \|M^j\|_{\text{op}} \leq b(M)$. On a alors, si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$, i.e. si $|z| > 1$,

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad \left\| \frac{M^j}{z^{j+1}} \right\|_{\text{op}} = \frac{\|M^j\|_{\text{op}}}{|z|^{j+1}} \leq \frac{b(M)}{|z|^{j+1}},$$

terme général d'une série géométrique de raison $\frac{1}{|z|} < 1$, donc convergente. Comme $\|\cdot\|_{\text{op}}$ est une norme sur l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, le résultat admis donne la convergence de la série $\sum_{j \geq 0} \frac{M^j}{z^{j+1}}$ dans cet espace normé.

- Pour $m \in \mathbb{N}$, par télescopage, on obtient

$$(*) \quad (zI_n - M) \sum_{j=0}^m \frac{M^j}{z^{j+1}} = \sum_{j=0}^m \frac{M^j}{z^j} - \sum_{j=1}^{m+1} \frac{M^j}{z^j} = I_n - \frac{M^{m+1}}{z^{m+1}}.$$

• Posons $S = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{M^j}{z^{j+1}} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\sum_{j=0}^m \frac{M^j}{z^{j+1}} \right)$.

On a $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{M^{m+1}}{z^{m+1}} = 0$ puisque $\left\| \frac{M^{m+1}}{z^{m+1}} \right\|_{\text{op}} \leq \frac{b(M)}{|z|^{m+1}} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$.

En passant à la limite ($m \rightarrow +\infty$) dans (*), en utilisant la continuité du produit matriciel, on obtient la relation $(zI_n - M)S = I_n$, soit

$$S = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{M^j}{z^{j+1}} = (zI_n - M)^{-1} = R_z(M).$$

8. Soit $M \in \mathcal{B}_n$, soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, par l'inégalité triangulaire, on a

$$\left\| \sum_{j=0}^m \frac{M^j}{z^{j+1}} \right\|_{\text{op}} \leq \sum_{j=0}^m \frac{\|M^j\|_{\text{op}}}{|z|^{j+1}} \leq b(M) \sum_{j=0}^m \frac{1}{|z|^{j+1}}.$$

En faisant tendre m vers l'infini, on déduit

$$\|R_z(M)\|_{\text{op}} \leq b(M) \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{|z|^{j+1}} = \frac{b(M)}{|z| - 1},$$

donc $\varphi_M(z) = (|z| - 1) \|R_z(M)\|_{\text{op}} \leq b(M)$.

9. • Posons $u_j(t) = c_j e^{-i(j+1)t}$ pour tout j entier naturel. Chaque fonction u_j est continue sur \mathbb{R} et $\|u_j\|_{\infty} = |c_j|$, donc la série $\sum \|u_j\|_{\infty}$ converge, il y a donc convergence normale sur \mathbb{R} de la série de fonctions $\sum u_j$, ce qui entraîne la continuité de la somme u .

• On a alors

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(t) e^{i(k+1)t} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=0}^{+\infty} c_j e^{i(k-j)t} dt = \sum_{j=0}^{+\infty} c_j \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-j)t} dt$$

puisque, $k \in \mathbb{N}$ étant fixé, la série de fonctions $\sum v_j$ avec $v_j(t) = c_j e^{i(k-j)t}$ converge normalement sur le segment $[-\pi, \pi]$, ce qui autorise l'intégration terme à terme.

Comme $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-j)t} dt = 2\pi \delta_{j,k}$ (symbole de Kronecker), on déduit que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) e^{i(k+1)t} dt = c_k.$$

10. • Comme $re^{it} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$, on a $R_{re^{it}}(M) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{e^{-i(j+1)t}}{r^{j+1}} M^j$ d'après la question 7.

Donc (en travaillant sur une somme partielle, puis en passant à la limite en utilisant la continuité du produit matriciel),

$$X^T \cdot R_{re^{it}}(M) \cdot Y = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{e^{-i(j+1)t}}{r^{j+1}} X^T M^j Y = \sum_{j=0}^{+\infty} c_j e^{-i(j+1)t},$$

en posant $c_j = \frac{X^T M^j Y}{r^{j+1}}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. La majoration $|c_j| \leq b(M) \frac{\|X\| \|Y\|}{r^{j+1}}$ montre que la série $\sum c_j$ est absolument convergente.

• De **Q9.**, on déduit que

$$X^T M^k Y = r^{k+1} c_k = \frac{r^{k+1}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k+1)t} X^T \cdot R_{re^{it}}(M) \cdot Y dt .$$

PARTIE 4. Variation totale et norme uniforme

11. Posons $f_n(x) = e^{inx}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-\pi, \pi]$. Alors $f_n \in \mathcal{C}^1$, $\|f_n\|_{\infty} = 1$ et

$$\frac{V(f_n)}{\|f_n\|_{\infty}} = V(f_n) = \int_{-\pi}^{\pi} n dx = 2\pi n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty ,$$

donc le rapport $\frac{V(f)}{\|f\|_{\infty}}$, pour $f \in \mathcal{C}^1 \setminus \{0\}$, n'est pas majoré. Une telle constante $C \in \mathbb{R}_+^*$ n'existe donc pas.

12. • Par la relation de Chasles, $V(f) = \sum_{j=0}^l \int_{t_j}^{t_{j+1}} |f'(t)| dt$.

Or, f' étant continue, elle garde un signe constant (au sens large) sur chaque segment $[t_j, t_{j+1}]$. Donc

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} |f'(t)| dt = \left| \int_{t_j}^{t_{j+1}} f'(t) dt \right| = |f(t_{j+1}) - f(t_j)| .$$

On en déduit que $V(f) = \sum_{j=0}^l |f(t_{j+1}) - f(t_j)|$.

• Soit $j \in \llbracket 0, l \rrbracket$.

- Si $f' > 0$ sur $]t_j, t_{j+1}[$, alors f est strictement croissante sur $[t_j, t_{j+1}]$, ce qui entraîne que $-\|f\|_{\infty} \leq f(t_j) < f(t_{j+1}) \leq \|f\|_{\infty}$. Par la relation de Chasles,

$$\int_{-\|f\|_{\infty}}^{\|f\|_{\infty}} \psi_j = \int_{-\|f\|_{\infty}}^{f(t_j)} \psi_j + \int_{f(t_j)}^{f(t_{j+1})} \psi_j + \int_{f(t_{j+1})}^{\|f\|_{\infty}} \psi_j = 0 + (f(t_{j+1}) - f(t_j)) + 0 = |f(t_{j+1}) - f(t_j)| .$$

- Si $f' < 0$ sur $]t_j, t_{j+1}[$, alors f est strictement décroissante sur $[t_j, t_{j+1}]$, ce qui entraîne que $-\|f\|_{\infty} \leq f(t_{j+1}) < f(t_j) \leq \|f\|_{\infty}$. Par la relation de Chasles,

$$\int_{-\|f\|_{\infty}}^{\|f\|_{\infty}} \psi_j = \int_{-\|f\|_{\infty}}^{f(t_{j+1})} \psi_j + \int_{f(t_{j+1})}^{f(t_j)} \psi_j + \int_{f(t_j)}^{\|f\|_{\infty}} \psi_j = 0 + (f(t_j) - f(t_{j+1})) + 0 = |f(t_{j+1}) - f(t_j)| .$$

On en déduit que $V(f) = \sum_{j=0}^l \int_{-\|f\|_{\infty}}^{\|f\|_{\infty}} \psi_j$.

13. • La fonction f est strictement monotone sur chaque intervalle $[t_j, t_{j+1}[$ avec $0 \leq j \leq l$ (cela a déjà été mentionné à la question précédente), donc f est injective sur chacun de ces intervalles, et le réel y a donc au plus un antécédent par f dans chacun de ces intervalles.

Comme $\bigsqcup_{j=0}^l [t_j, t_{j+1}[= [-\pi, \pi[$ et qu'il y a $l + 1$ intervalles, on déduit que

$$N(y) = \text{Card} \left(f^{-1}(\{y\}) \cap [-\pi, \pi[\right) \leq l + 1 .$$

- Comme f est continue et strictement monotone sur $[t_j, t_{j+1}[$, on a

$$f([t_j, t_{j+1}[) = [f(t_j), f(t_{j+1}[\quad \text{ou} \quad]f(t_{j+1}), f(t_j)] ,$$

et le réel y admet un antécédent par f dans cet intervalle si et seulement si $\psi_j(y) = 1$. Donc

$$N(y) = \sum_{j=0}^l \psi_j(y) .$$

- La fonction N est continue par morceaux sur \mathbb{R} (comme somme des fonctions ψ_j qui sont des fonctions indicatrices d'intervalles) et, par linéarité de l'intégrale,

$$V(f) = \sum_{j=0}^l \int_{-\|f\|_\infty}^{\|f\|_\infty} \psi_j(y) dy = \int_{-\|f\|_\infty}^{\|f\|_\infty} \left(\sum_{j=0}^l \psi_j(y) \right) dy = \int_{-\|f\|_\infty}^{\|f\|_\infty} N(y) dy .$$

On en déduit que $V(f) \leq 2 \|f\|_\infty \cdot \max \{N(y) ; y \in \mathbb{R}\}$.

PARTIE 5. L'inégalité de Spijker

14. • On a les équivalences

$$\begin{aligned} f_u(t) = y &\iff \operatorname{Re} \left(e^{-iu} \frac{P(e^{it})}{Q(e^{it})} \right) = y \\ &\iff e^{-iu} \frac{P(e^{it})}{Q(e^{it})} + e^{iu} \frac{\overline{P(e^{it})}}{\overline{Q(e^{it})}} = 2y \\ &\iff e^{-iu} P(e^{it}) \overline{Q(e^{it})} + e^{iu} \overline{P(e^{it})} Q(e^{it}) - 2y Q(e^{it}) \overline{Q(e^{it})} = 0 \quad (**). \end{aligned}$$

Pour tout polynôme $A = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{C}_n[X]$, on a, pour t réel,

$$\overline{A(e^{it})} = \sum_{k=0}^n \overline{a_k} e^{-ikt} = e^{-int} \sum_{k=0}^n \overline{a_k} e^{i(n-k)t} = e^{-int} \tilde{A}(e^{it})$$

en posant $\tilde{A} = \sum_{k=0}^n \overline{a_k} X^{n-k} \in \mathbb{C}_n[X]$. En multipliant (**) par e^{int} , on obtient

$$\begin{aligned} f_u(t) = y &\iff e^{-iu} P(e^{it}) \tilde{Q}(e^{it}) + e^{iu} \tilde{P}(e^{it}) Q(e^{it}) - 2y Q(e^{it}) \tilde{Q}(e^{it}) = 0 \\ &\iff S(e^{it}) = 0 \end{aligned}$$

avec $S = e^{-iu} P \tilde{Q} + e^{iu} \tilde{P} Q - 2y Q \tilde{Q} \in \mathbb{C}_{2n}[X]$.

- Si f_u n'est pas constante, alors S n'est pas le polynôme nul, il admet alors au plus $2n$ racines complexes. L'application $t \mapsto e^{it}$ étant injective sur $[-\pi, \pi[$, il y a alors au plus $2n$ réels t dans cet intervalle vérifiant $S(e^{it}) = 0$. Donc

$$\text{Card} \left(f_u^{-1}(\{y\}) \cap [-\pi, \pi[\right) \leq 2n .$$

- 15.** • Comme la fonction $|\cos|$ est 2π -périodique, son intégrale est la même sur tout segment de longueur 2π donc, en terminant par de faciles considérations de signe et de symétrie,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\cos(u - \omega)| du = \int_{-\pi - \omega}^{\pi - \omega} |\cos(t)| dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\cos(t)| dt = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt = 4 .$$

- Si $(a, b) = (0, 0)$, la relation demandée est triviale. Sinon, $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$, donc il existe un réel ω tel que $\cos(\omega) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin(\omega) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, on a alors

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |a \cos(u) + b \sin(u)| du &= \sqrt{a^2 + b^2} \int_{-\pi}^{\pi} |\cos(u) \cos(\omega) + \sin(u) \sin(\omega)| du \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \int_{-\pi}^{\pi} |\cos(u - \omega)| du = 4 \sqrt{a^2 + b^2} . \end{aligned}$$

- 16.** On a $f'_u(t) = g'(t) \cos(u) + h'(t) \sin(u)$. De la question précédente, on déduit que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f'_u(t)| du = 4 \sqrt{g'(t)^2 + h'(t)^2} = 4 |f'(t)| .$$

$$\text{Donc } \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f'_u(t)| du \right) dt = 4 \int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)| dt = 4 V(f) .$$

- 17.** Donc, en utilisant le théorème de Fubini admis (interversion d'intégrales):

$$V(f) = \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f'_u(t)| dt \right) du = \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} V(f_u) du .$$

Or pour tout $u \in [-\pi, \pi]$, $f_u \in \mathcal{C}^1$ et est à valeurs réelles. Si f_u n'est pas constante, alors on admet que l'ensemble des zéros de f'_u dans $]-\pi, \pi[$ est fini, et il résulte alors de la question **13.** que

$$V(f_u) \leq 2 \|f_u\|_{\infty} \cdot \max_{y \in \mathbb{R}} N_u(y)$$

en posant $N_u(y) = \text{Card} \left(f_u^{-1}(\{y\}) \cap [-\pi, \pi[\right)$. Donc, par la question **14.**, on déduit

$$(***) \quad V(f_u) \leq 4n \|f_u\|_{\infty} .$$

L'inégalité (***) est par ailleurs immédiate si f_u est constante puisqu'alors $V(f_u) = 0$.

D'autre part, $|f_u(t)| = \left| \text{Re} (e^{-iu} f(t)) \right| \leq |e^{-iu} f(t)| = |f(t)|$, donc $\|f_u\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty}$.

Finalement, $V(f) = \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} V(f_u) du \leq \frac{1}{4} \times 2\pi \times 4n \|f\|_{\infty} = 2\pi n \|f\|_{\infty}$.

PARTIE 6. La version de Spijker du théorème matriciel de Kreiss

18. Posons $F_r(z) = X^T \cdot R_{rz}(M) \cdot Y$ pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_{\frac{1}{r}}$, i.e. lorsque $|rz| > 1$. La question **6.**

montre que $F_r(z) = \frac{P_{M,X,Y}(rz)}{\chi_M(rz)}$. Les polynômes $P_{M,X,Y}(rZ)$ et $\chi_M(rZ)$, en appelant ici Z l'indéterminée pour éviter un conflit de notations, sont de degré au plus n et, si $|z| = 1$, alors $|rz| = r > 1$ donc $rz \notin \sigma(M)$ d'après **Q3.** donc $\chi_M(rz) \neq 0$. La fraction rationnelle F_r n'a donc pas de pôle de module 1, donc $F_r \in \mathcal{R}_n$.

En fait, si $\chi_M(rz) = 0$ alors $|rz| \leq 1$ d'après **Q3.** donc $z \in \mathbb{D}_{\frac{1}{r}}$. Les pôles de la fraction rationnelle F_r sont donc dans le disque fermé $\mathbb{D}_{\frac{1}{r}}$.

D'après **Q10.**, on a

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad X^T M^k Y = \frac{r^{k+1}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_r(e^{it}) e^{i(k+1)t} dt .$$

Enfin, si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_{\frac{1}{r}}$, alors $rz \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ et

$$|F_r(z)| = |X^T \cdot R_{rz}(M) \cdot Y| \leq \|R_{rz}(M)\|_{\text{op}} = \frac{\varphi_M(rz)}{|rz| - 1} \leq \frac{b'(M)}{r|z| - 1} .$$

19. Comme dans la **PARTIE 5**, posons $f(t) = F_r(e^{it})$, alors $f \in \mathcal{C}^1$ et, par une intégration par parties,

$$X^T M^k Y = \frac{r^{k+1}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{i(k+1)t} dt = \frac{i r^{k+1}}{2\pi(k+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) e^{i(k+1)t} dt$$

(je n'ai pas explicité le "terme entre crochets", mais il est nul). Donc

$$|X^T M^k Y| \leq \frac{r^{k+1}}{2\pi(k+1)} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)| dt = \frac{r^{k+1} V(f)}{2\pi(k+1)} .$$

L'inégalité **(3)** de la question **17.** donne alors $|X^T M^k Y| \leq \frac{r^{k+1}}{k+1} n \|f\|_{\infty}$.

Enfin, de la majoration de **Q18.** avec $z = e^{it}$, on déduit $\|f\|_{\infty} \leq \frac{b'(M)}{r-1}$. Finalement,

$$|X^T M^k Y| \leq \frac{r^{k+1}}{(k+1)(r-1)} n b'(M) .$$

20. Si $M \in \mathcal{B}_n$ et $k \in \mathbb{N}$, il résulte de **Q19.** que

$$|X^T M^k Y| \leq n \cdot b'(M) \cdot \inf_{r>1} \left(\frac{r^{k+1}}{(k+1)(r-1)} \right) .$$

Posons $h_k(r) = \frac{r^{k+1}}{(k+1)(r-1)}$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $r \in]1, +\infty[$.

- pour $k = 0$, $h_0(r) = \frac{r}{r-1}$, et on a clairement $\inf_{r>1} h_0(r) = 1 \leq e$;
- si $k \in \mathbb{N}^*$, une étude de variations montre que $\min_{r>1} h_k(r) = h_k\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \leq e$.

Donc $|X^T M^k Y| \leq e n b'(M)$ pour tout k entier naturel. De **Q2.**, on déduit alors que

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \|M^k\|_{\text{op}} \leq e n b'(M) .$$

De la définition de $b(M)$, on déduit enfin que $b(M) \leq e n b'(M)$.