

Corrigé Centrale Math 1 2024 - PC

I Quelques approximations de $\sqrt{2}$.

I.A- Via un développement en série entière.

Q 1. Si $\alpha \in \mathbb{N}$, alors $\forall n \geq \alpha + 1, a_n = 0$. Donc $R = +\infty$.

Si $\alpha \notin \mathbb{N}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0$ et $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha - n}{n + 1}$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$. Ainsi $R = 1$.

Q 2. $\forall x \in]-R, R[, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = (1+x)^\alpha$.

Q 3. D'après la question précédente avec $\alpha = \frac{1}{2}$, $\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_0 = 1$ et

$$\begin{aligned} \text{Et } \forall n \in \mathbb{N}^*, a_n &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2} - k\right)}{n!} \\ &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (-2k + 1)}{2^n n!} \\ &= \frac{(-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} (2k - 1)(2k)}{2^n n! \cdot 2^{n-1} (n-1)!} \\ &= \frac{(-1)^{n-1} (2n-2)!(2n-1)(2n)}{2^n n! \cdot 2^{n-1} (n-1)!(2n-1)(2n)} \\ &= \frac{(-1)^{n+1} (2n)!}{2^{2n} (2n-1)(n!)^2} \end{aligned}$$

Ainsi $x \in]-1, 1[, \sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} b_n x^n$.

Q 4. $\diamond$ D'après la formule de Stirling, $b_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi 2n} (2n)^{2n} e^{2n}}{2^{2n} (2n-1) e^{2n} (\sqrt{2\pi n})^2 n^{2n}}$.

Donc $b_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi} n^{\frac{3}{2}}}$.

$\diamond$ Or $\frac{3}{2} > 1$. Donc $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge. Et par critère de négligeabilité ($b_n > 0$), $\sum_{n \geq 1} b_n$ converge.

Ainsi la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^{n+1} b_n$ converge absolument.

Q 5. $\diamond$ $\forall x \in [-1, 1], |(-1)^{n+1} b_n x^n| \leq b_n$. ou encore $\|\beta_n\|_{\infty}^{[-1,1]} \leq b_n$ où $\beta_n : x \mapsto (-1)^{n+1} b_n x^n$.
Or la série $\sum_{n \geq 1} b_n$ converge et ne dépend pas de x .

Donc $\sum_{n \in \mathbb{N}} \beta_n$ converge normalement donc uniformément sur $[-1, 1]$.

$\diamond$ Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, β_n est une fonction continue sur $[-1, 1]$ et que $\sum_{n \geq 1} \beta_n$ converge uniformément sur $[-1, 1]$, la fonction $\sum_{n \geq 1} \beta_n$ est continue sur $[-1, 1]$.

Or $x \mapsto \sqrt{1+x}$ est continue sur $[-1, 1]$.

Donc $\forall x \in [-1, 1], \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} b_n x^n = \sqrt{1+x}$.

En particulier $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} b_n = \sqrt{2}$.

Q 6. $\diamond$ Remarquons que $\sqrt{2} - \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} b_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+1} b_k$.

$\diamond \bullet \forall n \in \mathbb{N}, b_n > 0$. Donc la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^{n+1} b_n$ est une série alternée.

$$\bullet \forall n \in \mathbb{N}, \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}(2(n+1)-1)((n+1)!)^2} \frac{2^{2n}(2n-1)(n!)^2}{(2n)!} = \frac{2(n+1)(2n+1)(2n-1)}{4(2n+1)(n+1)^2} = \frac{2n-1}{2(n+1)}.$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{b_{n+1}}{b_n} < 1$ et $b_n > 0$. Donc la suite $(b_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.

$\bullet$ D'après la question Q4, $b_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi}n^{3/2}}$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$.

Ainsi d'après le critère des séries alternées, $\forall n \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+1} b_k \right| \leq b_{n+1}$.

$\diamond$ D'après la question Q4, $b_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi}n^{3/2}}$. Donc la suite $(n^{3/2}b_n)_{n \geq 1}$ est bornée.

Donc la suite $\left(n^{3/2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+1} b_k \right)$ est bornée.

Ainsi $\sqrt{2} = \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} b_k + \mathcal{O}_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^{3/2}} \right)$.

I.B- Via la méthode de Héron d'Alexandrie.

Q 7. **I** Par définition $c_0(a) = 1$. Donc $c_0(a)$ est bien définie et $c_0(a) > 0$.

H Soit n un entier naturel. Supposons que $c_n(a)$ est bien défini et que $c_n(a) > 0$.

Par définition de la suite $c_{n+1}(a) = \frac{1}{2} \left(c_n(a) + \frac{a}{c_n(a)} \right)$. Comme $c_n(a) \neq 0$, $c_{n+1}(a)$ est bien défini.

Comme $c_n(a) > 0$ et que $a \geq 0$, $c_{n+1}(a) > 0$.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n(a)$ est bien défini et $c_n(a) > 0$.

Q 8. $\diamond$ Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} c_{n+1}(a)^2 - a &= \frac{1}{4} \left(c_n(a) + \frac{a}{c_n(a)} \right)^2 - a \\ &= \frac{1}{4} \left(c_n^2(a) + 2a + \left(\frac{a}{c_n(a)} \right)^2 - 4a \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(c_n(a) - \frac{a}{c_n(a)} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4c_n(a)^2} (c_n(a)^2 - a)^2 \end{aligned}$$

$\diamond$ Alors $\forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1}(a)^2 - a \geq 0$ ou encore $c_{n+1}(a)^2 \geq a$.

Par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$ ($c_{n+1}(a) > 0$), $c_{n+1}(a) \geq \sqrt{a}$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1}(a)^2 - a = \frac{1}{4c_n(a)^2} (c_n(a)^2 - a)^2$ et $\forall n \geq 1, c_n(a) \geq \sqrt{a}$.

Q 9. $\diamond$ Soit n un entier naturel. $c_{n+1}(a) - c_n(a) = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{c_n(a)} - c_n(a) \right) = \frac{1}{2c_n(a)} (a - c_n(a)^2)$.

Or d'après la question précédente, $c_n(a)^2 - a \geq 0$. Donc $c_{n+1}(a) - c_n(a) \leq 0$.

Ainsi la suite $(c_n(a))_{n \geq 0}$ est décroissante.

$\diamond$ D'après la question précédente la suite $(c_n(a))_{n \geq 0}$ est minorée. Donc la suite $(c_n(a))_{n \geq 0}$ converge. Notons ℓ sa limite.

◇ ℓ vérifie $\ell = \frac{1}{2} \left(\ell + \frac{a}{\ell} \right)$ ou encore $2\ell^2 = \ell^2 + a$. Donc $\ell = \sqrt{a}$ (car $\ell \geq 0$).

Ainsi $(c_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{a}$.

Q 10. ◇ $c_1(2) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{1} \right) = \frac{3}{2}$.

◇

(I) $c_1(2)^2 - 2 = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4}$ et $8 \left(\frac{1}{32} \right)^{2^{1-1}} = \frac{1}{4}$. Donc $c_1(2)^2 - 2 \leq 8 \left(\frac{1}{32} \right)^{2^{1-1}}$.

(H) Soit n un entier naturel non nul. Supposons que $c_n(2)^2 - 2 \leq 8 \left(\frac{1}{32} \right)^{2^{n-1}}$.

D'après la question 8, $c_{n+1}(2)^2 - 2 = \frac{1}{4c_n(2)^2} (c_n(2)^2 - 2)^2$ et $c_n(a) \geq \sqrt{2}$.

Donc $c_{n+1}(2)^2 - 2 \leq \frac{1}{4\sqrt{2}^2} \left(8 \left(\frac{1}{32} \right)^{2^{n-1}} \right)^2$ ou encore $c_{n+1}(2)^2 - 2 \leq \frac{1}{8} 8^2 \left(\frac{1}{32} \right)^{2^n}$.

Ainsi par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $c_n(2)^2 - 2 \leq 8 \left(\frac{1}{32} \right)^{2^{n-1}}$.

◇ Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq c_n(2) - \sqrt{2} \leq \frac{8}{c_n(2) + \sqrt{2}} \left(\frac{1}{32} \right)^{2^{n-1}} \leq 4\sqrt{2} \left(\frac{1}{32} \right)^{2^{n-1}}$, car $c_n(2) \geq 0$.

Donc $\sqrt{2} = c_n(2) + \mathcal{O} \left(\left(\frac{1}{32} \right)^{2^{n-1}} \right)$.

I.C- Comparaison des différentes approximations de $\sqrt{2}$: vitesses de convergence.

Q 11. $n^{3/2} \left(\frac{1}{32} \right)^{2^{n-1}} = \exp \left(\frac{3}{2} \ln(n) - 2^{n-1} \ln(32) \right) = \exp \left(2^{n-1} \left(\frac{3}{2} \frac{\ln(n)}{2^{n-1}} - \ln(32) \right) \right)$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{3/2} \left(\frac{1}{32} \right)^{2^{n-1}} = 0$.

La suite $\left(\left(\frac{1}{32} \right)^{2^{n-1}} \right)$ converge plus vite vers 0 que $\left(\frac{1}{n^{3/2}} \right)$.

Q 12. $c_n(2)$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-10} quand $4 \left(\frac{1}{32} \right)^{2^{n-1}} \leq 10^{-10}$.

Or $4\sqrt{2} \left(\frac{1}{32} \right)^{2^{n-1}} \leq 10^{-10} \iff -2^{n-1} \ln(32) \leq -10 \ln(10) - \frac{5}{2} \ln(2) \iff (n-1) \ln(2) \geq \ln \left(\frac{20 \ln(5) - 25 \ln(2)}{2 \ln(32)} \right)$.

Donc $c_n(2)$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-10} quand $n \geq 1 + \frac{1}{\ln(2)} \ln \left(\frac{4 \ln(5) - 5 \ln(2)}{2 \ln(2)} \right)$.

```
import math as math
n=math.ceil(1/log(2)*log((4*log(5)-5*log(2))/(2*log(2)))+2)
c=1
for k in range(n):
    c=1/2*(c+2/c)
print(c)
```

II Racine carrée d'une matrice symétrique positive.

II.A- Racines carrées de la matrice I_2 .

Q 13.

Théorème. 0.1:

Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$.

Alors la matrice de f dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ est de l'une des formes suivantes :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ ou } S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}, \text{ avec } \theta \in \mathbb{R}$$

Q 14. Soit A une matrice de $O(2)$ telle que $A^2 = I_2$.

Alors il existe un réel θ tel que $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ ou $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Si $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, alors $A^2 = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) & -2\sin(\theta)\cos(\theta) \\ 2\sin(\theta)\cos(\theta) & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$.

Donc $A^2 = I_2$ si et seulement s'il existe un entier relatif k tel que $2\theta = 2k\pi$; ou encore $A^2 = I_2$ si et seulement s'il existe un entier relatif k tel que $\theta = k\pi$ ou encore $A = I_2$ ou $A = -I_2$.

Si $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$, alors $A^2 = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) & 0 \\ 0 & \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) \end{pmatrix} = I_2$.

Donc les racines carrées de I_2 éléments de $O(2)$ sont les matrices I_2 , $-I_2$ et les matrices de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$. Il ya donc une infinité de matrices racines de I_2 .

II.B- Existence et unicité d'une racine carrée symétrique positive.

Q 15.

Théorème. 0.2: Caractérisation spectrale

Soit M une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si $\text{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+$

Q 16. Soit $M \in \mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$.

Il existe alors une matrice P orthogonale et une matrice D diagonale telles que $M = PDP^T$.

Notons $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_q)$.

Comme M est positive, $\forall i \in \llbracket 1, q \rrbracket$, $d_i \geq 0$. Posons alors $\delta_i = \sqrt{d_i}$ et $\Delta = \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_q)$ et enfin $B = P\Delta P^T$.

Alors $B \in \mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$ et $B^2 = P\Delta P^T P\Delta P^T = M$.

Ainsi $B = P\Delta P^T$ vérifie bien que $B \in \mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$ et $B^2 = M$

Q 17. Notons C une matrice de $\mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = M$.

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ les valeurs propres deux à deux distinctes de C .

◇ Alors $\forall i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, $\forall X \in \text{Ker}(C - \lambda_i I_q)$, $C^2 X = \lambda_i^2 X$. Donc $\forall i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, $\text{Ker}(C - \lambda_i I_q) \subset \text{Ker}(M - \lambda_i^2 I_q)$.

◇ Or C est symétrique réelle, donc diagonalisable. Alors $q = \sum_{i=1}^s \dim \text{Ker}(C - \lambda_i \text{Id})$.

Alors $q \leq \sum_{i=1}^s \dim \text{Ker}(M - \lambda_i^2 \text{Id})$.

◇ $\forall i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, $\lambda_i \geq 0$. Donc $\{\lambda_1^2, \dots, \lambda_s^2\}$ contient s valeurs propres de M deux à deux distinctes.

Donc les sous-espaces propres $\text{Ker}(M - \lambda_i^2 I_q)$ sont en somme directe, alors $\sum_{i=1}^s \dim \text{Ker}(M - \lambda_i^2 \text{Id}) \leq q$.

Ainsi $q = \sum_{i=1}^s \dim \text{Ker}(M - \lambda_i^2 \text{Id})$ et $\forall i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, $\text{Ker}(C - \lambda_i I_q) = \text{Ker}(M - \lambda_i^2 I_q)$.

◇ Or d'après l'expression obtenue de B $\forall i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, $\text{Ker}(M - \lambda_i^2 I_q) = \text{Ker}(B - \lambda_i I_q)$.

Alors $\forall i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, $\text{Ker}(C - \lambda_i I_q) = \text{Ker}(B - \lambda_i I_q)$.

Or B et C sont diagonalisables. Donc $B = C$.

Ainsi B est la seule racine carrée de M appartenant à $\mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$.

II.C- Une méthode de Héron d'Alexandrie matricielle.

- Q 18.** (I) M_0 est bien définie et $M_0 = I_q = P \operatorname{diag}(c_0(\lambda_1), \dots, c_0(\lambda_n))P^\top$, car $\forall a \in \mathbb{R}_+$, $c_0(a) = 1$.
 (H) Soit n un entier naturel. Supposons que M_n est bien définie et que $M_n = P \operatorname{diag}(c_n(\lambda_1), \dots, c_n(\lambda_q))P^\top$.
 Comme $\forall a \in \mathbb{R}_+$, $c_n(a) > 0$, M_n est inversible. Donc M_{n+1} est bien définie.

$$\begin{aligned} \text{Et } M_{n+1} &= \frac{1}{2} \left(P \operatorname{diag}(c_n(\lambda_1), \dots, c_n(\lambda_q))P^\top + M \left(P \operatorname{diag}(c_n(\lambda_1), \dots, c_n(\lambda_q))P^\top \right)^{-1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(P \operatorname{diag}(c_n(\lambda_1), \dots, c_n(\lambda_q))P^\top + P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_q)P^\top P \operatorname{diag}\left(\frac{1}{c_n(\lambda_1)}, \dots, \frac{1}{c_n(\lambda_q)}\right)P^\top \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(P \operatorname{diag}(c_n(\lambda_1), \dots, c_n(\lambda_q))P^\top + P \operatorname{diag}\left(\frac{\lambda_1}{c_n(\lambda_1)}, \dots, \frac{\lambda_q}{c_n(\lambda_q)}\right)P^\top \right) \\ &= P \operatorname{diag}\left(\frac{1}{2} \left(c_n(\lambda_1) + \frac{\lambda_1}{c_n(\lambda_1)} \right), \dots, \frac{1}{2} \left(c_n(\lambda_q) + \frac{\lambda_q}{c_n(\lambda_q)} \right)\right)P^\top \\ &= P \operatorname{diag}(c_{n+1}(\lambda_1), \dots, c_{n+1}(\lambda_q))P^\top \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, M_n est bien définie et $M_n = P \operatorname{diag}(c_n(\lambda_1), \dots, c_n(\lambda_q))P^\top$

- Q 19.** Remarquons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{diag}(c_n(\lambda_1), \dots, c_n(\lambda_q)) = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_q})$.
 Or P ne dépend pas de n . Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = P \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_q})P^\top = \sqrt{M}$.

Ainsi la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{M}$.

III Méthode de Newton numérique.

III.A- Convergence de la méthode de Newton.

- Q 20.** Comme f' est continue sur I et que f' ne s'annule pas sur I , f' est de signe constant. Donc f est strictement monotone sur I .

Ainsi f s'annule au plus une fois sur I .

- Q 21.** f'' est continue sur le segment J_r . Donc f'' est bornée sur J_r et atteint ses bornes. Ainsi s_r est bien définie.
 f' est continue sur le segment J_r . Donc f' est bornée sur J_r et atteint ses bornes. Ainsi i_r est bien définie.
 Et il existe x_r élément J_r tel que $i_r = |f'(x_r)|$. Or f' ne s'annule pas. Donc $i_r > 0$.

- Q 22.** $\diamond$ Soit $(r, r') \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $r' \leq r$.
 Comme $J_{r'} \subset J_r$, $s_{r'} \leq s_r$ et $i_{r'} \leq i_r$. Donc $K_{r'} \leq K_r$.
 Alors $\forall 0 < r \leq 1$, $0 \leq K_r \leq K_1$.
 Donc $\forall 0 < r \leq 1$, $0 \leq rK_r \leq rK_1$.
 Si $K_1 = 0$ alors $rK_r = 0$ et si $K_1 > 0$, alors en prenant $r < \frac{1}{K_1}$, $rK_r < 1$.

Ainsi il existe un réel r strictement positif tel que, $0 \leq rK_r < 1$.

- Q 23.** f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle de bornes c_n et c , d'après l'inégalité de Taylor Lagrange,

$$\left| f(c) - f(c_n) - (c - c_n)f'(c_n) \right| \leq \frac{|c - c_n|^2}{2} \sup_{t \in [c, c_n]} |f''(t)|$$

Or $c_n \in J_r$ et $c \in J_r$. Donc $\sup_{t \in [c, c_n]} |f''(t)| \leq s_r$.

Or $f(c) = 0$ et $|f'(c_n)| > 0$. Donc $\left| -\frac{f(c_n)}{f'(c_n)} - (c - c_n) \right| \leq \frac{|c - c_n|^2}{2} \frac{s_r}{|f'(c_n)|}$.

Or $c_{n+1} = c_n - \frac{f(c_n)}{f'(c_n)}$ et $\frac{1}{|f'(c_n)|} \leq \frac{1}{i_r}$.

Donc $|c_{n+1} - c| \leq |c_n - c|^2 K_r$.

Comme $c_n \in J_r$, $|c_n - c| \leq r$, alors $|c_{n+1} - c| \leq r^2 K_r$.

Or $rK_r < 1$. Donc $|c_{n+1} - c| \leq r$. Donc $c_{n+1} \in J_r$.

- Q 24.** Procédons par récurrence sur n .

(I) Comme $\frac{(K_r|c_0 - c|)^{2^0}}{K_r} = |c_0 - c|$, alors $|c_n - c| \leq \frac{(K_r|c_0 - c|)^{2^0}}{K_r}$.
Et $c_0 \in J_r$.

(H) Soit n un entier naturel. Supposons que $c_n \in J_r$ et que $|c_n - c| \leq \frac{(K_r|c_0 - c|)^{2^n}}{K_r}$.

D'après la question précédente, $c_{n+1} \in J_r$ et $|c_{n+1} - c| \leq |c_n - c|^2 K_r$.

Et par hypothèse de récurrence, $|c_{n+1} - c| \leq \left(\frac{(K_r|c_0 - c|)^{2^n}}{K_r} \right)^2 K_r$.

Or $\left(\frac{(K_r|c_0 - c|)^{2^n}}{K_r} \right)^2 K_r = \frac{(K_r|c_0 - c|)^{2^{n+1}}}{K_r}$.

Ainsi par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|c_n - c| \leq \frac{(K_r|c_0 - c|)^{2^n}}{K_r}$.

Comme $c_0 \in J_r$, $|c_0 - c| \leq r$. Donc $0 \leq K_r|c_0 - c| \leq rK_r < 1$.

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (K_r|c_0 - c|)^{2^n} = 0$. Donc par encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = c$.

III.B- Une implémentation en Python.

Q 25.

```
def newton(c0, f, df):
    c = c0
    for k in range(50):
        c = c - f(c) / df(c)
        if f(c) >= 10 ** (-10):
            return 'None'
    return c
```

IV Décomposition de Jordan-Chevalley-Dunford et calcul de racine carrée.

IV.A- Une méthode de Newton matricielle

Q 26. $\diamond P(X) = \prod_{i=1}^s (X - \lambda_i)$. Donc $P'(X) = \sum_{k=1}^s \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^s (X - \lambda_j)$.

Alors $\forall i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, $P'(\lambda_i) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0$ ou encore $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ ne sont pas racine de P' .

Soit μ une racine complexe de P' , $\mu \notin \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$. Donc $M - \mu I_q$ est inversible.

$\diamond$ Notons $\mu_1, \dots, \mu_{s-1}$ les racines de P' .

Alors il existe une constante C telle que $P'(X) = C \prod_{i=1}^{s-1} (X - \mu_i)$.

Ainsi $P'(M) = C \prod_{i=1}^{s-1} (M - \mu_i I_q)$. Or $\forall i \in \llbracket 1, s-1 \rrbracket$, $M - \mu_i I_q$ est inversible.

Alors $P'(M)$ est inversible.

Q 27. $\diamond$ Rappelons que $\chi_M(X) = \prod_{i=1}^s (X - \lambda_i)^{r_i}$ où $\forall i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, $1 \leq r_i \leq q$ et $\sum_{i=1}^s r_i = q$.

Donc $\forall i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, $(X - \lambda_i)^{r_i}$ divise $(X - \lambda_i)^q$.

Ainsi χ_M divise P^d .

$\diamond$ Or χ_M est un polynôme annulateur de M .

Donc P^d est un polynôme annulateur de M c'est-à-dire $P^d(M) = 0$. Or $P^d(M) = (P(M))^d$.

Ainsi $P(M)$ est nilpotente.

Q 28. Par hypothèse, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe $B_n \in \mathbb{C}[M]$ telle que $P(M_n) = (P(M))^{2^n} B_n$.
Or il existe un entier n_0 tel que $2^{n_0} \geq d$.

Donc $\forall n \geq n_0, P(M_n) = 0$.

Par définition de la suite (M_n) , $\forall n \geq n_0, M_{n+1} = M_n$.

Ainsi la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire.

Q 29. Procédons par récurrence sur n .

(I) $M_0 = M$. Donc M et M_0 commutent.

(H) Soit n un entier naturel. Supposons que M et M_n commutent.

Notons $P(X) = \sum_{k=0}^s c_k X^k$.

Alors $P(M_n)M = \sum_{k=0}^s c_k M_n^k M = \sum_{k=0}^s c_k M M_n^k = M P(M_n)$. Alors $P(M_n)$ et M commutent.

De même $P'(M_n)M = M P'(M_n)$. Or $P'(M_n)$ est inversible. Donc $P(M_n)^{-1}$ et M .

Donc M_{n+1} et M commutent.

Ainsi par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, M et M_n commutent.

Q 30. D'après la question Q28, il existe un entier n_0 tel que $P(M_n) = 0$.

Or d'après la question Q28, (M_n) est stationnaire ou encore il existe un entier n_0 tel que $\forall n \geq n_0, M_n = M_{n_0}$. Donc $\forall n \geq n_0, M_n = A$. Alors $P(A) = 0$.

Or P est un polynôme scindé à racines simples et polynôme annulateur de A .

Donc A est diagonalisable.

Q 31. $\diamond$ Comme M et M_n commutent (Q29) et que la suite (M_n) est stationnaire (Q28), alors M et A commutent.

Alors $AN = A(M - A) = AM - A^2 = MA - A^2 = NA$. Donc A et N commutent.

$\diamond$ D'après la question Q28, $(M_n)_{n \geq 0}$ est stationnaire. Donc il existe un entier n_1 tel que $\forall n \geq n_1, M_n = A$.

Alors $A - M = \sum_{k=0}^{n_1-1} M_{k+1} - M_k = - \sum_{k=0}^{n_1-1} P(M_k)P'(M_k)^{-1}$.

Or par hypothèse, il existe $B_n \in \mathbb{C}[M]$ telle que $P(M_n) = (P(M))^{2^n} B_n$.

Donc $M - A = \sum_{k=0}^{n_1-1} (P(M))^{2^k} B_k P'(M_k)^{-1} = P(M) \sum_{k=0}^{n_1-1} (P(M))^{2^k-1} B_k P'(M_k)^{-1}$.

Or M et M_k commutent. Donc M et $P'(M_k)$ commutent, donc M et $P'(M_k)^{-1}$ commutent. Alors $P(M)$ et $P'(M_k)^{-1}$ commutent.

Comme $B_k \in \mathbb{C}[M]$, alors $P(M)$ et B_k commutent.

Alors $(M - A)^q = P(M)^q \left(\sum_{k=0}^{n_1-1} (P(M))^{2^k-1} P'(M_k)^{-1} \right)^q$.

Or $P(M)^q = 0$. Ainsi $(M - A)^q = 0$. Donc N est nilpotente.

IV.B- Un calcul de racine carrée pour certaines matrices réelles symétriques.

Q 32. Rappelons que $\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^q (-1)^{n+1} b_n x^n + x^q \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+q+1} b_{n+q} x^n = \sum_{n=0}^q (-1)^{n+1} b_n x^n + x^q \varepsilon(x)$ où $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

Alors $1+x = \left(\sum_{n=0}^q (-1)^{n+1} b_n x^n \right)^2 + x^q \varepsilon(x) \left(x^q \varepsilon(x) + 2 \sum_{n=0}^q (-1)^{n+1} b_n x^n \right)$.

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x - \left(\sum_{n=0}^q (-1)^{n+1} b_n x^n \right)^2}{x^q} = 0$.

Par ailleurs, notons $R_q(X) = \sum_{n=0}^q (-1)^{n+1} b_n X^n$.

Alors $1+X - R_q^2(X)$ est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. Donc $1+X - R_q^2(X) = \sum_{k=0}^d c_k X^k$.

D'après la limite précédente, $\forall k \in \llbracket 0, q \rrbracket, c_k = 0$.

Donc X^q divise $1+X - R_q^2(X)$.

Q 33. Comme N est nilpotente, $Id + N - R_q^2(N) = 0$.

Donc $R_q(N) = \sum_{n=0}^q (-1)^{n+1} b_n N^n$ est une racine de $I_q + N$.

- Q 34.** $\diamond$ Par récurrence sur n , M_n est une matrice à coefficients réels car P est aussi à coefficients réels.
 Donc A et N sont à coefficients réels.
- $\diamond$ Comme P est un polynôme annulateur de A à coefficients réels, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$.
- Q 35.** Les valeurs propres de A sont incluses dans l'ensemble des racines de P .
 Or par construction les racines de P sont exactement les valeurs propres de M .
 Donc les valeurs propres de A sont des valeurs propres de M .
 Or les valeurs propres de M sont des réels strictement positifs, donc le spectre de A est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.
- Q 36.** $\diamond$ Le raisonnement de la question 18, s'applique ici en remplaçant $P^\top$ par P^{-1} .
 $\diamond$ Remarquons que $M = A(I_q + A^{-1}N)$ (A est inversible car 0 n'est pas une valeur propre de A).
 D'après la question Q33, il existe une matrice C telle que $C^2 = I_q + A^{-1}N$ et C est un polynôme en $A^{-1}N$.
 Donc $M = A'^2 C^2$.
 $\diamond$ Or A' et A commutent. Donc A' et A^{-1} commutent.
 $\diamond$ Par ailleurs A' est diagonalisable. Il existe donc une base $(V_1, \dots, V_q)$ de vecteurs propres de A' , notons $\delta_1, \dots, \delta_q$ les valeurs propres associées.
 Soit $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$, V_i est aussi un vecteur propre de A associé à δ_i^2 .
 Or A et N commutent. Donc tous les sous-espaces propres de A sont stables par N .
 Donc NV_i est un élément de l'espace propre de A associé à δ_i^2 , mais aussi de l'espace propre de A' associé à δ_i . Donc $A'NV_i = \delta_i NV_i = NA'V_i$.
 Comme cette égalité est vraie pour tout entier i de $\llbracket 1, q \rrbracket$, alors $A'N$ et NA' sont égales sur une base.
 Ainsi $A'N = NA'$.
 $\diamond$ Donc A' et C commutent car C est un polynôme en $I_q + A^{-1}N$ une matrice qui commute avec A' .
 Alors $M = (A'C)^2$.
 Ainsi $A'R_q(A^{-1}N)$ est une racine de M .