

MINES PONTS 2019 PC MATHS 2

Etude d'une série de fonctions

Le sujet est consacré à l'étude de quelques propriétés de dérivabilité de la fonction $R : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ définie par

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2} \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

Notations

- On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel x .
- Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ une famille de nombres complexes indexée par l'ensemble $\mathbf{Z}$ des entiers relatifs. Dans le cas où les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 1} u_{-n}$ sont toutes deux convergentes, on pose

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} u_{-n}.$$

I Préliminaires

On établit dans cette partie quelques résultats utiles dans la suite du problème.

1. Montrer que la fonction R est bien définie et qu'elle est continue sur $\mathbf{R}$.
2. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx$ est convergente.

Dans la suite du problème, on **admet** que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue par morceaux et intégrable. On pose

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} dt \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

3. Montrer que la fonction $\widehat{f}$ est bien définie, et continue sur $\mathbf{R}$.

II Etude de la dérivabilité de R en 0

Dans cette partie, on considère une fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$, continue et telle qu'il existe un réel $C > 0$ tel que

$$|f(t)| \leq \frac{C}{t^2 + 1} \text{ pour tout } t \in \mathbf{R}.$$

On pose

$$S(h) = h \sum_{n=0}^{\infty} f(nh) \text{ pour tout } h > 0.$$

4. Justifier l'existence de $S(h)$ pour tout $h > 0$.

On fixe $h > 0$, et on considère la fonction

$$\begin{aligned} \phi_h : \mathbf{R}_+ &\longrightarrow \mathbf{C} \\ t &\longmapsto f\left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right). \end{aligned}$$

5. Montrer que

$$S(h) = \int_0^{+\infty} \phi_h(t) \, dt.$$

6. Montrer que, pour tous $h \in]0, 1]$ et $t \in [1, +\infty[$, on a

$$|\phi_h(t)| \leq \frac{C}{1 + (t-1)^2}.$$

7. En déduire que

$$S(h) \rightarrow \int_0^{+\infty} f(t) \, dt \text{ quand } h \rightarrow 0.$$

8. En déduire un équivalent de $R(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs strictement positives. La fonction R est-elle dérivable en 0 ?

III Formule sommatoire de Poisson

Dans cette partie, on note $C_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π -périodiques de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{C}$. Si u est un élément de $C_{2\pi}$, on pose

$$c_p(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t) e^{-ipt} \, dt \text{ pour tout } p \in \mathbf{Z}.$$

On **admet** le résultat suivant, que l'on pourra utiliser sans démonstration dans toute cette partie : si u et v sont deux éléments de $C_{2\pi}$ qui vérifient $c_p(u) = c_p(v)$ pour tout $p \in \mathbf{Z}$, alors $u = v$.

On considère une fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$, continue et telle qu'il existe des réels strictement positifs C_1 et C_2 tels que

$$|f(t)| \leq \frac{C_1}{t^2 + 1} \text{ pour tout } t \in \mathbf{R} \text{ et } |\hat{f}(x)| \leq \frac{C_2}{x^2 + 1} \text{ pour tout } x \in \mathbf{R},$$

où la fonction $\hat{f}$ a été définie à la question 3. On pose également

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(x + 2n\pi) \text{ et } G(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) e^{inx} \text{ pour } x \in \mathbf{R}.$$

9. Montrer que la fonction F est bien définie, 2π -périodique et continue sur $\mathbf{R}$.
10. Montrer que la fonction G est bien définie, 2π -périodique et continue sur $\mathbf{R}$.
11. Montrer que $G = 2\pi F$.

En particulier, on a $G(0) = 2\pi F(0)$, soit :

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) = 2\pi \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(2n\pi),$$

12. Montrer que, pour tout réel strictement positif a , on a

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} f(na) = \frac{1}{a} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}\left(\frac{2n\pi}{a}\right).$$

Cette égalité constitue la *formule sommatoire de Poisson*.

IV Etude de la dérivabilité de R en π

On considère la fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{e^{it^2} - 1}{t^2} & \text{si } t \neq 0 \\ i & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

13. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$. On pourra utiliser un développement en série entière.
14. Etablir que $f'(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \pm\infty$, et que $f''(t) = -4e^{it^2} + O(t^{-2})$ quand $t \rightarrow \pm\infty$.
15. Montrer que l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix^2} dx$ est convergente.
16. Montrer que $\hat{f}(x) = O(x^{-2})$ quand $x \rightarrow \pm\infty$.

On pose à présent

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in^2x}}{n^2} \text{ pour } x \in \mathbf{R}.$$

17. En utilisant la formule sommatoire de Poisson, montrer qu'il existe des nombres complexes a et b tels que

$$F(x) = F(0) + a\sqrt{x} + bx + O(x^{3/2}) \text{ quand } x \rightarrow 0 \text{ par valeurs strictement positives.}$$

Préciser la valeur de b , et exprimer a en fonction de I (l'intégrale I a été définie à la question 15).

18. Exprimer, pour $x \in \mathbf{R}$, $F(\pi + x)$ en fonction de $F(4x)$ et de $F(x)$.
19. Dédire de ce qui précède que la fonction R est dérivable en π , et préciser la valeur de $R'(\pi)$.

FIN DU PROBLÈME