Partie I

1. $\operatorname{card}(\mathfrak{M}_n(\{-1,1\}) = 2^{n^2}$ et $\mathfrak{M}_n(\{-1,1\})$ n'est pas un sous-espace vectoriel car il ne contient pas la matrice nulle.

2. Notons $\mathrm{A} = (a_{i,j})$, on a pour $(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \in (\{-1,1\}^n)^2$, ${}^t\mathrm{XAY} = \displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} a_{i,j}x_iy_j$.

D'où $|{}^t\mathrm{XAY}| \leqslant \displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} 1 = n^2$.

Comme $a_{i,j}x_iy_j$ est impair, ${}^t\mathrm{XAY} = \displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} a_{i,j}x_iy_j$ a même parité que $\displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} 1 = n^2$

donc pour $n \geqslant 1$, $\mathrm{S(A)} \subset \{-n^2, -n^2+2, \cdots, n^2-2, n^2\} \subsetneq \{-n^2, \cdots, 0, \cdots, n^2\}$.
Enfin, $k \in \mathrm{S(A)} \Rightarrow \exists(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \in (\{-1,1\}^n)^2$, ${}^t\mathrm{XAY} = k$
Or $-k = {}^t(-\mathrm{X})\,\mathrm{AY}$ donc $-k \in \mathrm{S(A)}$.

3. Pour $(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \in (\{-1,1\}^n)^2$, ${}^t\mathrm{XBY} = {}^t({}^t\mathrm{CX})\,\mathrm{A}\,(\mathrm{DY})$ et $({}^t\mathrm{CX}, \mathrm{DY}) \in (\{-1,1\}^n)^2$.
donc $\mathrm{S(B)} \subset \mathrm{S(A)}$.
Comme $\mathrm{A} = \mathrm{C}^{-1}\mathrm{BD}^{-1}$ avec $\mathrm{C}^{-1}, \mathrm{D}^{-1}$ diagonales ne contenant que des 1 et des -1, on a également $\mathrm{S(A)} \subset \mathrm{S(B)}$.

4. • $\mathrm{S(I)} = \left\{ \displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,2]\!]^2} x_iy_j = \left(\sum_{i\in[\![1,2]\!]} x_i\right)\left(\sum_{i\in[\![1,2]\!]} y_i\right) \mid x_i, y_j \text{ dans } \{-1,1\} \right\}$

Donc $\mathrm{S(I)} = \{2\times 2, 0, -2\times 2\} = \boxed{\{-4,0,4\}}$

• Pour la matrice J, on trouve

$$ {}^t\mathrm{XJY} = x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 - x_2y_2 = {}^t\,\mathrm{XIY} - 2x_2y_2 $$

donc $\mathrm{S(J)} \subset \{r+2 | r \in \mathrm{S(I)}\} \cup \{r-2 | r \in \mathrm{S(I)}\}$. De plus, on sait que S(J) est inclus dans $\{-4,-2,0,2,4\}$ donc $\mathrm{S(J)} \subset \{-2,2\}$.

Réciproquement, l'ensemble S(J) est symétrique et non vide donc $\boxed{\mathrm{S(J)} = \{-2,2\}}$

• Soit $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_2(\{-1,1\})$. En agissant sur les lignes puis sur la deuxième colonne de A, on peut construire deux matrices diagonales C et D à coefficients dans $\{-1,1\}$ telles que $\mathrm{CAD} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon \end{pmatrix}$ avec $\varepsilon \in \{-1,1\}$.

Ainsi, $\mathrm{S(A)} = \mathrm{S}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon \end{pmatrix}\right) = \begin{cases} \{-4,0,4\} \text{ si } \varepsilon = 1 \\ \{-2,2\} \text{ si } \varepsilon = -1. \end{cases}$

5. Comme dans le cas particulier de la question précédente :
Remarque préliminaire À toute matrice $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\{-1,1\})$, on peut construire deux matrices diagonales C et D telles que $\widetilde{\mathrm{A}} = \mathrm{CAD}$ avec $\widetilde{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & & & \\ \vdots & & a_{i,j} & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$

(puisque C agit sur les lignes et D sur les colonnes).

• **(a) Hypothèse** $n^2 \in \mathrm{S(A)} = \mathrm{S}(\widetilde{\mathrm{A}})$.

Il existe $(\widetilde{\mathrm{X}}, \widetilde{\mathrm{Y}}) \in (\{-1,1\}^n)^2$ tel que ${}^t\widetilde{\mathrm{X}}\widetilde{\mathrm{A}}\widetilde{\mathrm{Y}} = \displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \widetilde{a_{i,j}}\widetilde{x}_i\widetilde{y}_j = n^2$.

Donc pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\widetilde{a_{i,j}}\widetilde{x}_i\widetilde{y}_j = 1$ (cas d'égalité puisque $|\widetilde{a_{i,j}}\widetilde{x}_i\widetilde{y}_j| \leqslant 1$).
En particulier $\widetilde{x}_1\widetilde{y}_1 = 1$.
Quitte à échanger $(\widetilde{\mathrm{X}}, \widetilde{\mathrm{Y}})$ en $(-\widetilde{\mathrm{X}}, -\widetilde{\mathrm{Y}})$, ${}^t\widetilde{\mathrm{X}}\widetilde{\mathrm{A}}\widetilde{\mathrm{Y}}$ restant invariant, on peut supposer $\widetilde{x}_1 = \widetilde{y}_1 = 1$.
Comme pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\widetilde{a_{i,1}} = \widetilde{a_{1,i}} = 1$, on a $\widetilde{x}_i = \widetilde{y}_i = 1$.

Donc, finalement, $\widetilde{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} & & \\ & (1) & \\ & & \end{pmatrix} = \widetilde{\mathrm{X}}\,{}^t\widetilde{\mathrm{Y}}$ avec $\widetilde{\mathrm{X}} = \widetilde{\mathrm{Y}} = {}^t(1,\cdots,1)$.

Or $\widetilde{\mathrm{A}} = \mathrm{CAD}$ donc $\mathrm{A} = \mathrm{C}^{-1}\widetilde{\mathrm{A}}\mathrm{D}^{-1} = \left(\mathrm{C}^{-1}\widetilde{\mathrm{X}}\right)\,{}^t\left(\mathrm{D}^{-1}\widetilde{\mathrm{Y}}\right)$.

Il existe donc $\mathrm{X} = \mathrm{C}^{-1}\widetilde{\mathrm{X}}$ et $\mathrm{Y} = \mathrm{D}^{-1}\widetilde{\mathrm{Y}}$ (à coefficients dans $\{-1,1\}$) tel que $\mathrm{A} = \mathrm{X}\,{}^t\mathrm{Y}$.
• **(b) Hypothèse** $\mathrm{A} = \mathrm{X}^t\mathrm{Y}$.
Alors A est de rang 1 puisque $\operatorname{Im}\mathrm{A} = \operatorname{Vect}(\mathrm{X})$ avec $\mathrm{X} \neq 0$.
• **(c) Hypothèse** A est de rang 1.
Donc $\operatorname{Im}\mathrm{A} = \operatorname{Vect}(\mathrm{X})$ avec $\mathrm{X} \neq 0$.

En notant (e_i) la base canonique, on définit y_i tel que $\mathrm{A}e_i = y_i\mathrm{X}$.
Il vient $\mathrm{A} = \mathrm{X}\ {}^t\mathrm{Y}$ avec $\mathrm{Y} = {}^t(y_1, \cdots, y_n) \neq 0$ (car $\mathrm{A} \neq 0$).
Comme $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\{-1,1\})$. On a $x_1y_1 = 1$.
On peut choisir $x_1 = 1$ quitte à remplaçer (X,Y) par $\left(\dfrac{1}{x_1}\mathrm{X}, x_1\mathrm{Y}\right)$ en ayant toujours $\mathrm{A} = \mathrm{X}\ {}^t\mathrm{Y}$.
Ainsi, $\mathrm{Y} \in (\{-1,1\})^n$ en regardant la première ligne de A puis $\mathrm{X} \in (\{-1,1\})^n$ en regardant la première colonne de A ($y_1 \in \{-1,1\}$).
On obtient donc **(b).**
• Il nous reste à montrer **(b)** $\Rightarrow$ **(a).**
Hypothèse $\mathrm{A} = \mathrm{X}{}^t\mathrm{Y}$. On a

$$ {}^t\mathrm{XAY} = \|\mathrm{X}\|^2 \cdot \|\mathrm{Y}\|^2 = n^2 \text{ avec } \|\cdot\| \text{ norme euclidienne canonique} $$

donc $n^2 \in \mathrm{S(A)}$.

6. Lemme pour $(\mathrm{X},\mathrm{Y},\widetilde{\mathrm{X}},\widetilde{\mathrm{Y}}) \in \left((\{-1,1\})^n\right)^4$,

$$ \mathrm{X}\ {}^t\mathrm{Y} = \widetilde{\mathrm{X}}\ {}^t\widetilde{\mathrm{Y}} \Leftrightarrow (\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \left(\widetilde{\mathrm{X}},\widetilde{\mathrm{Y}}\right) \text{ ou } (\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \left(-\widetilde{\mathrm{X}},-\widetilde{\mathrm{Y}}\right) $$

(on reprend le même raisonnement en regardant par exemple la première ligne et la première colonne).
Ainsi, pour compter les matrices A de la forme $\mathrm{X}\ {}^t\mathrm{Y}$, on compte les couples (X,Y) et on divise le total par deux.

$$ \operatorname{card} \mathrm{S(A)} = \frac{\operatorname{card}\left(\left((\{-1,1\})^n\right)^2\right)}{2} = 2^{2n-1} $$

La proportion dans $\mathfrak{M}_n(\{-1,1\})$ de matrices A telles que $n^2 \in \mathrm{S(A)}$ est donc $\dfrac{2^{2n-1}}{2^{n^2}} = \boxed{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{(n-1)^2}}$

Partie II

1. $\varphi(\lambda) = \mathbb{E}\left(e^{\lambda \mathrm{U}_1}\right) = \dfrac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2} = \operatorname{ch}\lambda$.
Posons $\psi(\lambda) = \varphi(\lambda) - \dfrac{\lambda^2}{2}$. On a $\psi'(\lambda) = \dfrac{\operatorname{sh}\lambda}{\operatorname{ch}\lambda} - \lambda$ et $\psi''(\lambda) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2\lambda} - 1 \leqslant 0$.
Donc ψ' est décroissante et s'annule en 0, donc ψ croit de $-\infty$ à 0 puis décroit jusqu'à $+\infty$ (concavité...), donc pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\psi(\lambda) \leqslant \psi(0) = 0$, ce qui prouve le résultat demandé.

2. Pour $t \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$, avec la stricte croissance de l'exponentielle, on a $\{\mathrm{S}_k \geqslant t\} = \{\lambda\mathrm{S}_k \geqslant \lambda t\} = \{e^{\lambda \mathrm{S}_k} \geqslant e^{\lambda t}\}$ puis

$$ \begin{aligned} \mathbb{P}(\mathrm{S}_k \geqslant t) &= \mathbb{P}(\lambda\mathrm{S}_k \geqslant \lambda t) = \mathbb{P}\left(e^{\lambda\mathrm{S}_k} \geqslant e^{\lambda t}\right) \\ &\leqslant \frac{1}{e^{\lambda t}}\mathbb{E}\left(e^{\lambda\mathrm{S}_k}\right) \text{ inégalité de Markov, } e^{\lambda\mathrm{S}_k} \text{ v.a. } \geqslant 0 \\ &\leqslant e^{-\lambda t}\left(\mathbb{E}\left(e^{\lambda\mathrm{U}_1}\right)\right)^k \text{ par mutuelle indépandance + même loi} \\ &\leqslant \exp\left(k\varphi(\lambda) - \lambda t\right). \end{aligned} $$

3. On a pour tout $\lambda > 0$, $\mathbb{P}(\mathrm{S}_k \geqslant t) \leqslant \exp\left(k\varphi(\lambda) - \lambda t\right) \leqslant \exp\left(\dfrac{k\lambda^2}{2} - \lambda t\right)$
On choisit le « meilleur » λ.
Posons $\Psi(\lambda) = \dfrac{k\lambda^2}{2} - \lambda t$. On a $\Psi'(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{t}{k}$.
Pour $t > 0$, on choisit un tel λ, on obtient

$$ \mathbb{P}(\mathrm{S}_k \geqslant t) \leqslant \exp\left(\Psi\left(\frac{t}{k}\right)\right) = \exp\left(-\frac{t^2}{2k}\right) $$

4. Montrons que les $\mathrm{C}_{i,j}$ sont mutuellement indépendantes.

Première étape : la loi de $\mathrm{C}_{i,j}$ est uniforme sur $\{\pm 1\}$ car il y a 2^{n^2-1} matrices A de $\mathcal{M}_n(\{-1,1\})$ telles que $a_{i,j} = 1$.

Deuxième étape : on trouve

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{1\leqslant i,j\leqslant n}\{\mathrm{C}_{i,j}=a_{i,j}\}\right)=\frac{1}{2^{n^2}}=\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}\mathbb{P}(\mathrm{C}_{i,j}=a_{i,j})$$

car il y a exactement une matrice qui réalise ces n^2 égalités.
En conclusion, les variables aléatoires $(x_iy_j\mathrm{C}_{i,j})_{i,j}$ sont mutuellement indépendantes car x_iy_j n'est qu'une constante. Par ailleurs $\mathrm{C}_{i,j}$ et $-\mathrm{C}_{i,j}$ ont même loi d'où le résultat.

5. Soit $(\mathrm{X},\mathrm{Y})\in(\{-1,1\}^n)^2$.
Utilisons la question **3)** avec $k=n^2$ et $\mathrm{U}_1\sim\mathrm{C}_{1,1}$.

$$\mathbb{P}\left({}^t\mathrm{XCY}\geqslant t\cdot n^{3/2}\right)\leqslant\exp\left(-\frac{t^2n^3}{2n^2}\right)=\exp\left(-\frac{nt^2}{2}\right)$$

Il vient comme (point clé) $\left\{\mathrm{M(C)}=\max\mathrm{S(C)}\geqslant tn^{3/2}\right\}=\displaystyle\bigcup_{(\mathrm{X},\mathrm{Y})\in(\{-1,1\}^n)^2}\left\{{}^t\mathrm{XCY}\geqslant tn^{3/2}\right\}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\mathrm{M(C)}\geqslant t\cdot n^{3/2}\right)&\leqslant\sum_{(\mathrm{X},\mathrm{Y})\in(\{-1,1\}^n)^2}\mathbb{P}\left({}^t\mathrm{XCY}\geqslant t\cdot n^{3/2}\right)\\&\leqslant 2^{2n}\exp\left(-\frac{n\cdot t^2}{2}\right)=\exp\left(-\left(\frac{t^2}{2}-2\ln 2\right)n\right).\end{aligned}$$

6. Soit $\varepsilon>0$. Posons $t=2\sqrt{\ln 2}+\varepsilon$ de sorte que $\dfrac{t^2}{2}>2\ln 2$
donc $-\left(\dfrac{t^2}{2}-2\ln 2\right)n<0$ donc $\mathbb{P}\left(\mathrm{M(C)}\geqslant t\cdot n^{3/2}\right)<1$.
Ainsi, $\mathbb{P}\left(\mathrm{M(C)}<t\cdot n^{3/2}\right)\neq 0$ donc $\left\{\mathrm{M(C)}<t\cdot n^{3/2}\right\}\neq\emptyset$.
Il existe $\omega\in\left\{\mathrm{M(C)}<t\cdot n^{3/2}\right\}$. On dispose donc d'une matrice $\mathrm{A}=\mathrm{C}(\omega)$ tel que $\mathrm{M(A)}<t\cdot n^{3/2}$
Donc $\underline{\mathrm{M}}(n)=\displaystyle\min_{\mathrm{A}\in\mathfrak{M}_n(\{1,1\})}\mathrm{M(A)}<t\cdot n^{3/2}=\left(2\sqrt{\ln 2}+\varepsilon\right)n^{3/2}$.

Cette inégalité étant vraie pour tout $\varepsilon>0$, on obtient en faisant tendre ε vers 0, $\boxed{\underline{\mathrm{M}}(n)\leqslant 2\sqrt{\ln 2}n^{3/2}}$

Partie III

1. Fixons $\mathrm{Y}\in\{-1,1\}^n$
Pour $\mathrm{X}\in\{-1,1\}^n$, ${}^t\mathrm{XAY}=\displaystyle\sum_{i=1}^n\mathrm{X}_i\left(\mathrm{AY}\right)_i\leqslant\sum_{i=1}^n\left|(\mathrm{AY})_i\right|={}^t\widetilde{\mathrm{X}}\mathrm{AY}$
avec $\widetilde{\mathrm{X}}$ tel que $\left(\widetilde{\mathrm{X}}\right)_i=\widetilde{x}_i=\mathrm{sgn}\left((\mathrm{AY})_i\right)$.

Donc, le majorant étant atteint, $g_{\mathrm{A}}(\mathrm{Y})=\displaystyle\sum_{i=1}^n\left|(\mathrm{AY})_i\right|=\sum_{i=1}^n\left|\sum_{j=1}^n a_{i,j}y_j\right|$.

2. Soit $i\in[\![1,n]\!]$ fixé.
Pour $j\in[\![1,n]\!]$, posons $\widetilde{\mathrm{Z}}_j^i$ tel que $\mathrm{Z}_j=a_{i,j}\left(2\widetilde{\mathrm{Z}}_j^i-1\right)$ de sorte que $\left(\widetilde{\mathrm{Z}}_j^i\right)_{1\leqslant j\leqslant n}$ sont des **v.a.i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre** $\dfrac{1}{2}$ (vues les hypothèses sur Z). Ainsi $\displaystyle\sum_{j=1}^n\widetilde{\mathrm{Z}}_j^i\sim\mathscr{B}(n,p)$. Écrivons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\left|\sum_{j=1}^n a_{i,j}\mathrm{Z}_j\right|\right)&=\mathbb{E}\left(\left|\sum_{j=1}^n a_{i,j}\left(2a_{i,j}\widetilde{\mathrm{Z}}_j^i-a_{i,j}\right)\right|\right)=\mathbb{E}\left(\left|2\sum_{j=1}^n\widetilde{\mathrm{Z}}_j^i-n\right|\right)\\&=\sum_{k=0}^n\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}\left|2k-n\right|\ \text{ par le théorème de transfert}\end{aligned}$$

En conclusion,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[g_{\mathrm{A}}(\mathrm{Z})\right] &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\mathrm{Z}_j\right|\right) = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\mathrm{Z}_j\right|\right) \text{ par linéarité de l'espérance}\\ &= \frac{n}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|n-2k|\end{aligned}$$

3. 3.a ($n \geqslant 1$ est fixé) Prouvons le résultat par récurrence sur m.

- Pour $m=0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{m}(n-2k)\binom{n}{k} = n = n\binom{n-1}{0}$, OK.
- Soit $m \geqslant 1$. Supposons le résultat vrai au rang $m-1$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m}(n-2k)\binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{m-1}(n-2k)\binom{n}{k} + (n-2m)\binom{n}{m}\\ &= n\binom{n-1}{m-1} + (n-2m)\binom{n}{m}\\ &= n\left(\binom{n-1}{m-1}+\binom{n}{m}\right) - 2m\binom{n}{m}\\ &= n\left(2\binom{n-1}{m-1}+\binom{n-1}{m}\right) - 2m\binom{n}{m} \text{ par le triangle de Pascal}\\ &= n\binom{n-1}{m} \text{ car } n\binom{n-1}{m-1} = m\binom{n}{m}\end{aligned}$$

3.b Remarquons que si $n=2k$, $\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}|2k-n| = 0$ donc

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|n-2k| = \sum_{2k\leqslant n}\binom{n}{k}(n-2k) + \sum_{2k\geqslant n}\binom{n}{k}|n-2k|.$$

De plus avec $k' = n-k$ (donc $n-2k = 2k'-n$)

$$\sum_{2k\geqslant n}\binom{n}{k}|n-2k| = \sum_{2k'\leqslant n}\binom{n}{k'}(n-2k')$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|n-2k| &= 2\left(\sum_{2k\leqslant n}\binom{n}{k}(n-2k)\right)\\ &= 2n\binom{n-1}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} \text{ grâce à la question précédente}\end{aligned}$$

En conclusion, $\mathbb{E}\left[g_{\mathrm{A}}(\mathrm{Z})\right] = \displaystyle\frac{n}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|n-2k| = \frac{n^2}{2^{n-1}}\binom{n-1}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$.

4. 4.a Remarquons que l'inégalité $g_{\mathrm{A}}(\mathrm{Z}) \leqslant \mathrm{M}(\mathrm{A})$ est certaine, ce qui implique que $\mathbb{E}(g_{\mathrm{A}}(\mathrm{Z})) \leqslant \mathrm{M}(\mathrm{A})$. Donc $\mathrm{M}(\mathrm{A}) \geqslant \frac{n^2}{2^{n-1}}\binom{n-1}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$ donc $\underline{\mathrm{M}}(n) = \displaystyle\min_{\mathrm{A}\in\mathfrak{M}_n(\{1,1\})}\mathrm{M}(\mathrm{A}) \geqslant \frac{n^2}{2^{n-1}}\binom{n-1}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$.

4.b Grâce à Stirling, on sait que

$$\binom{2p}{p} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi 2p}\left(\frac{2p}{e}\right)^{2p}}{\left(\sqrt{2\pi p}\left(\frac{p}{e}\right)^{p}\right)^2} \underset{p\to+\infty}{\sim} 2^{2p}\sqrt{\frac{1}{\pi p}}$$

Distinguons suivant la parité de n.

$n=2p$, $\binom{n-1}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} = \binom{2p-1}{p} = \frac{p}{2p}\binom{2p}{p} \underset{p\to+\infty}{\sim} 2^{2p-1}\sqrt{\frac{1}{\pi p}}$

D'où $\dfrac{(2p)^2}{2^{2p-1}}\binom{2p-1}{p} \underset{p\to+\infty}{\sim} \boxed{4\sqrt{\dfrac{1}{\pi}}p^{3/2}}$

$n = 2p+1$, $\binom{2p}{p} \underset{p\to+\infty}{\sim} 2^{2p}\sqrt{\dfrac{1}{\pi p}}$

D'où $\dfrac{(2p+1)^2}{2^{2p}}\binom{2p}{p} \underset{p\to+\infty}{\sim} \boxed{4\sqrt{\dfrac{1}{\pi}}p^{3/2}}$

Finalement, globalement,

$$\binom{n-1}{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor} \underset{n\to+\infty}{\sim} 4\sqrt{\frac{1}{\pi}}\left(\frac{n}{2}\right)^{3/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot n^{3/2}$$

À la question de la partie 6, la constante valait $2\sqrt{\ln 2}$, on a bien $2\sqrt{\ln 2} > \boxed{\mathrm{C} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}}$

(enfin sans calculatrice, $\ln 2 \approx 0,7...$)

Partie IV

1. Cours, une IPP donne $\mathrm{I}_n = n!$

2. Trichons en partant du résultat pour rester naturel...

Posons $\mathrm{J}_n = \displaystyle\int_{-\sqrt{n}}^{+\infty}\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-x\sqrt{n}}\mathrm{d}x$.

1^er^ changement de variable $u = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{n}}$

On a $x = \sqrt{n}\,(u-1)$

On obtient $\mathrm{J}_n = e^n\sqrt{n}\displaystyle\int_0^{+\infty} u^n e^{-nu}\mathrm{d}u$

2^e^ changement de variable $t = nu$

On obtient $\mathrm{J}_n = \dfrac{e^n\sqrt{n}}{n^{n+1}}\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t = \left[\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}\right]^{-1}\mathrm{I}_n$,

d'où le résultat.

Bien sûr on aurait pu écrire directement $x = \dfrac{t}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}$ pour passer de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t$ à J_n.

3. 3.a **Lemme** pour $u \in]-1,0]$, $\ln(1+u) - u = -\dfrac{u^2}{2} + \underbrace{\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}u^n}_{\leqslant 0}$ par le critère spécial des séries alternées.

Il vient pour $x \leqslant 0$,

$$t^2\ln\left(1+\frac{x}{t}\right) - xt \leqslant -t^2\frac{1}{2}\left(\frac{x}{t}\right)^2 = -\frac{x^2}{2}.$$

3.b $x > 0$ est fixé. Suivons l'indication,

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = 2t\ln\left(1+\frac{x}{t}\right) - \frac{x}{1+\frac{x}{t}} - x = t\left[2\ln\left(1+\frac{x}{t}\right) - \frac{x}{t}\left(\frac{1}{1+\frac{x}{t}}+1\right)\right] = t\mathrm{F}\left(\frac{x}{t}\right)$$

avec $\mathrm{F}(u) = 2\ln(1+u) - \dfrac{u(2+u)}{1+u}$. ($x>0$ et $t \geqslant 1$, $u = \dfrac{x}{t} > 0$).

On calcule $\mathrm{F}'(u) = -\dfrac{u^2}{(1+u)^2} \leqslant 0$.

Comme $\mathrm{F}'(0) = \mathrm{F}(0) = 0$, F est négative sur $\mathbb{R}^+$ (et même strictement négative sur $]0,+\infty[$).

Donc $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x) \leqslant 0$ pour $t \geqslant 1$ donc $f(t,x) \leqslant f(1,x)$ ($t \mapsto f(t,x)$ est décroissante sur $[1,+\infty[$).

4. Écrivons $\displaystyle\int_{-\sqrt{n}}^{+\infty}\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-x\sqrt{n}}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)\mathrm{d}x$

avec $g_n : x \mapsto \begin{cases} \left(1+\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-x\sqrt{n}} \text{ pour } x \geqslant -\sqrt{n} \\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$

La suite de fonctions $(g_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers

$$g(x) = \lim_{n\to+\infty} \exp\left(n\ln\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - x\sqrt{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \exp\left(f(\sqrt{n},x)\right) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Montrons que l'hypothèse de domination est vérifiée ($n\geqslant 1$).
◦ Pour $x\in[-\sqrt{n},0]$, $0\leqslant g_n(x) = \exp\left(f(\sqrt{n},x)\right) \leqslant \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ (question 3)a))
◦ Pour $x\in[0,+\infty[$, $0\leqslant g_n(x) = \exp\left(f(\sqrt{n},x)\right)\leqslant \exp(f(1,x))$ (question 3)b))
D'où $0\leqslant g_n(x)\leqslant (1+x)e^{-x}$.
En conclusion, pour tout $n\geqslant 1$,
• pour tout $x\leqslant 0$, $0\leqslant g_n(x)\leqslant \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$, intégrable sur $]-\infty,0]$
• pour tout $x\geqslant 0$, $0\leqslant g_n(x)\leqslant (1+x)e^{-x}$, intégrable sur $[0,+\infty[$
On applique alors le théorème de convergence dominée sur chacun des intervalles $]-\infty,0]$ et $[0,+\infty[$, ainsi,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\int_{-\sqrt{n}}^{+\infty}\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-x\sqrt{n}}\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{0}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}\end{aligned}$$

Avec l'égalité de la question 2), on retrouve l'équivalent de Stirling,

$$n! = \mathrm{I}_n = \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}\int_{-\sqrt{n}}^{+\infty}\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-x\sqrt{n}}\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$$

Partie V

1. • Le vecteur Y est fixé.
Lemme (évident) soit $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $|a|\leqslant n$ et $|b|\leqslant n$ alors $|a+b|\leqslant n$ ou $|a-b|\leqslant n$.
Dit autrement, il existe des $\varepsilon_i\in\{-1,1\}$ tel que $|\varepsilon_1 a+\varepsilon_2 b|\leqslant n$.
Par récurrence, si on a $(x_1,\cdots,x_p)\in\mathbb{Z}^p$ tel que pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, $|x_i|\leqslant n$ alors il existe des $\varepsilon_i\in\{-1,1\}$ tel que $|\varepsilon_1x_1+\cdots+\varepsilon_px_p|\leqslant n$.
Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $|(\mathrm{AY})_i|\leqslant n$. On dispose donc des ε_i tel que $|\varepsilon_1(\mathrm{AY})_1+\cdots+\varepsilon_p(\mathrm{AY})_p|\leqslant n$.
Posons $\mathrm{X} = {}^t(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_p)$. On a ainsi $|{}^t\mathrm{XAY}|\leqslant n$.
On a donc montré que $\min\{|{}^t\mathrm{XAY}| \ \mid\ \mathrm{X}\in\{-1,1\}^n\}\leqslant n$.
• Comme S(A) est symétrique,

$$\min(\mathrm{S(A)}\cap\mathbb{N}) = \min\left(|s| \ \mid\ s\in\mathrm{S(A)}\right)$$

D'où

$$m(\mathrm{A}) = \min\left\{\underbrace{\min\left\{\left|{}^t\mathrm{XAY}\right| \ \mid\ \mathrm{X}\in\{-1,1\}^n\right\}}_{\leqslant n} \ \mid\ \mathrm{Y}\in\{-1,1\}^n\right\}\leqslant n$$

2. Soit $\varepsilon>0$. Posons $t=\sqrt{2n\ln(2n)}+\varepsilon$ de sorte que $2n\exp\left(-\frac{t^2}{2n}\right)<1$.

Introduisons **une variable aléatoire uniforme Z comme à la question III.2).**
Utilisons l'**inégalité de Hoeffding établie à la question II)3)**, on a à $i\in[\![1,n]\!]$ fixé,

$$\mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^n a_{i,j}\mathrm{Z}_j\geqslant t\right)\leqslant\exp\left(-\frac{t^2}{2n}\right) \text{ où } \mathrm{S}_n=\sum_{j=1}^n\underbrace{a_{i,j}\mathrm{Z}_j}_{=\mathrm{U}_j\text{ de la partie II}}.$$

De même avec $-\mathrm{S}_n$, $\mathbb{P}\left(-\sum_{j=1}^n a_{i,j}\mathrm{Z}_j\geqslant t\right)\leqslant\exp\left(-\frac{t^2}{2n}\right)$, donc, finalement,

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\left|\sum_{j=1}^n a_{i,j}\mathrm{Z}_j\right|\geqslant t\right)\leqslant 2\exp\left(-\frac{t^2}{2n}\right)}$$

Il vient alors,

$$\mathbb{P}\left(\exists i \in [\![1,n]\!] \quad \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \mathrm{Z}_j\right| \geqslant t\right) \leqslant 2n \exp\left(-\frac{t^2}{2n}\right) < 1$$

Ainsi, $\mathbb{P}\left(\forall i \in [\![1,n]\!] \quad \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \mathrm{Z}_j\right| < t\right) \neq 0$ donc $\left\{\forall i \in [\![1,n]\!] \quad \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \mathrm{Z}_j\right| < t\right\} \neq \emptyset$.

Il existe $\omega \in \left\{\forall i \in [\![1,n]\!] \quad \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \mathrm{Z}_j\right| < t\right\}$. On dispose de $\mathrm{Y} = \mathrm{Z}(\omega)$ tel que $\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \mathrm{Y}_j\right| < t$ donc d'un vecteur $\mathrm{X} \in \{-1,1\}^n$ tel que $|{}^t\mathrm{XAY}| < t$ en reprenant l'idée du lemme de la question **V.1** (on remplace le majorant n par t).

Donc $m(\mathrm{A}) < t$, cette inégalité étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient en faisant tendre ε vers 0, $\boxed{m(\mathrm{A}) \leqslant \sqrt{2n\ln(2n)}}$