Mines M2 2019 - Corrigé

I. Préliminaires

1. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{\sin(n^2 x)}{n^2}$.
 • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est définie et continue sur $\mathbb{R}$ par opérations sur les fonctions usuelles.
 • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)| = \left|\dfrac{\sin(n^2x)}{n^2}\right| \leq \dfrac{1}{n^2}$, donc $\|f_n\|_\infty \leq \dfrac{1}{n^2}$ (il y a même égalité car $f_n(\pi/(2n^2)) = 1/n^2$).
 Or $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann et $2 > 1$), donc, par comparaison, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \|f_n\|_\infty$ converge, donc $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$.
 • Par suite, $R : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. • $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x^2)}{x^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
 • $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{x^2}{x^2} \underset{x\to 0^+}{\to} 1$, donc f est prolongeable par continuité en 0, donc intégrable sur $]0,1]$.
 • Pour tout $x \geq 1$, $|f(x)| \leq \dfrac{1}{x^2}$.
 Or $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc, par comparaison, f est intégrable sur $[1, +\infty[$.
 • f est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc, en particulier, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx$ converge.

3. Soit $g : (x,t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(t)e^{ixt}$.
 • Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto g(x,t) = f(t)e^{ixt}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions continues par morceaux.
 • Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x,t) = f(t)e^{ixt}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (exponentielle...)
 • Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$|g(x,t)| = |f(t)|\,|e^{ixt}| \leq |f(t)|$$
 où $|f|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (car f l'est).
 • $\widehat{f} : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,t)dt$ est donc définie et continue sur $\mathbb{R}$.

II. Etude de la dérivabilité de R en 0

4. Pour tout $h > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|f(nh)| \leq \dfrac{C}{1 + n^2h^2} \leq \dfrac{c}{n^2h^2}$.
 Or $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{C}{h^2n^2}$ converge (Riemann et $2 > 1$), donc, par comparaison, $\displaystyle\sum_{n\geq 0} |f(nh)|$ converge, donc $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f(nh)$ converge absolument, donc converge, ce qui assure l'existence de $S(h) = h\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f(nh)$.

5. Soit $h > 0$.
 • ***Il faut d'abord penser à justifier l'existence de l'intégrale...***
 ϕ_h est continue par morceaux que $\mathbb{R}$ car sur tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, ϕ_h a un nombre fini de discontinuités (les éléments de $h\mathbb{Z} \cap [a,b]$).
 Pour tout $t \geq 0$,
$$|\phi_h(t)| = \left|f\left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right)\right| \leq \frac{C}{\left(\left\lfloor \frac{t}{h}\right\rfloor h\right)^2 + 1}.$$
 Or, l'encadrement classique de la partie entière donc, pour $x > 0$, $\dfrac{x-1}{x} < \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x} \leq \dfrac{x}{x} = 1$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lfloor x \rfloor \underset{x\to+\infty}{\sim} x$.
 On a donc
$$|\phi_h(t)| \leq \frac{C}{\left(\left\lfloor \frac{t}{h}\right\rfloor h\right)^2 + 1} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\left(\frac{t}{h}\right)^2 h^2} = \frac{1}{t^2},$$
 donc $\phi_h(t) = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
 Or $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (Riemann et $2 > 1$), donc, par comparaison, ϕ_h est intégrable sur $[1, +\infty[$.

De plus, ϕ_h est continue par morceaux sur le segment $[0,1]$, donc intégrable sur $[0,1]$.

ϕ_h est donc intégrable sur $\mathbb{R}$, donc, en particulier, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \phi_h(t)dt$ converge.

• Par suite,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \phi_h(t)dt &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^{nh} \phi_h(t)dt \quad \text{(car l'intégrale converge)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kh}^{(k+1)h} \phi_h(t)dt \quad \text{(relation de Chasles)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kh}^{(k+1)h} f\left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right) dt \quad \text{(définition de } \phi_h\text{)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kh}^{(k+1)h} f(kh)\, dt \quad \left(\text{car } \forall t \in [kh,(k+1)h[,\ \frac{t}{h} \in [k,k+1[\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} hf(kh) \quad \text{(intégrale d'une constante)} \\
&= h \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(kh) = h\sum_{k=0}^{+\infty} f(kh) \quad \text{(car la série converge)} \\
&= S(h).
\end{aligned}$$

6. Pour tout $h \in]0,1]$, pour tout $t \in [1,+\infty[$, on a $t/h \geq 1$ et

$$\begin{aligned}
|\phi_h(t)| = \left| f\left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right)\right| &\leq \frac{C}{\left(\lfloor \frac{t}{h} \rfloor h\right)^2 + 1} \\
&\leq \frac{C}{\left(\left(\frac{t}{h} - 1\right) h\right)^2 + 1} \quad \text{(car pour tout } x \geq 1,\ \lfloor x \rfloor \geq x - 1 \geq 0\text{)} \\
&= \frac{C}{(t-h)^2 + 1} \leq \frac{C}{(t-1)^2 + 1} \quad \text{(car } t - h \geq t - 1 \geq 0\text{).}
\end{aligned}$$

7. Pour toute suite $(h_n) \in]0,1]^{\mathbb{N}}$ de limite nulle, on pose $f_n : t \in [0,+\infty[\mapsto \phi_{h_n}(t)$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ car f est continue sur $\mathbb{R}$ et $\lfloor . \rfloor$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$, donc, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$t - h_n = \left(\frac{t}{h_n} - 1\right) h_n \leq \left\lfloor \frac{t}{h_n} \right\rfloor h_n \leq \frac{t}{h_n} h_n = t.$$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} t - h_n = t$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left\lfloor \frac{t}{h_n} \right\rfloor h_n = t$, et donc, par continuité de f sur $\mathbb{R}$, donc en t, on a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \lim_{n\to+\infty} f\left(\left\lfloor \frac{t}{h_n} \right\rfloor h_n\right) = f(t),$$

donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers f, qui est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [0,1]$,

$$|f_n(t)| = \left| f\left(\left\lfloor \frac{t}{h_n} \right\rfloor h_n\right)\right| \leq \frac{C}{1 + \left(\left\lfloor \frac{t}{h_n} \right\rfloor h_n\right)^2} \leq C,$$

et, pour tout $t > 1$, $|f_n(t)| \leq \dfrac{C}{1 + (t-1)^2}$ d'après la question précédente, donc

$$|f_n(t)| \leq \begin{cases} C & \text{si } t \in [0,1] \\ \dfrac{C}{1 + (t-1)^2} & \text{si } t > 1 \end{cases} = \varphi(t)$$

où φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car

– intégrable sur $[0,1]$ car constante sur ce segment

– intégrable sur $[1,+\infty[$ (car primitive classique en $C\arctan(t-1)$)

• D'où, par convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty} S(h_n) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt = \int_0^{+\infty} f(t)dt.$$

• Ceci étant valable pour toute suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in]0,1]^{\mathbb{N}}$, on obtient, par caractérisation séquentielle de la limite,

$$\lim_{h\to 0} S(h) = \int_0^{+\infty} f(t)dt.$$

8. Prenons $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

f est continue sur $\mathbb{R}^*$ et en 0 (car $\dfrac{\sin x^2}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{x^2} \to 1 = f(0)$), donc f est continue sur $\mathbb{R}$.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x^2} &\leq \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2} & \text{si } x\in[-1,1] \quad (\text{car } |\sin(t)| \leq |t| \text{ pour tout } t\in\mathbb{R}) \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } |x| > 1 \end{cases} \\ &\leq \begin{cases} \dfrac{1}{(1+x^2)/2} = \dfrac{2}{1+x^2} & \text{si } x\in[-1,1] \quad (\text{car pour tout } x\in[-1,1],\ 0<(1+x^2)/2 \leq 1) \\ \dfrac{2}{1+x^2} & \text{si } |x|>1 \quad \left(\text{car pour tout } |x|>1,\ \dfrac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{1+x^2}} = \dfrac{1+x^2}{x^2} = 1+\dfrac{1}{x^2} \leq 2\right) \end{cases} \\ &= \frac{2}{1+x^2}. \end{aligned}$$

De plus, pour tout $x>0$, $f(n\sqrt{x}) = \dfrac{\sin(n^2x)}{n^2x}$, donc $\dfrac{\sin(n^2x)}{n^2} = \sqrt{x}^2 f(n\sqrt{x})$, donc

$$\begin{aligned} R(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n^2x)}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{x}^2 f(n\sqrt{x}) = \sqrt{x}\left(\sqrt{x}\sum_{n=1}^{+\infty} f(n\sqrt{x})\right) = \sqrt{x}\left(\sqrt{x}\sum_{n=0}^{+\infty} f(n\sqrt{x}) - \sqrt{x}f(0)\right) \\ &= \sqrt{x}\overbrace{\Big(\underbrace{S(\sqrt{x})}_{\underset{x\to 0^+}{\to} \int_0^{+\infty} f(t)dt = \sqrt{\pi/2}} - \underbrace{\sqrt{x}}_{\to 0}\Big)}^{\to\sqrt{\pi/2}\neq 0} \\ &\underset{x\to 0^+}{\sim} \sqrt{x}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{\pi x}{2}}. \end{aligned}$$

• Par suite, comme $R(0)=0$, $\dfrac{R(x)-R(0)}{x-0} = \dfrac{R(x)}{x} \underset{x\to 0^+}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}} \underset{x\to 0^+}{\to} +\infty$, donc R n'est pas dérivable en 0 (et la courbe représentative de R admet une demi-tangente verticale en 0)

III. Formule sommatoire de Poisson

9. Posons, pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $f_n : x\in\mathbb{R} \mapsto f(x+2n\pi)$.
• Soit $x\in\mathbb{R}$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$|f_n(x)| = |f(x+2n\pi)| \leq \frac{C_1}{1+(x+2n\pi)^2}, \quad \text{donc} \quad f(x+2n\pi) = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge absolument (Riemann et $2>1$), donc, par comparaison, $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$ converge absolument, donc converge.
De même, pour tout $n\geq 1$,

$$|f_{-n}(x)| = |f(x-2n\pi)| \leq \frac{C_1}{1+(x-2n\pi)^2}, \quad \text{donc} f(x-2n\pi) = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge absolument (Riemann et $2>1$), donc, par comparaison, $\sum\limits_{n\geq 0} f_{-n}(x)$ converge absolument, donc converge.
Par suite, $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$ et $\sum\limits_{n\geq 1} f_{-n}(x)$ convergent, donc $F(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} f_n(x)$ existe.
• Pour tout $x\in\mathbb{R}$, pour tout $n\in\mathbb{Z}$,

$$f_n(x+2\pi) = f(x+2n\pi+2\pi) = f(x+2(n+1)\pi) = f_{n+1}(x),$$

donc $F(x+2\pi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2\pi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_{n+1}(x) \underset{\text{en posant } j=n+1}{=} \sum_{j\in\mathbb{Z}} f_n(x) = F(x)$, donc F est 2π-périodique.

- Comme F est 2π-périodique, F est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si F est continue sur $[0,2\pi]$. Or :

– Pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0,2\pi]$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, pour tout $x\in[0,2\pi]$,

$$|f_n(x)| = |f(x+2n\pi)| \leq \frac{C_1}{1+(x+2n\pi)^2} \leq \frac{C_1}{1+(2n\pi)^2},$$

donc $\|f_n\|_\infty^{[0,2\pi]} \leq \dfrac{C_1}{1+(2n\pi)^2} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
Or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge absolument (Riemann et $2>1$), donc, par comparaison, $\sum_{n\geq 0} \|f_n\|_\infty^{[0,2\pi]}$ converge, donc $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0,2\pi]$.
$F_0 : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est donc continue sur $[0,2\pi]$.

– Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, f_{-n} est continue sur $[0,2\pi]$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, pour tout $x\in[0,2\pi]$,

$$|f_{-n}(x)| = |f(x-2n\pi)| \leq \frac{C_1}{1+(x-2n\pi)^2} \leq \frac{C_1}{1+(2(n-1)\pi)^2},$$

donc $\|f_{-n}\|_\infty^{[0,2\pi]} \leq \dfrac{C_1}{1+(2(n-1)\pi)^2} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
Or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge absolument (Riemann et $2>1$), donc, par comparaison, $\sum_{n\geq 1} \|f_{-n}\|_\infty^{[0,2\pi]}$ converge, donc $\sum_{n\geq 1} f_{-n}$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0,2\pi]$.
$F_1 : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_{-n}(x)$ est donc continue sur $[0,2\pi]$.

$F = F_0 + F_1$ est donc continue sur $[0,2\pi]$ comme somme de fonctions continues, et, par suite, F est continue sur $\mathbb{R}$.

10. Posons, pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $g_n : x\in\mathbb{R} \mapsto \widehat{f}(n)e^{inx}$.

- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, g_n est continue sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$|g_n(x)| = |\widehat{f}(n)e^{inx}| = |\widehat{f}(n)| \leq \frac{C_2}{1+n^2},$$

donc $\|g_n\|_\infty \leq \dfrac{C_2}{1+n^2} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
Or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge absolument (Riemann et $2>1$), donc, par comparaison, $\sum_{n\geq 0} \|g_n\|_\infty$ converge, donc $\sum_{n\geq 0} g_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$.
$G_0 : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$ est donc définie et continue sur $\mathbb{R}$.

- Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, g_{-n} est continue sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$|g_{-n}(x)| = |\widehat{f}(-n)e^{-inx}| = |\widehat{f}(-n)| \leq \frac{C_2}{1+n^2},$$

donc $\|g_{-n}\|_\infty \leq \dfrac{C_2}{1+n^2} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
Or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge absolument (Riemann et $2>1$), donc, par comparaison, $\sum_{n\geq 1} \|g_{-n}\|_\infty$ converge, donc $\sum_{n\geq 1} g_{-n}$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$.
$G_1 : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} g_{-n}(x)$ est donc définie et continue sur $\mathbb{R}$.

- $G = G_0 + G_1$ est donc définie et continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions continues.
- Comme, pour tout $n\in\mathbb{Z}$, g_n est 2π-périodique, donc, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$G(x+2\pi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n(x+2\pi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n(x) = G(x),$$

donc G est 2π-périodique.

11. Soit $p \in \mathbb{Z}$.

- $\sum_{n\geq 0} f_n(t)e^{-ipt}$ et $\sum_{n\geq 1} f_{-n}(t)e^{-ipt}$ convergent normalement, donc uniformément, sur $[0,2\pi]$ car $\sum_{n\geq 0} f_n$ et $\sum_{n\geq 1} f_{-n}$ convergent normalement et $|e^{-ipt}| = 1$ pour tout $t \in [0,2\pi]$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $t \mapsto f_n(t)e^{-ipt}$ est continue sur $[0,2\pi]$.
On a donc :

$$\begin{aligned}
c_p(2\pi F) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\pi\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n(t)\right)e^{-ipt}dt\\
&= \int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} f_{-n}(t)\right)e^{-ipt}dt \quad \text{(par définition de } \sum_{n\in\mathbb{Z}}\text{)}\\
&= \int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)e^{-ipt}dt + \int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_{-n}(t)\right)e^{-ipt}dt \quad \text{(par linéarité de l'intégrale)}\\
&= \int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)e^{-ipt}dt + \int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} f_{-n}(t)e^{-ipt}dt\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi} f_n(t)e^{-ipt}dt + \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{2\pi} f_{-n}(t)e^{-ipt}dt\\
&\qquad \text{(intervertion } \textstyle\sum / \int \text{ justifiée grâce aux hypothèses vérifiées avant le calcul)}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi} f(t+2n\pi)e^{-ipt}dt + \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{2\pi} f(t-2n\pi)e^{-ipt}dt\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} f(t)e^{-ip(t-2n\pi)}dt + \sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-2n\pi}^{-2(n-1)\pi} f(t)e^{-ip(t+2n\pi)}dt \quad \text{(changement de variable affine)}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} f(t)e^{-ipt}dt + \sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-2n\pi}^{-2(n-1)\pi} f(t)e^{-ipt}dt \quad \text{(car } t\mapsto e^{-ipt} \text{ est } 2\pi\text{-périodique)}\\
&= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-ipt}dt + \int_{-\infty}^0 f(t)e^{-ipt}dt\\
&\qquad \text{(relation de Chasles et intégrales convergentes car, comme } |f(t)| \leq \frac{C_1}{1+t^2}\text{, } f \text{ est intégrable)}\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ipt}dt = \widehat{f}(p).
\end{aligned}$$

- De même, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $t \mapsto \widehat{f}(n)e^{int}$ est continue sur $[0,2\pi]$ et $\sum_{n\geq 0}\widehat{f}(n)e^{int}$ et $\sum_{n\geq 1}\widehat{f}(-n)e^{-int}$ convergent normalement, donc uniformément sur $[0,2\pi]$.
On a donc

$$\begin{aligned}
c_p(G) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(n)e^{int}\right)e^{-ipt}dt\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\widehat{f}(n)e^{i(n-p)pt}dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\widehat{f}(-n)e^{-i(n+p)t}dt\\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\widehat{f}(n)e^{i(n-p)pt}dt + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\widehat{f}(-n)e^{-i(n+p)t}dt\\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\widehat{f}(n)\underbrace{\int_0^{2\pi} e^{i(n-p)pt}dt}_{=0 \text{ si } n\neq p} + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\widehat{f}(-n)\underbrace{\int_0^{2\pi} e^{-i(n+p)t}dt}_{=0 \text{ si } n\neq -p}\\
&= \frac{1}{2\pi}\widehat{f}(p)\int_0^{2\pi} 1dt = \widehat{f}(p).
\end{aligned}$$

- On a donc $c_p(2\pi F) = c_p(G)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$, donc, d'après la propriété admise (on a bien aussi $(2\pi F, G) \in (\mathcal{C}_{2\pi})^2$), on a $G = 2\pi F$.

12. Soit $g : t \in \mathbb{R} \mapsto f\left(\dfrac{at}{2\pi}\right)$.

- g est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions continues.

• Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|g(t)| = \left| f\left(\frac{at}{2\pi}\right) \right| \leq \frac{C_1}{1 + (at/2\pi)^2}.$$

Or, $h : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\frac{C_1}{1+(at/2\pi)^2}}{\frac{1}{1+t^2}} = \frac{C_1(1+t^2)}{1+(at/\pi)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

De plus, $\lim\limits_{t \to \pm\infty} h(t) = \frac{C_1 \pi^2}{a^2}$, donc il existe A_1 et A_2 tel que

$$\forall t \geq A_1, 0 \leq h(t) \leq \frac{C_1\pi^2}{a^2} + 1 \quad \text{et} \quad \forall t \leq A_2, 0 \leq h(t) \leq \frac{C_1\pi^2}{a^2} + 1.$$

De plus, h est continue sur le segment $[A_1, A_2]$, donc est bornée sur cet intervalle.
h est donc bornée sur $]-\infty, A_2]$, sur $[A_2, A_1]$ et sur $[A_1, +\infty[$, donc h est bornée sur $\mathbb{R}$.
Soit M un majorant de h sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|g(t)| \leq \frac{C_1}{1+(at/2\pi)^2} = \frac{1}{1+t^2} h(t) \leq \frac{M}{1+t^2}.$$

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
widehatg(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-itx} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{at}{2\pi}\right) e^{-ixt} dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-2i\pi x u/a} \frac{2\pi du}{a} \quad \text{(changement de variable affine } u = \frac{at}{2\pi}\text{)} \\
&= \frac{2\pi}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i(2\pi x/a)u} du = \frac{2\pi}{a} \widehat{f}\left(\frac{2\pi x}{a}\right)
\end{aligned}$$

Comme pour f, on montre alors l'existence de $N \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|\widehat{g}(x)| = \left| \frac{2\pi}{a} \widehat{f}\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \right| \leq \frac{N}{1+x^2}.$$

• En appliquant alors le résultat de la question précédente à la fonction g, qui vérifie les mêmes hypothèses que f, on a

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{g}(n) = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(2n\pi), \quad \text{ie} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{2\pi}{a} \widehat{f}\left(\frac{2\pi n}{a}\right) = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(na).$$

En divisant enfin par 2π de part et d'autres, on obtient bien le résultat demandé.

IV. Etude de la dérivabilité de R en π

13. • Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, donc, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{e^{it^2} - 1}{t^2} = \frac{1}{t^2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it^2)^n}{n!} - 1 \right) \\
&= \frac{1}{t^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(it^2)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^n t^{2n-2}}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^{n+1} t^{2n}}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

Cette formule est encore valable pour $t = 0$ car, pour $t = 0$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{i^{n+1} t^{2n}}{(n+1)!} = i = f(0)$, donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^{n+1} t^{2n}}{(n+1)!},$$

et f est donc développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
• Par suite, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

14. Pour tout $t \neq 0$,

$$f'(t) = \frac{2ite^{it^2}t^2 - 2t(e^{it^2}-1)}{t^4} = 2i\frac{e^{it^2}}{t} - 2\frac{e^{it^2}-1}{t^3}.$$

Comme $|e^{it^2}| = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$|f'(t)| = O\left(\frac{1}{t}\right) - O\left(\frac{1}{t^3}\right) = O\left(\frac{1}{t}\right) \underset{t\to\pm\infty}{\rightarrow} 0.$$

Pour tout $t \neq 0$,

$$\begin{aligned} f''(t) &= 2i\frac{2ite^{it^2}t - e^{it^2}}{t^2} - 2\frac{2ite^{it^2}t^3 - 3t^2(e^{it^2}-1)}{t^6} \\ &= -4e^{it^2} - 2i\frac{e^{it^2}}{t^2} - 4i\frac{e^{it^2}}{t^2} + 6\frac{e^{it^2}-1}{t^4} \\ &= -4e^{it^2} - 6i\frac{e^{it^2}}{t^2} + 6\frac{e^{it^2}-1}{t^4} = -4e^{it^2} + \underset{t\to\pm\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right). \end{aligned}$$

15. • $x \mapsto e^{ix^2}$ est continue sur le segment $[0,1]$, donc $\int_0^1 e^{ix^2}dx$ converge.

• Soit $u(x) = \frac{1}{x}$, $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $v'(x) = xe^{ix^2}$, $v(x) = -\frac{i}{2}e^{ix^2}$.
u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$.
$\lim_{x\to+\infty} u(x)v(x) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{i}{2}\frac{e^{ix^2}}{x} = 0$ car $|e^{ix^2}| = 1$.
D'où, par intégration par partie, $\int_1^{+\infty} e^{ix^2}dx = \int_1^{+\infty} u(x)v'(x)dx$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{i}{2}\frac{e^{ix^2}}{x^2}dx$.
Or, $\left|\frac{i}{2}\frac{e^{ix^2}}{x^2}\right| = \underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$,
donc, comme $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, $x \mapsto \frac{i}{2}\frac{e^{ix^2}}{x^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc, en particulier, $\int_1^{+\infty} \frac{i}{2}\frac{e^{ix^2}}{x^2}dx$ converge, et, par suite, $\int_1^{+\infty} e^{ix^2}dx$ converge.

• $\int_0^1 e^{ix^2}dx$ et $\int_1^{+\infty} e^{ix^2}dx$ convergent, donc $\int_0^{+\infty} e^{ix^2}dx$ converge.
Comme de plus $x \mapsto e^{ix^2}$ est paire, $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix^2}dx$ converge.

16. • Comme f est continue et intégrable (car $f(t) = \underset{t\to\pm\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$) sur $\mathbb{R}$, $\widehat{f}$ est définie sur $\mathbb{R}$ d'après la question 3.

• Soit $x \in \mathbb{R}^*$.
Posons $u(t) = f(t)$, $u'(t) = f'(t)$, $v'(t) = e^{-ixt}$, $v(t) = \frac{i}{x}e^{-ixt}$.
u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
$\lim_{x\to\pm\infty} u(t)v(t) = \lim_{t\to\pm\infty} \underbrace{\frac{i}{x}e^{ixt}}_{\text{borné}} \underbrace{f(t)}_{=O\left(\frac{1}{t^2}\right)\to 0} = 0.$
Enfin, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)v'(t)dt$ converge (et vaut $\widehat{f}(x)$), donc on peut intégrer par parties et on a :

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)v'(t)dt = \left[\frac{i}{x}f(t)e^{-ixt}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i}{x}f'(t)e^{-ixt}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{i}{x}e^{-ixt}f'(t)dt.$$

• Posons cette fois $u(t) = f'(t)$, $u'(t) = f''(t)$, $v'(t) = -\frac{i}{x}e^{ixt}$, $v(t) = \frac{1}{x^2}e^{-ixt}$.
u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
$\lim_{x\to\pm\infty} u(t)v(t) = \lim_{t\to\pm\infty} \underbrace{\frac{1}{x^2}e^{-ixt}}_{\text{borné}} \underbrace{f'(t)}_{\to 0 \text{ d'après } 14} = 0.$

Enfin, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)v'(t)dt$ converge (et vaut $\widehat{f}(x)$), donc on peut intégrer par parties et on a :

$$\begin{aligned}\widehat{f}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{i}{x}e^{-ixt}f'(t)dt \\ &= \left[\frac{1}{x^2}f'(t)e^{-ixt}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2}f''(t)e^{-ixt}dt \\ &= -\frac{1}{x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} f''(t)e^{-ixt}dt.\end{aligned}$$

- Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}f''(t)e^{-ixt} &= \left(-4e^{it^2} + j(t)\right)e^{-ixt} = -4e^{i(t^2-xt)} + j(t)e^{-ixt} \\ &= -4e^{i(t-x/2)^2} \times e^{-ix^2/4} + j(t)e^{-ixt} = -4e^{-ix^2/4}e^{i(t-x/2)^2} + j(t)e^{-ixt},\end{aligned}$$

où $j(t) = f''(t) + 4e^{-it^2} \underset{t\to\pm\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ (et ne dépend pas de x).

Par suite, $t \mapsto j(t)e^{-ixt}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et, comme $|j(t)e^{-ixt}| = |j(t)| \underset{t\to\pm\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$, $t \mapsto j(t)e^{-ixt}$ sera intégrable sur $\mathbb{R}$, et, en particulier, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} j(t)e^{-ixt}dt$ converge et

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} j(t)e^{-ixt}dt\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |j(t)|dt \underset{x\to\pm\infty}{=} O(1).$$

De plus, le changement de variable affine $u = t - x/2$ donne la convergence et la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} -4e^{-ix^2/4}e^{i(t-x/2)^2}dt = -4e^{-ix^2/4}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu^2}du = -4e^{-ix^2/4}I,$$

car I converge d'après la question 15.

Finalement, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f''(t)e^{-ixt}dt$ converge comme combinaison linéaire d'intégrales convergentes et

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f''(t)e^{-ixt}dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} -4e^{-ix^2/4}e^{i(t-x/2)^2}dt + \int_{-\infty}^{+\infty} j(t)e^{-ixt}dt \\ &= 4e^{-ix^2/4}I + \underset{x\to\pm\infty}{=} O(1) \underset{x\to\pm\infty}{=} O(1)\end{aligned}$$

- On a donc bien

$$\widehat{f}(x) = -\frac{1}{x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} f''(t)e^{-ixt}dt = -\frac{1}{x^2}\underset{x\to\pm\infty}{O}(1) \underset{x\to\pm\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

17. - f est continue sur $\mathbb{R}$.

De plus, comme $f(t) \underset{t\to\pm\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$, $(t^2+1)f(t) \underset{t\to\pm\infty}{=} O(1)$, donc $t \mapsto (t^2+1)f(t)$ est bornée au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, et sur tout fermé borné de $\mathbb{R}$, donc il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |f(t)| \leq \frac{M}{1+t^2}.$$

De même, $\widehat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (d'après la question 3) et $\widehat{f}(t) \underset{t\to\pm\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ (d'après la question 16), donc il existe $N \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |\widehat{f}(t)| \leq \frac{N}{1+t^2}.$$

On peut donc appliquer la formule sommatoire de Poisson à f. D'où, pour tout $x > 0$, en prenant $a = \sqrt{x}$, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right),$$

ie, comme f est paire et donc $\widehat{f}$ aussi (via le changement de variable $u = -t$),

$$i + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in^2x}-1}{n^2x} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\widehat{f}(0) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right)\right).$$

Comme toutes les séries suivantes sont absolument convergentes, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{in^2x}-1}{n^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{in^2x}}{n^2}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=F(x)-F(0).$$

On a donc

$$i+\frac{2}{x}\left(F(x)-F(0)\right)=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\widehat{f}(0)+2\sum_{n=1}^{+\infty}\widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right)\right),\quad \text{ie}\quad F(x)=F(0)+\frac{\sqrt{x}}{2}\widehat{f}(0)-\frac{ix}{2}+\sqrt{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right).$$

Enfin, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\left|\widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right)\right|\leq\frac{C_2}{1+\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right)^2}=\frac{xC_2}{x+4n^2\pi^2}\leq x\frac{C_2}{4n^2\pi^2},$$

donc, en sommant et en utilisant l'inégalité triangulaire généralisée,

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right)\right|\leq\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right)\right|\leq x\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{C^2}{4n^2\pi^2}}_{\text{constante}},$$

donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right)=\underset{x\to 0^+}{O}(x)$ et, par suite,

$$F(x)=F(0)+\frac{\sqrt{x}}{2}\widehat{f}(0)-\frac{ix}{2}+\sqrt{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right)=F(0)+\frac{\sqrt{x}}{2}\widehat{f}(0)-\frac{ix}{2}+\underset{x\to 0^+}{O}(x\sqrt{x}).$$

On a donc $b=-i/2$ et $a=\dfrac{1}{2}\widehat{f}(0)$.

18. Pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
F(x+\pi)&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{in^2(x+\pi)}}{n^2}\\
&=\sum_{\substack{n=1\\ n\text{ pair}}}^{+\infty}\frac{e^{in^2x}e^{in^2\pi}}{n^2}+\sum_{\substack{n=1\\ n\text{ impair}}}^{+\infty}\frac{e^{in^2x}e^{in^2\pi}}{n^2}\\
&=\sum_{\substack{n=1\\ n\text{ pair}}}^{+\infty}\frac{e^{in^2x}}{n^2}-\sum_{\substack{n=1\\ n\text{ impair}}}^{+\infty}\frac{e^{in^2x}}{n^2}\quad(\text{car } n \text{ et } n^2 \text{ ont la même parité, donc } e^{in^2\pi}=(-1)^n)\\
&=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{e^{ik^2(4x)}}{4k^2}-\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{in^2x}}{n^2}-\sum_{\substack{n=1\\ n\text{ pair}}}^{+\infty}\frac{e^{in^2x}}{n^2}\right)\\
&=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{e^{ik^2(4x)}}{k^2}-\left(F(x)-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{e^{ik^2(4x)}}{4k^2}\right)\\
&=\frac{1}{4}F(4x)-\left(F(x)-\frac{1}{4}F(4x)\right)=\frac{1}{2}F(4x)-F(x).
\end{aligned}$$

19. Pour tout $x>0$,

$$\begin{aligned}
R(x+\pi)&=\mathrm{Im}\left(F(x+\pi)\right)=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(F(4x)\right)-\mathrm{Im}\left(F(x)\right)\\
&=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(F(0)+\sqrt{x}\widehat{f}(0)-2ix+\underset{x\to 0^+}{O}(x\sqrt{x})\right)-\mathrm{Im}\left(F(0)+\frac{\sqrt{x}}{2}\widehat{f}(0)-\frac{ix}{2}+\underset{x\to 0^+}{O}(x\sqrt{x})\right)\quad(\text{question 17})\\
&=-\frac{1}{2}x+\underset{x\to 0^+}{O}(x\sqrt{x})\quad(\text{car } F(0)\in\mathbb{R})\\
&=-\frac{1}{2}x+\underset{x\to 0^+}{o}(x).
\end{aligned}$$

Comme R est impaire (somme de fonctions impaire) et 2π-périodique, on a, pour tout $x<0$,

$$R(\pi+x)=R(\pi+x-2\pi)=R(-(\pi+(-x)))=-R(\pi+(-x))=-\left(-\frac{1}{2}(-x)+\underset{-x\to 0^+}{o}(x)\right)=-\frac{1}{2}x+\underset{x\to 0^-}{o}(x).$$

On a donc $R(x)=-\dfrac{1}{2}x+\underset{x\to 0}{o}(x)$.

R est donc définie et continue en π (question 1) et admet un développement limité à l'ordre 1 en π, donc R est dérivable en π et $R'(\pi)=-\dfrac{1}{2}$.