

Centrale Maths 1 PC 2024 : corrigé

1) On distingue deux cas :

- Si $\alpha \in \mathbb{N}$, alors $\forall k \geq n+1, a_k = 0$. En particulier, pour tout réel, la suite $(a_n x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0,

donc est bornée. Ainsi, $R\left(\sum_n a_n x^n\right) = +\infty$ si $\alpha \in \mathbb{N}$

- Si $\alpha \notin \mathbb{N}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0$. On peut donc utiliser la règle de d'Alembert : pour $n \geq \alpha$,

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|\alpha - n|}{n+1} = \frac{n - \alpha}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1. \text{ Donc } R\left(\sum_n a_n x^n\right) = 1 \text{ si } \alpha \notin \mathbb{N}.$$

2) Pour $x \in]-R, R[$, on sait que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = (1+x)^\alpha$

3) Soit $x \in]-1, 1[\subset]-R, R[$. On applique le résultat précédent pour $\alpha = \frac{1}{2}$. On calcule

$$a_n = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2} - k \right) = \frac{1}{n!} (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2k-1)}{2} = \frac{1}{n!} (-1)^n \left(-\frac{1}{2^n} \right) \left(\prod_{k=1}^n (2k-1) \right) \left(\frac{1}{2n-1} \right).$$

$$\text{Donc } a_n = \frac{1}{2^n (2n-1)n!} (-1)^{n+1} \frac{\prod_{k=1}^{2n} k}{\prod_{k=1}^n 2k} = \frac{1}{2^{2n} (2n-1)n!} (-1)^{n+1} \frac{(2n)!}{n!} = (-1)^{n+1} b_n.$$

On conclut bien $\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} b_n x^n$

4) On utilise **la formule de Stirling** : $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e} \right)^n$.

$$\text{Donc } b_n = \frac{1}{2^{2n} (2n-1)n!} \frac{(2n)!}{n!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2^{2n+1} n} \frac{\sqrt{4n\pi}}{2n\pi} \left(\frac{2n}{e} \right)^{2n} \left(\frac{e}{n} \right)^{2n}.$$

$$\text{Donc } b_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n\sqrt{n\pi}} = \frac{1}{2n^{3/2}\sqrt{\pi}} > 0$$

Comme $\frac{3}{2} > 1$, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n^{3/2}\sqrt{\pi}}$ converge, donc $\sum_{n \geq 0} b_n$ converge également (la suite $\left(\frac{1}{2n^{3/2}\sqrt{\pi}} \right)$ est en effet à valeurs positives).

Dès lors, $\sum_{n \geq 0} (-1)^{n+1} b_n$ est absolument convergente, donc convergente.

5) On prouve **la convergence normale** de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} (-1)^{n+1} b_n x^n$ sur $[-1, 1]$.

On note pour $x \in [-1, 1]$: $f_n(x) = (-1)^{n+1} b_n x^n$. Alors $\|f_n\|_{\infty, [-1, 1]} = b_n$

On a prouvé en Q4) que $\sum_{n \geq 0} b_n$ converge.

Donc $\sum_{n \geq 0} (-1)^{n+1} b_n x^n$ converge normalement donc uniformément sur $[-1, 1]$

De plus, chaque f_n est continue sur $[-1, 1]$. Donc si on note $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} b_n x^n$ pour $x \in [-1, 1]$,

alors S est continue sur $[-1, 1]$. Donc $S(1) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} S(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \sqrt{1+x} = \sqrt{2}$

Donc
$$S(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} b_n = \sqrt{2}$$

- 6) Avec le résultat de Q5), on sait que pour $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{2} = \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} b_k + R_n$, avec $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+1} b_k$.

On cherche à utiliser la majoration du reste du **théorème spécial sur les séries alternées**.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_k = (-1)^{k+1} b_k$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $b_k > 0$, donc la suite $((-1)^{k+1} b_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est alternée.

On a vu en Q4) que $b_n \sim \frac{1}{2n^{3/2}\sqrt{\pi}}$, donc (b_n) converge vers 0.

Montrons que $(b_n)_{n \geq 1}$ est décroissante. On calcule pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n-1)}{4(2n+1)(n+1)^2} = \frac{(2n-1)}{2(n+1)} \leq 1, \text{ donc } b_{n+1} \leq b_n, \text{ donc la suite } (b_n)_{n \geq 1} = (|U_n|)_{n \geq 1} \text{ est}$$

décroissante.

On a donc d'après le théorème spécial sur les séries alternées : $|R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+1} b_k \right| \leq |b_{n+1}| = b_{n+1}$.

Ainsi, $|n^{3/2} R_n| \leq n^{3/2} b_{n+1}$. Or $b_n \sim \frac{1}{2n^{3/2}\sqrt{\pi}}$, donc $n^{3/2} b_{n+1} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$ et comme toute suite

convergente est bornée, $(n^{3/2} R_n)$ l'est aussi et
$$R_n = \sqrt{2} - \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} b_k = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

- 7) On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ $H(n)$: « $c_n(a)$ est bien défini et $c_n(a) > 0$ ».

- $H(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H(n)$ est vraie. Alors $c_n(a) \neq 0$, donc $c_{n+1}(a)$ est bien défini. De plus, comme

$$c_n(a) > 0, \text{ on a bien } c_{n+1}(a) = \frac{1}{2} \left(c_n(a) + \frac{a}{c_n(a)} \right) > 0. \text{ Donc } H(n+1) \text{ est vraie.}$$

On a donc bien montré $H(n)$ pour tout entier naturel n .

- 8) Soit $n \in \mathbb{N}$. On calcule $c_{n+1}(a)^2 - a = \frac{1}{4} \left(c_n(a) + \frac{a}{c_n(a)} \right)^2 - a$.

$$\text{Donc } c_{n+1}(a)^2 - a = \frac{1}{4} \left(c_n^2(a) - 2a + \frac{a^2}{c_n^2(a)} \right) = \frac{1}{4} \left(c_n(a) - \frac{a}{c_n(a)} \right)^2.$$

Donc
$$c_{n+1}(a)^2 - a = \frac{1}{4c_n^2(a)} (c_n^2(a) - a)^2.$$

Donc pour $n \geq 1$ $c_n(a)^2 - a \geq 0$. On a donc $c_n(a)^2 \geq (\sqrt{a})^2$.

Comme $c_n(a) > 0$ et $a \in \mathbb{R}_+$, on conclut que si $n \geq 1$, alors
$$c_n(a) \geq \sqrt{a}$$

- 9) On calcule pour $n \geq 1$: $c_{n+1}(a) - c_n(a) = \frac{1}{2} \left(-c_n(a) + \frac{a}{c_n(a)} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{a - c_n^2(a)}{c_n(a)} \right) \leq 0$ puisque $c_n(a)^2 \geq a$.

Donc la suite $(c_n(a))_{n \geq 1}$ est décroissante et minorée par $\sqrt{a}$.

Donc $(c_n(a))$ est convergente et tend vers une limite $c \geq \sqrt{a}$.

En passant à la limite, il vient $c = \frac{1}{2} \left(c + \frac{a}{c} \right)$, donc $c = \frac{a}{c}$, puis $c^2 = a$ et comme c est positive, on a nécessairement $c = \sqrt{a}$.

Donc $\boxed{(c_n(a))_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } \sqrt{a}}$

10) On sait que $c_1(2) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{1} \right)$, donc $\boxed{c_1(2) = \frac{3}{2}}$

De plus, si $n \in \mathbb{N}^*$, il vient avec Q8) : $c_n(2)^2 - 2 = \frac{1}{4c_{n-1}^2(2)} (c_{n-1}^2(2) - 2)^2$.

On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ $H(n)$: « $c_n(2)^2 - 2 \leq 8 \left(\frac{1}{32} \right)^{2^{n-1}}$ ».

- $H(1)$ est vraie car $c_1(2)^2 - 2 = \frac{1}{4} \leq \frac{8}{32}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $H(n)$ est vraie. Alors $c_{n+1}(2)^2 - 2 = \frac{1}{4c_n^2(2)} (c_n^2(2) - 2)^2$.

Avec Q8), on sait que $c_n(2) \geq \sqrt{2}$, donc que $0 \leq c_n(2)^2 - 2 \leq 8 \left(\frac{1}{32} \right)^{2^{n-1}}$.

Ainsi, $\frac{1}{4c_n^2(2)} \leq \frac{1}{8}$ et $0 \leq (c_n^2(2) - 2)^2 \leq 8^2 \left(\frac{1}{32} \right)^{2 \cdot 2^{n-1}}$

Donc $c_{n+1}(2)^2 - 2 \leq 8 \left(\frac{1}{32} \right)^{2^n}$ et $H(n+1)$ est vraie.

$\boxed{\text{On a donc bien montré } c_n(2)^2 - 2 \leq 8 \left(\frac{1}{32} \right)^{2^{n-1}} \text{ pour tout entier naturel } n \in \mathbb{N}^* .}$

Dès lors, il vient pour $n \in \mathbb{N}^*$: $(c_n(2) - \sqrt{2})(c_n(2) + \sqrt{2}) \leq 8 \left(\frac{1}{32} \right)^{2^{n-1}}$, donc comme $c_n(2) \geq \sqrt{2}$, on a

$c_n(2) + \sqrt{2} \geq 1$ et $0 \leq c_n(2) - \sqrt{2} \leq 8 \left(\frac{1}{32} \right)^{2^{n-1}}$.

Ainsi, $(32)^{2^{n-1}} (c_n(2) - \sqrt{2})$ est bornée, et on a bien $\boxed{\sqrt{2} = c_n(2) + O \left(\left(\frac{1}{32} \right)^{2^{n-1}} \right)}$

11) On note $U_n = \frac{1}{n^{3/2}}$ et $V_n = \left(\frac{1}{32} \right)^{2^{n-1}} = \exp(-(2^n - 1) \ln(32))$. Donc

$$\frac{V_n}{U_n} = n^{3/2} \exp(-(2^n - 1) \ln(32)) = \exp \left(-(2^n - 1) \ln(32) + \frac{3}{2} \ln(n) \right) = 32 \exp \left(-2^n (\ln(32) - \frac{3}{2} \frac{\ln(n)}{2^n}) \right).$$

Donc $\frac{V_n}{U_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. C'est donc la suite $(V_n) = \left(\left(\frac{1}{32} \right)^{2^{n-1}} \right)$ qui converge le plus vite vers 0.

12) On a vu grâce à Q10) que $0 \leq c_n(2) - \sqrt{2} \leq 8 \left(\frac{1}{32} \right)^{2^{n-1}}$. On veut une valeur approchée de $c_n(2)$ à 10^{-10}

près. Il suffit pour cela d'avoir

$$8 \left(\frac{1}{32} \right)^{2^{n-1}} \leq 10^{-10} \Leftrightarrow \ln(2^3) - 2^{n-1} \ln(2^5) \leq -10(\ln 5 + \ln 2) \Leftrightarrow 5 \cdot 2^{n-1} \ln(2) \geq 13 \ln(2) + 10 \ln(5).$$

$$\text{Ceci équivaut à } n \geq \frac{1}{\ln(2)} \ln \left(\frac{13 \ln(2) + 10 \ln(5)}{5 \ln(2)} \right) + 1.$$

On peut donc écrire le programme suivant :

```
import math as math
n = math.floor(1 / log(2) * log(13 * log(2) + 10 * log(5)) / 5 * log(2)) + 2
c = 1
for k in range(n) :
    c = (1 / 2) * (c + 2 / c)
return(c)
```

13) Les éléments de $O(2)$ sont les matrices de rotations de la forme $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ et les symétries

de la forme $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$, avec $\theta \in [0, 2\pi]$ (ou $\theta \in \mathbb{R}$).

14) Soit $\theta \in [0, 2\pi]$ (ou $\theta \in \mathbb{R}$). On calcule $S_\theta^2 = I_2$ (ce qui n'est pas surprenant pour une symétrie), et

$$R_\theta^2 = R_\theta R_\theta = R_{2\theta} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}. \text{ Donc } R_\theta^2 = I_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2\theta = 1 \\ \sin 2\theta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta \equiv 0[\pi] \\ \theta \equiv 0[\pi/2] \end{cases}.$$

Donc $R_\theta^2 = I_2 \Leftrightarrow R_\theta = I_2$ ou $R_\theta = -I_2$

Les éléments de $O(2)$ qui sont racines carrées de I_2 sont $I_2, -I_2$ et les $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$

Il y a donc une infinité de racines carrées de I_2 dans $O(2)$, donc a fortiori dans $M_2(\mathbb{R})$.

15) Soit $A \in S_q(\mathbb{R})$. Alors :

$$A \in S_q^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$$

16) Soit $M \in S_q^+(\mathbb{R})$. Alors par théorème spectral, elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et il existe une matrice

$$D = \text{diag}(d_1, \dots, d_q), \quad P \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ telles que } M = P D P^T = P D P^{-1}$$

On sait alors que $Sp(M) = Sp(D) \subset \mathbb{R}_+$.

Donc on pose $\Delta = \text{diag}(\sqrt{d_1}, \dots, \sqrt{d_q})$ et $B = P \Delta P^T = P \Delta P^{-1}$.

Il vient $B^2 = P \Delta^2 P^{-1} = M$.

De plus, $B^T = P \Delta P^T = B$, donc B est symétrique réelle.

En outre, $Sp(B) = \{\sqrt{d_1}, \dots, \sqrt{d_q}\} \subset \mathbb{R}_+$, donc $B \in S_q^+(\mathbb{R})$.

On a bien prouvé l'existence de $B \in S_q^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = M$

17) Question nettement plus difficile et presque introuvable pour ceux qui ne l'ont pas déjà vue.

On suppose qu'il existe une autre matrice $C \in S_q^+(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = M$.

Alors $CM = MC = C^3$. On note c, m canoniquement associées respectivement à C et à M .

On a donc $c \circ m = m \circ c$, donc les sous-espaces propres de m sont stables par c .

Or M est diagonalisable (car symétrique réelle), et $\bigoplus_{d \in Sp(m)} E_d(m) = \mathbb{R}^q$.

Pour $d \in Sp(m)$, on note c_d l'endomorphisme induit par c sur $E_d(m)$.

Comme $C \in S_q^+(\mathbb{R})$, c est diagonalisable, donc c_λ l'est aussi, et sa matrice dans une certaine base de

$E_d(m)$ est $C_d = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_j)$, avec $j = \dim(E_d(m))$.

Comme $C^2 = M$, on sait que $c \circ c = m$ et pour $x \in E_d(m)$, $c_d \circ c_d(x) = m(x) = dx$.

Donc $C_d^2 = \text{diag}(\alpha_1^2, \dots, \alpha_j^2) = d I_j$ et $\alpha_1^2 = \dots = \alpha_j^2 = d$.

Comme $C \in S_q^+(\mathbb{R})$, avec **Q15**, $Sp(C) \subset \mathbb{R}_+$.

Or si $\alpha \in Sp(c_d)$, il existe $x \neq 0_E$ tel que $c_d(x) = \alpha x$, donc $c(x) = \alpha x$ et $\alpha \in Sp(C) \subset \mathbb{R}_+$.

Donc $Sp(C_d) \subset \mathbb{R}_+$ et comme $\alpha_1^2 = \dots = \alpha_j^2 = d$, il vient $\alpha_1 = \dots = \alpha_j = d$.

Donc nécessairement, $\boxed{c_d = c_{E_d(m)} = \sqrt{d} Id_{E_d(m)}}.$

Dès lors, si $Sp(M) = \{d_1, \dots, d_s\}$, et $x = x_1 + \dots + x_s \in \bigoplus_{k=1}^s E_{d_k}(m) = \mathbb{R}^d$, avec pour $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$, $x_k \in E_{d_k}(m)$,

alors nécessairement $c(x) = \sqrt{d_1} x_1 + \dots + \sqrt{d_q} x_q$.

c est donc déterminé de manière unique, et C est nécessairement la matrice de c dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$. $\boxed{\text{On a donc bien l'unicité de } C \in S_q^+(\mathbb{R}) \text{ telle que } C^2 = M}.$

18) On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$

$H(n)$: « M_n est bien définie et $M_n = P \text{diag}(c_n(\lambda_1), \dots, c_n(\lambda_q)) P^T$ ».

- $H(0)$ est vraie car $\text{diag}(c_0(\lambda_1), \dots, c_0(\lambda_q)) = I_q$, et $M_0 = P I_q P^T = I_q$ car $P \in O(q)$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H(n)$ est vraie. Alors **d'après Q7**, $\forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket c_n(\lambda_j) > 0$, donc

$M_n = P \text{diag}(c_n(\lambda_1), \dots, c_n(\lambda_q)) P^T$ est inversible et M_{n+1} est bien définie.

De plus, $M_n^{-1} = P \text{diag}\left(\frac{1}{c_n(\lambda_1)}, \dots, \frac{1}{c_n(\lambda_q)}\right) P^{-1}$ (avec $P^T = P^{-1}$ puisque $P \in O(q)$)

Donc $MM_n^{-1} = P \text{diag}\left(\frac{\lambda_1}{c_n(\lambda_1)}, \dots, \frac{\lambda_q}{c_n(\lambda_q)}\right) P^{-1}$

Donc $M_{n+1} = \frac{1}{2} P \text{diag}\left(c_n(\lambda_1) + \frac{\lambda_1}{c_n(\lambda_1)}, \dots, c_n(\lambda_q) + \frac{\lambda_q}{c_n(\lambda_q)}\right) P^{-1}$.

Donc $M_{n+1} = P \text{diag}(c_{n+1}(\lambda_1), \dots, c_{n+1}(\lambda_q)) P^T$ et $H(n+1)$ est vraie.

$\boxed{\text{On a donc bien prouvé } H(n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}.$

19) L'application $\Psi : N \mapsto PNP^{-1}$ est linéaire en dimension finie, donc continue.

On note pour $n \in \mathbb{N}$: $D_n = \text{diag}(c_n(\lambda_1), \dots, c_n(\lambda_q))$. Cette suite de matrices converge coefficient par coefficient vers $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_q})$ **d'après Q9**.

Donc $\boxed{M_n = P D_n P^T = \Psi(D_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Psi(\Delta) = P \Delta P^T = \sqrt{M}}$

20) Comme f' est continue sur I et qu'elle ne s'annule pas, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a $\forall x \in I, f'(x) > 0$ ou $\forall x \in I, f'(x) < 0$ (si f' prenait une valeur positive et une valeur négative, elle s'annulerait forcément par continuité).

Donc f est strictement monotone sur I et $\boxed{f \text{ s'annule au plus une fois sur } I}.$

21) $|f'|$ et $|f''|$ sont des fonctions continues sur le segment $J_r = [c-r, c+r]$. Par **théorème des bornes atteintes**, elles admettent toutes deux un minimum et un maximum sur J_r .

Donc $s_r = \sup_{J_r} |f''| = \max_{J_r} |f''|$ et $i_r = \inf_{J_r} |f''| = \min_{J_r} |f''|$ existent bien.

De plus, comme $|f''|$ ne s'annule pas, son minimum sur $J_r = [c-r, c+r]$ est strictement positif.

Donc $i_r > 0$

22) On fixe $r_0 > 0$ tel que $J_{r_0} = [c-r_0, c+r_0] \subset I$.

On a alors pour $r < r_0$: $J_r \subset J_{r_0}$, donc $s_r = \max_{J_r} |f''| \leq s_{r_0}$ et $i_r = \min_{J_r} |f''| \geq i_{r_0}$.

Donc $K_r = \frac{s_r}{2i_r} \leq K_{r_0}$. Donc $0 \leq rK_r \leq rK_{r_0}$.

Or $rK_{r_0} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$, donc par définition de limite, pour $r > 0$ assez petit, on a $0 \leq rK_r \leq rK_{r_0} < 1$.

Donc il existe $r > 0$ tel que $0 \leq rK_r < 1$

23) On applique l'**inégalité de Taylor Lagrange** à l'ordre $n=1$ entre $a=c_n$ et $b=c$. La fonction f est

effet de classe C^2 . On obtient $|f(c) - f(c_n) - (c-c_n)f'(c_n)| \leq \frac{1}{2}s_r(c-c_n)^2$.

Or $c_{n+1} = c_n - \frac{f(c_n)}{f'(c_n)}$, donc $c - c_{n+1} = c - c_n + \frac{f(c_n)}{f'(c_n)}$ et $(c - c_{n+1})f'(c_n) = (c - c_n)f'(c_n) + f(c_n)$.

Donc en remplaçant, comme $f(c) = 0$: $|(c - c_{n+1})f'(c_n)| \leq \frac{1}{2}s_r(c - c_n)^2$.

Donc $|c - c_{n+1}| \leq \frac{1}{2|f'(c_n)|}s_r(c - c_n)^2 \leq \frac{s_r}{2i_r}(c - c_n)^2$.

On a donc bien $|c_{n+1} - c| \leq K_r |c - c_n|^2$

Dès lors, comme $c_n \in J_r$, il vient $|c - c_n| \leq r$. Donc $|c_{n+1} - c| \leq (K_r |c - c_n|)|c - c_n| \leq 1 \cdot r$.

Donc $c_{n+1} \in J_r = \{x \in \mathbb{R}, |x - c| \leq r\}$

24) On procède **par récurrence** sur $n \in \mathbb{N}$ et on prouve

$H(n)$: « $c_n \in J_r$ et $|c - c_n| \leq \frac{(K_r |c - c_0|)^{2^n}}{K_r}$ ».

• $H(0)$ est vraie car $c_0 \in J_r$ et $|c - c_0| \leq |c - c_0|$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H(n)$ est vraie. Alors $c_n \in J_r$ et $|c - c_n| \leq \frac{(K_r |c - c_0|)^{2^n}}{K_r}$.

Donc avec **Q23**, $c_{n+1} \in J_r$ et $|c_{n+1} - c| \leq K_r \frac{(K_r |c - c_0|)^{2^{n+1}}}{K_r^2}$.

Donc $|c_{n+1} - c| \leq \frac{(K_r |c - c_0|)^{2^{n+1}}}{K_r}$

Donc $H(n+1)$ est vraie.

On a donc bien prouvé $|c - c_n| \leq \frac{(K_r |c - c_0|)^{2^n}}{K_r}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si $c_0 \in J_r$, on a donc $0 \leq K_r |c - c_0| \leq K_r r < 1$, donc par encadrement, $c - c_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $c_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} c$

25) On écrit la procédure demandée :

```
def newton(c0, f, df) :
    c = c0
    for k in range(50) :
        c = c - (f(c) / df(c))
        if abs(f(c)) < 10 * (-10) :
            return(c)
    return('None')
```

26) Soit $\mu \in \mathbb{C}$ une racine de P' . On procède par l'absurde et on suppose que $M - \mu I_q$ n'est pas inversible.

Alors $\mu \in Sp(M) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$, donc μ est aussi racine de P .

C'est absurde car toutes les racines de P sont de multiplicité 1, alors que comme $P(\mu) = P'(\mu) = 0$, μ est racine d'ordre au moins 2 de P .

Donc $M - \mu I_q$ est inversible.

De plus, $P(X) = \prod_{i=1}^s (X - \lambda_i) = X^s + Q$, avec $\deg(Q) < s$. Donc $P'(X) = sX^{s-1} + Q'$

On décompose P' en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$: $P' = s \prod_{i=1}^{s-1} (X - \mu_i)$, où les racines

$\mu_1, \dots, \mu_{s-1}$ de P' ne sont nécessairement distinctes.

On utilise que si $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, $PQ(M) = P(M)Q(M)$ que l'on généralise au produit de plusieurs polynômes (cela se prouverait par récurrence).

Alors $P'(M) = s \prod_{i=1}^{s-1} (M - \mu_i I_q)$ est inversible par produit de matrices inversibles, avec $s \in \mathbb{N}^*$.

27) On sait que $\chi_M = \prod_{i=1}^s (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$, avec pour $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, $1 \leq \alpha_i = \text{mult}(\lambda_i, P)$.

Comme $\deg(\chi_M) = q$, on sait que $\sum_{i=1}^s \alpha_i = q$, donc $\forall i \in \llbracket 1, s \rrbracket, \alpha_i \leq q$

Dès lors, $P^q = \prod_{i=1}^s (X - \lambda_i)^{\alpha_i} \prod_{i=1}^s (X - \lambda_i)^{q - \alpha_i} = \chi_M \prod_{i=1}^s (X - \lambda_i)^{q - \alpha_i}$ et χ_M divise P^q .

On a donc $(P(M))^q = P^q(M) = \chi_M(M) \prod_{i=1}^s (M - \lambda_i I_q)^{q - \alpha_i}$.

D'après le **théorème de Cayley-Hamilton**, on conclut $(P(M))^q = 0$.

Donc $P(M)$ est nilpotente.

28) On admet qu'il existe $B_n \in \mathbb{C}[M]$, $P(M_n) = P(M)^{2^n} B_n$.

Or $(P(M))^q = 0$ avec **Q27**, et il existe $p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, 2^n \geq q$.

Donc si $n \geq p$, $P(M_n) = P(M)^q P(M)^{2^n - q} B_n = 0$.

On a donc pour $n \geq p$: $M_{n+1} = M_n$. Donc (M_n) est stationnaire.

29) On procède par **récurrence** sur $n \in \mathbb{N}$ et on prouve

$H(n)$: « $MM_n = M_n M$ ».

- $H(0)$ est vraie car $M_0 = M$
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H(n)$ est vraie.

Alors $MM_{n+1} = MM_n - M P(M_n) P'(M_n)^{-1}$ et $M_{n+1} M = M_n M - P(M_n) P'(M_n)^{-1} M$.

Il reste à montrer que $M P(M_n) P'(M_n)^{-1} = P(M_n) P'(M_n)^{-1} M$.

$$P(M_n) = \prod_{i=1}^s (M_n - \lambda_i I_q) \cdot M (M_n - \lambda_1 I_q) \dots (M_n - \lambda_s I_q) = (M_n - \lambda_1 I_q) M (M_n - \lambda_2 I_q) \dots (M_n - \lambda_s I_q).$$

On obtient donc $M P(M_n) = P(M_n) M$.

Enfin, $M P'(M_n)^{-1} = P'(M_n)^{-1} M \Leftrightarrow P'(M_n) M = M P'(M_n)$ en multipliant par $P'(M_n)$ des deux côtés. Or on a bien $P'(M_n) M = M P'(M_n)$ (même preuve que pour $M P(M_n) = P(M_n) M$).

Donc on a bien $M P(M_n) P'(M_n)^{-1} = P(M_n) P'(M_n)^{-1} M$ et $MM_{n+1} = M_{n+1} M$

Donc $H(n+1)$ est vraie.

On a donc bien prouvé $\forall n \in \mathbb{N}, MM_n = M_n M$

30) Soit $A = \lim_{n \rightarrow +\infty} M_n$.

On sait **d'après Q28** que (M_n) est stationnaire : il existe $p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, P(M_n) = 0$.

On a alors pour $n \geq p$: $M_n = M_{n+1} = A$ (les termes d'une suite stationnaire sont égaux à sa limite à partir d'un certain rang). Donc $P(A) = 0$ et P est scindé à racines simples.

Donc A annule un polynôme scindé à racines simples et A est diagonalisable.

31) On note $N = M - A$. Alors $AN = AM - A^2$.

Or pour $n \in \mathbb{N}$, **d'après Q29**, $MM_n = M_n M$. En particulier, $MM_p = M_p M$, donc comme $M_p = A$, il vient $AM = MA$, donc $AN = NA$

$$\text{On calcule alors } \sum_{k=0}^{p-1} (M_{k+1} - M_k) = - \sum_{k=0}^{p-1} P(M_k) P'(M_k)^{-1} = - \sum_{k=0}^{p-1} P(M)^{2^k} B_k P'(M_k)^{-1}.$$

Il vient donc $A - M = M_p - M = P(M) \left(- \sum_{k=0}^{p-1} P(M)^{2^k - 1} B_k P'(M_k)^{-1} \right)$, donc $N = P(M)Q$, avec

$$Q = - \sum_{k=0}^{p-1} P(M)^{2^k - 1} B_k P'(M_k)^{-1}. \text{ De plus, } P(M) \text{ commute avec } M, \text{ donc avec } B_k \in \mathbb{C}[M].$$

En outre, $M P'(M_k)^{-1} = P'(M_k)^{-1} M \Leftrightarrow P'(M_k) M = M P'(M_k)$, ce qui est vrai car **d'après Q29**, M et M_k commutent. Donc $P(M)$ commute avec $P'(M_k)^{-1}$.

Dès lors, $P(M)Q = QP(M)$, et $N^q = (P(M)Q)^q = (P(M))^q (Q)^q = 0$ **d'après Q27**.

Donc $N^q = 0$ et N est nilpotente.

32) On utilise l'indication : on sait que $\sqrt{1+x} = R_q(x) + o(x^q)$, avec $R_q(x) = \sum_{k=0}^q a_k x^k$ en reprenant les

notations du début du problème, c'est-à-dire $a_k = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2} - i \right)$.

$$\text{Alors soit } P = (1+X) - R_q^2(X) = \sum_{k=0}^{2q} c_k X^k \in \mathbb{R}[X].$$

Soit $m = \min \{k \in \llbracket 0, 2d \rrbracket, c_k \neq 0\}$ (m existe car on n'a pas $R_q(X) = 0$ puisque X^q ne divise pas $1+X$).

$$\text{Alors } P(x) = (1+x) - R_q^2(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} c_m x^m$$

$$\text{De plus, } P(x) = (1+x) - R_q^2(x) = \left(\sqrt{1+x} - R_q(x) \right) \left(\sqrt{1+x} + R_q(x) \right).$$

Donc $P(x) = o(x^q)$ et $\frac{P(x)}{x^q} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. Or $\frac{P(x)}{x^q} \xrightarrow{x \rightarrow 0} c_m x^{m-q}$, donc $m > q$.

En particulier, $P = (1+X) - R_q^2(X) = X^q \sum_{k=1}^q c_k X^k$, donc $X^q \text{ divise } (1+X) - R_q^2(X)$.

On aurait aussi pu prendre $R_q(x) = \sum_{k=0}^{q-1} a_k x^k$.

- 33) Soit $N \in M_q(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente, vérifiant $N^k = 0$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. Alors $Sp(N) = \{0\}$ (en effet, si $\lambda \in Sp(N)$ et $X \neq 0$, on doit avoir $N^k X = \lambda^k X$, donc nécessairement $\lambda^k = 0$, et χ_N est scindé dans $\mathbb{C}[X]$, donc N possède nécessairement une valeur propre au moins).

Donc avec Cayley-Hamilton, $\chi_N(N) = N^q = 0$.

Dès lors, $I_q + N - R_q(N)^2 = N^q S$, avec $S \in M_q(\mathbb{C})$.

Comme $N^q = 0$, $R_q(N)^2 = I_q + N$.

Une racine carrée de $I_q + N$ est donc $R_q(N)$.

- 34) M est trigonalisable dans $M_q(\mathbb{R})$ donc ses valeurs propres sont réelles et $P(X) = \prod_{i=1}^s (X - \lambda_i) \in \mathbb{R}[X]$.

Dès lors, on peut prouver par récurrence que pour tout entier naturel n , $M_n \in M_q(\mathbb{R})$.

En effet, si $M_n \in M_q(\mathbb{R})$, $P(M_n) \in M_q(\mathbb{R})$ et $P'(M_n) \in M_q(\mathbb{R})$ car $P' \in \mathbb{R}[X]$.

Puis $P'(M_n)$ est inversible dans $M_q(\mathbb{R})$ en reprenant le raisonnement de **Q26**.

Or on sait avec **Q28** que $A = M_p$, avec $\forall n \geq p, M_n = M_{n+1} = A$.

Donc $A \in M_q(\mathbb{R})$ et $N = M - A \in M_q(\mathbb{R})$.

De plus, on a toujours $P(A) = P(M_p) = 0$, et $P \in \mathbb{R}[X]$.

Donc A annule un polynôme scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$. A est diagonalisable dans $M_q(\mathbb{R})$.

- 35) On vient de prouver que $P(A) = P(M_p) = 0$, avec $P(X) = \prod_{i=1}^s (X - \lambda_i)$.

Les valeurs propres de A sont alors parmi les racines de P , c'est-à-dire les valeurs propres de M .

Donc $Sp(A) \subset Sp(M) \subset \mathbb{R}_+^*$.

- 36) On sait que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe une matrice $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_q)$, $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que $A = P D P^{-1}$.

On sait alors que $Sp(A) = Sp(D) = \{d_1, \dots, d_q\} \subset \mathbb{R}_+^*$.

Donc on pose $\Delta = \text{diag}(\sqrt{d_1}, \dots, \sqrt{d_q})$ et $A' = P \Delta P^{-1}$.

Il vient $(A')^2 = P \Delta^2 P^{-1} = A$. On a ainsi trouvé une racine carrée de A (mais plus forcément la seule ici).

On pose alors $A_0 = I_q$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} = \frac{1}{2}(A_n + A A_n^{-1})$ (méthode de Héron d'Alexandrie).

De même qu'en Q18, on montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que A_n est bien définie et que pour tout entier n , $A_n = P \text{diag}(c_n(d_1), \dots, c_n(d_q)) P^{-1}$. Alors (A_n) converge vers A' .

On sait que $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+^*$, donc A est inversible.

Alors $M = A + N = A(I_q + A^{-1}N)$. Or avec **Q31**, $AN = NA$, donc $A^{-1}N = NA^{-1}$.

Donc $(A^{-1}N)^q = (A^{-1})^q (N)^q = 0$ et $A^{-1}N$ est nilpotente et **d'après Q33**, $R_q(A^{-1}N)$ est une racine carrée de $I_q + A^{-1}N$

On pose $C = A'R_q(A^{-1}N)$ Vérifions que $C^2 = M$.

Il suffit pour cela de justifier que A' et $R_q(A^{-1}N)$ commutent.

Comme $R_q(A^{-1}N)$ est un polynôme en $A^{-1}N$, il suffit de prouver que $A'(A^{-1}N) = (A^{-1}N)A'$.

On a tout d'abord $AA' = (A')^3 = A'A$, donc en multipliant à droite et à gauche par A^{-1} , on a directement $A(A')^{-1} = (A')^{-1}A$. Donc $A'(A^{-1}N) = A^{-1}(A'N)$.

Il reste à montrer que $A'N = NA'$.

On sait que $A = PDP^{-1}$ et que $A' = P\Delta P^{-1}$, où $\Delta = \text{diag}(\sqrt{d_1}, \dots, \sqrt{d_q})$ et $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_q)$

On note a, a', n canoniquement associés respectivement à A, A', N . On note B la base canonique de $\mathbb{R}^d$ et B_1 une base de vecteurs propres de a de $\mathbb{R}^d$ telle que P soit la matrice de passage de B à B_1 . La matrice de a dans la base B_1 est alors D , et celle de a' est alors Δ .

Si $d \in Sp(D) \subset \mathbb{R}_+^*$, et que $E_d(a) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_j)$, alors $E_{\sqrt{d}}(a') = \text{Vect}(e_1, \dots, e_j) = E_d(a)$

Si u est un vecteur de B_1 , on prend $d > 0$ tel que $a(u) = du$ et $a'(u) = \sqrt{d}u$

On sait **d'après Q31** que $AN = NA$, donc $a \circ n = n \circ a$.

Donc les sous-espaces propres de a sont stables par n et comme $u \in E_d(a)$, $n(u) \in E_d(a) = E_{\sqrt{d}}(a')$

Dès lors, $a' \circ n(u) = \sqrt{d}n(u) = n(\sqrt{d}u) = n \circ a'(u)$.

Donc $a' \circ n$ et $n \circ a'$ coïncident sur la base B_1 , donc on a bien $A'N = NA'$.

Dès lors, A' et $R_q(A^{-1}N)$ commutent et $C^2 = (A')^2 (R_q(A^{-1}N))^2 = A(I_q + A^{-1}N) = M$

Donc $C = A'R_q(A^{-1}N)$ est une racine carrée de M .