

ISP/BUKAVU

Département de
Mathématique-Physique



Équations différentielles ordinaires

Dr. Dieudonné Z. BALIKE, Ph.D.

Cours destiné aux étudiants de 2^e Bachelier
Math-Info & Math-Physique
2024-2025

©Version de juin 2025.

Table des matières

Contrat pédagogique	iv
Identification de l'UE	iv
Présentation de l'animateur	iv
Objectifs de l'UE et Compétences à développer	iv
Matériels du cours	v
Déroulement de l'UE	v
Mode d'évaluation	v
Avertissements	v
Introduction	1
1 Équations différentielles linéaires	3
1.1 Généralités	3
1.2 Équations différentielles scalaires linéaires du premier ordre	4
1.3 Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire et conséquences	6
1.4 Exponentielles de matrices	8
1.4.1 Définition	9
1.4.2 Comment calculer une exponentielle de matrice	10
1.5 Le cas linéaire homogène à coefficients constants	11
1.5.1 Le cas des systèmes	11
1.5.2 Le cas scalaire d'ordre n	16
1.6 La méthode de variation des constantes	18
1.6.1 Le cas des systèmes	18
1.6.2 Le cas scalaire d'ordre n	19
1.6.3 Application au cas des coefficients constants	20
1.6.4 Le cas particulier important des EDO du second ordre	22
1.7 Comportement asymptotique des solutions	24
1.8 Exercices	28
2 Équations différentielles non linéaires	37
2.1 Le théorème de Cauchy-Lipschitz	37
2.2 Quelques propriétés qualitatives des solutions	41
2.2.1 Critères d'existence globale	41
2.2.2 Dépendance par rapport aux paramètres et conditions initiales	43
2.2.3 Le flot	45
2.2.4 Exemples d'équations différentielles non linéaires	47

2.2.5	Equations différentielles du type $x'\partial_x f + \partial_t f = 0$	47
2.2.5.1	Exemple typique 1 : Équations à variables séparées.	47
2.2.5.2	Exemple typique 2 : Équations homogènes.	49
2.2.5.3	Équations aux différentielles totales. Facteur intégrant	49
2.2.6	Équation de Bernoulli	53
2.2.7	Équation de Ricatti	53
2.2.8	Exemples d'équations non linéaires d'ordre supérieur	54
2.3	Exercices	55
3	Equations différentielles autonomes	58
3.1	Champs de vecteurs	58
3.2	Stabilité des solutions stationnaires	65
3.3	Points stationnaires hyperboliques	69
3.4	Exercices	71
4	Applications des EDO à la modélisation	76
4.1	Introduction à la modélisation	76
4.1.1	Qu'est-ce que la modélisation ?	76
4.1.2	Importance de la modélisation	77
4.1.3	Derniers développements dans la modélisation mathématique	78
4.1.4	Les unités	81
4.1.5	Dimensions et analyse dimensionnelle	81
4.1.5.1	Dimensions	81
4.1.5.2	Analyse dimensionnelle	84
4.1.5.3	Réduction dimensionnelle (ou "mise à l'échelle" (scaling))	85
4.1.6	Comment construire un modèle mathématique ?	87
4.1.6.1	Étape 1 : le début	87
4.1.6.2	Étape 2 : les hypothèses	88
4.1.6.3	Étape 3 : chémas ou diagrammes de flux	89
4.1.6.4	Étape 4 : choix des équations mathématiques	89
4.1.6.5	Étape V : résolution d'équations)	89
4.1.6.6	tape VI : interprétation du résultat	90
4.1.7	Exemples élémentaires de modèles mathématiques et fonctions	90
4.1.7.1	Modèles linéaires	90
4.1.7.2	Modèles quadratiques	90
4.1.7.3	Modèles cubiques	91
4.2	Modèles en dynamique des populations	92
4.2.1	Dynamique d'une population	92
4.2.1.1	Fonction logistique et modèle de croissance logistique	92
4.2.1.2	Fonction de Gompertz et modèle de croissance de Gompertz	92
4.2.1.3	Réponses fonctionnelles dans la dynamique des popula- tions	93
4.2.2	Modèle de croissance avec effet "Allee"	95
4.2.2.1	Dynamique d'une population exploitée	98
4.2.3	Deux populations en interactions	101
4.2.3.1	Modèle de Lotka-Volterra	102
4.2.3.2	Modèle de Lotka-Volterra et croissance logistique	106

4.2.3.3	Modèle proie-prédateur de Holling	109
4.2.3.4	Modèle proie-prédateur de Beddington	115
4.3	Applications en Epidémiologie	117
4.3.1	Introduction	117
4.3.2	La modélisation mathématique	118
4.3.3	Le processus dynamique de l'infection	119
4.3.4	Quelques modèles mathématiques de la dynamique des maladies infectieuses	120
4.3.4.1	Le modèle SI	120
4.3.4.2	Le modèle SIS	122
4.3.4.3	Le modèle SIR	122
4.3.4.4	Le modèle $SIRS$	124
4.3.4.5	Modèle $SEIR$	125
4.4	Exercices	126

Contrat pédagogique

Identification de l'UE

Code : GED1231 (EC3)

Intitulé : Equations différentielles ordinaires.

Rattachement : Section Sciences Exactes, Département de Mathématique-Physique/Informatique.

Destinataires : Étudiants de Bac 2 Math-Informatique et Math-Physique de l'ISP/Bukavu.

Prérequis : Pour bien participer à ce cours, l'étudiant est supposé avoir des connaissances en Analyse I, en séries entières, en Algèbre linéaire et en calcul différentiel.

Présentation de l'animateur

Dieudonné Zirhumanana Balike est chargé des CMI et les TD.

M. Balike a un doctorat en Mathématiques Appliquées de l'Université de Naples Federico II, en Italie.

Ses recherches portent sur les équations différentielles ordinaires (EDO) et les équations différentielles aux dérivées partielles et leurs applications en Biologie, en Écologie, en Médecine, etc.

Objectifs de l'UE et Compétences à développer

Cette UE a pour objectifs, entre autres, de :

- Introduire la notion d'EDO aux étudiants de Bac 2 MI et MP ;
- Donner les fondements théoriques théorique equations différentielles ordinaires ;
- Résoudre les EDO par des méthodes analytiques et numériques ;
- Étudier la stabilité d'une EDO.

Chaque étudiant qui aura suivi et relu plusieurs fois l'intégralité de cette UE sera à mesure de :

- Résoudre analytiquement et numériquement une EDO linéaire ou non inéaire ;
- Étudier la stabilité d'un système autonome de manière analytique et numérique ;
- Prouver les théorèmes énoncés et démontrés pendant les séances de cours magistraux.

Matériels du cours

Le cours est sur un support électronique et il est gratuitement distribué aux étudiants sous le format électronique. Le cours et les TD sont sur des supports différents. Des références (majoritairement en anglais et des sites internet seront aussi rendus disponibles pour les approfondissements).

Nous utiliserons le tableau et la craie et de temps en temps nous ferons la projection quand c'est nécessaire.

Déroulement de l'UE

L'UE a lieu au troisième semestre.

Mode d'évaluation

Les étudiants seront évalués de deux manières : d'abord par les TD fréquents en cours et les devoirs et enfin par l'examen. Les travaux parfois seront faits en groupes et individuellement.

Avertissements

Malgré mon effort de nettoyer ce manuscrit, il est fort possible qu'il subsiste des coquilles et des fautes. N'hésitez pas à me les signaler pour les corriger.

Ce cours peut vite devenir très difficile pour les étudiants qui n'ont pas des bases solides des prérequis donnés.

Introduction

On appelle *équation différentielle ordinaire* (EDO en abrégé) toute expression du type

$$X' = F(t, X) \quad (S)$$

où F est une fonction continue définie sur $I \times A$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$ et A une partie de $\mathbb{R}^n$, et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ ou dans ${}^1\mathbb{C}^n$. La fonction F a donc n composantes $F_1, \dots, F_n$ qui sont des fonctions de $I \times A$ dans $\mathbb{K}$ et l'EDO ci-dessus peut donc se récrire

$$\begin{pmatrix} X'_1 \\ \vdots \\ X'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(t, X_1, \dots, X_n) \\ \vdots \\ F_n(t, X_1, \dots, X_n) \end{pmatrix}$$

Lorsque $n \geq 2$, pour souligner le fait que l'expression considérée dans (S) comporte plusieurs équations, on parle aussi de système différentiel du premier ordre.

Par analogie avec la physique (dont, historiquement, l'étude des équations différentielles est issue), la variable t est souvent appelée "temps". Une EDO est dite autonome (resp. non autonome) si F ne dépend pas de t (resp. F dépend de t).

Définition 0.0.1 *On dit que la fonction ϕ définie sur un sous-intervalle J de I et à valeurs dans $\mathbb{K}^n$ est solution de l'équation différentielle associée à F si elle est dérivable sur J et vérifie*

$$\forall t \in J, \phi(t) \in A \quad \text{et} \quad \phi'(t) = F(t, \phi(t)). \quad (1)$$

Remarque 0.0.2 *En intégrant l'expression ci-dessus entre t_0 et t (où t_0 est un élément arbitraire de J) on obtient*

$$\phi(t) = \phi(t_0) + \int_{t_0}^t F(\tau, \phi(\tau)) d\tau \quad (2)$$

L'expression

$$X = X_0 + \int_{t_0}^t F(\tau, X) d\tau \quad (I)$$

est appelée équation différentielle intégrée.

Pour les fonctions assez régulières, les formulations (I) et (S) sont équivalentes. En effet, il est clair que toute solution ϕ de (S) définie près de t_0 vérifie (2). Réciproquement, si ϕ

est continue et vérifie (2) près de t_0 alors le théorème de composition (souvenons-nous que F est continue) assure que ϕ est C^1 près de t_0 ; en dérivant on vérifie que ϕ est solution de (S) (Dans la suite, $\mathbb{K}$ désignera indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Remarque 0.0.3 *Tout système différentiel non autonome à n équations se ramène à un système différentiel de $n + 1$ équations autonome grâce à l'artifice suivant :*

$$\begin{pmatrix} X'_1 \\ \vdots \\ X'_n \\ T' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(T, X_1, \dots, X_n) \\ \vdots \\ F_n(T, X_1, \dots, X_n) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donnons-nous maintenant une fonction f définie et continue sur $I \times A$ et à valeurs scalaires (c'est-à-dire dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). L'expression

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) \quad (\text{E})$$

est appelée équation différentielle scalaire d'ordre n associée à f . On dit que la fonction φ définie sur un sous-intervalle J de I et à valeurs dans $\mathbb{K}^n$ est solution de l'équation différentielle scalaire associée à f si elle est n fois dérivable sur J et vérifie

$$\forall t \in J, (\varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) \in A \quad \text{et} \quad \varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)).$$

Remarque 0.0.4 *Toute équation différentielle scalaire d'ordre n peut être interprétée comme un système de n équations différentielles. En effet, en posant $X_0 = x, X_1 = x',$ etc, on constate que résoudre (E) est équivalent à résoudre*

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_{n-2} \\ X_{n-1} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_{n-1} \\ f(t, X_0, X_1, \dots, X_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

Voici une liste de problèmes importants liés à l'étude d'une EDO et que l'on souhaite aborder dans ce cours introductif.

- Trouver des solutions explicites (mais ce n'est pas toujours possible) et, plus généralement, démontrer l'existence de solutions.
- Étudier le problème de Cauchy : est-il possible de trouver une solution prenant une valeur prescrite X_0 au temps t_0 ? Y-a-t-il unicité d'une telle solution ? Quel est le plus grand intervalle $J \subset I$ où une telle solution existe ? La solution correspondante est appelée solution maximale.
- Étudier le comportement des solutions maximales aux bornes de J et trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour que $I = J$.
- Étudier la stabilité des solutions : si on perturbe un peu t_0, X_0 ou F , la solution obtenue est-elle très différente de la solution initiale ?
- Trouver des algorithmes permettant de calculer des solutions approchées d'une EDO. Cela est particulièrement intéressant si l'EDO considérée n'admet pas de solution explicite.

Chapitre 1

Équations différentielles linéaires

1.1 Généralités

Définition 1.1.1 On dit que le système différentiel (S) est linéaire si pour tout $t \in I$ la fonction $X \mapsto F(t, X)$ est affine : il existe un vecteur $B(t)$ de $\mathbb{K}^n$ et une matrice $A(t)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que

$$\forall (t, X) \in I \times \mathbb{K}^n, F(t, X) = B(t) + A(t)X.$$

Dans la suite, on demandera aux fonctions $t \mapsto A(t)$ et $t \mapsto B(t)$ d'être continues. Un système linéaire est dit homogène si la fonction B est identiquement nulle. Le système

$$X' = A(t)X \tag{I}$$

est appelé système homogène associé à

$$X' = A(t)X + B(t) \tag{S}$$

Définition 1.1.2 On dit qu'une équation différentielle scalaire d'ordre n est linéaire s'il existe $n + 1$ fonctions $b, a_1, \dots, a_n$ de $\mathcal{C}(I; \mathbb{K})$ telles que

$$\forall (t, x_1, \dots, x_n) \in I \times \mathbb{K}^n, f(t, x_1, \dots, x_n) = b(t) + a_1(t)x_1 + \dots + a_n(t)x_n.$$

On dit que ce système linéaire est homogène si la fonction b est identiquement nulle, et l'on définit comme précédemment l'équation différentielle homogène associée en remplaçant b par 0.

Proposition 1.1.3 Soit (S) un système différentiel linéaire, et (S') le système homogène associé. Soit ϕ_0 une solution de (S) . Alors ϕ est solution de (S) si et seulement si $\phi - \phi_0$ est solution de (S') .

Démonstration : Si ϕ et ϕ_0 vérifient (S) , il est clair que la différence $\phi - \phi_0$ vérifie (S') . Réciproquement, si $\phi - \phi_0$ vérifie $(\phi - \phi_0)' = A(t)(\phi - \phi_0)$ et ϕ_0 vérifie $\phi'_0 = A(t)\phi_0 + B(t)$, on a bien $\phi' = A(t)\phi + B(t)$.

Remarque 1.1.4 *Autrement dit, la solution générale d'un système linéaire (S) s'écrit comme somme des solutions générales du système homogène associé et d'une solution particulière.*

1.2 Équations différentielles scalaires linéaires du premier ordre

Théorème 1.2.1 *Soit a une fonction numérique continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et soit $t_0 \in I$. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle scalaire homogène*

$$x' = a(t)x \quad (I)$$

est le sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\mathcal{C}(I; \mathbb{R})$ engendré par la fonction

$$t \mapsto e^{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau}.$$

Démonstration : Soit φ une fonction dérivable sur I . Posons

$$\psi(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \varphi(t) e^{-\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau}$$

Un calcul immédiat donne $\psi'(t) = e^{-\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau} (\varphi'(t) - a(t)\varphi(t))$. Donc φ est solution de (E') si et seulement si ψ' est la fonction nulle, c'est-à-dire ψ constante, ce qui donne le résultat voulu. $\square$

Remarque 1.2.2 *On observe que si φ solution de (E') n'est pas la fonction nulle, alors elle ne s'annule jamais. De ce fait, elle est solution de $x'/x = a(t)$, qui peut s'intégrer "à vue" puisque x'/x est la dérivée de $\log|x|$.*

Exercice : Résoudre $x' + ax = 0$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Théorème 1.2.3 *Soit a et b deux fonctions numériques continues sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors l'équation différentielle scalaire d'ordre 1*

$$x' = a(t)x + b(t) \quad (E)$$

admet une unique solution prenant la valeur x_0 en t_0 . Il s'agit de la fonction

$$\varphi : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto e^{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau} \left(x_0 + \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^{\tau} a(\tau') d\tau'} b(\tau) d\tau \right) \end{cases}$$

Démonstration : Soit φ une fonction dérivable sur I . Observons que

$$\frac{d}{dt} \left(\varphi(t) e^{-\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau} \right) = e^{-\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau} (\varphi'(t) - a(t)\varphi(t)).$$

Donc φ est solution de (E) si et seulement si

$$\frac{d}{dt} \left(\varphi(t) e^{-\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau} \right) = e^{-\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau} b(t)$$

Cette égalité s'intègre en

$$\varphi(t) e^{-\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau} = K + \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^{\tau} a(\tau') d\tau'} b(\tau) d\tau$$

La condition $\varphi(t_0) = x_0$ est donc vérifiée si et seulement si $K = x_0$. □

Exercice : Transformée de Fourier de la Gaussienne : pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Vérifier que f est C^1 et solution d'une équation différentielle scalaire du premier ordre que l'on déterminera, puis calculer f .

Lemme 1.2.4 (de Gronwall) Soit a et φ deux fonctions continues et positives sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbb{R}^+$. Supposons que

$$\forall t \in I, \varphi(t) \leq x_0 + \left| \int_{t_0}^t a(\tau) \varphi(\tau) d\tau \right|$$

Alors on a

$$\forall t \in I, \varphi(t) \leq x_0 e^{\left| \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau \right|}.$$

Démonstration : On considère juste le cas $t \geq t_0$, le cas $t < t_0$ étant laissé en exercice. On pose alors

$$\psi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t a(\tau) \varphi(\tau) d\tau$$

On a $\psi'(t) = a(t) \varphi(t) \leq a(t) \psi(t)$. Soit

$$\Psi(t) = e^{-\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau} \psi(t)$$

D'après l'inégalité ci-dessus, on a $\Psi' \leq 0$, donc la fonction Ψ est décroissante. Donc, pour $t \geq t_0$, on a

$$\Psi(t) \leq \Psi(t_0) = x_0$$

d'où après multiplication par $e^{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau}$,

$$\phi(t) \leq \psi(t) \leq x_0 e^{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau}.$$

C'es bien le résultat souhaité. □

1.3 Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire et conséquences

Dans toute cette section, on considère un système différentiel linéaire

$$X' = A(t)X + B(t) \quad (S)$$

avec $A \in \mathcal{C}(I; \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ et $B \in \mathcal{C}(I; \mathbb{K}^n)$.

Théorème 1.3.1 (de Cauchy-Lipschitz linéaire). *Pour tout $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathbb{K}^n$, le système différentiel (S) admet une unique solution ϕ de classe C^1 sur I et telle que $\phi(t_0) = X_0$.*

Démonstration : Munissons $\mathbb{K}^n$ d'une norme $\|\cdot\|$ et définissons sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la norme suivante :

$$\|A\| \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{\{X \in \mathbb{K}^n, \|X\|=1\}} \|AX\|$$

(i) **Unicité.** Considérons deux solutions ϕ et ψ de (S). Alors $\theta \stackrel{\text{def}}{=} \phi - \psi$ est solution du système homogène associé à (S), et $\theta(t_0) = 0$. De ce fait, on a

$$\theta(t) = \int_{t_0}^t A(\tau)\theta(\tau)d\tau$$

donc $a(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \|\theta(t)\|$ vérifie

$$a(t) \leq \left| \int_{t_0}^t \|A(\tau)\| a(\tau) d\tau \right|$$

Le lemme de Gronwall assure donc que $a \equiv 0$ sur I , c'est-à-dire $\phi \equiv \psi$.

(ii) **Existence.** On va montrer l'existence d'une fonction ϕ continue sur I telle que

$$\forall t \in I, \phi(t) = X_0 + \int_{t_0}^t (A(\tau)\phi(\tau) + B(\tau))d\tau \quad (1.2)$$

Il est alors clair que ϕ est de classe C^1 (car le second membre l'est), vérifie (S) et $\phi(t_0) = X_0$.

Pour résoudre (1.2), on va construire par récurrence une suite $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de solutions approchées. On choisit $\phi_0(t) = X_0 + \int_{t_0}^t B(\tau)d\tau$, puis une fois ϕ_n construite, on pose

$$\forall t \in I, \phi_{n+1}(t) = X_0 + \int_{t_0}^t (A(\tau)\phi_n(\tau) + B(\tau))d\tau \quad (1.3)$$

On obtient ainsi une suite de fonctions continues sur I . Pour montrer la convergence de cette suite, on borne la différence entre deux termes consécutifs. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall t \in I, (\phi_{n+1} - \phi_n)(t) = \int_{t_0}^t A(\tau) (\phi_n(\tau) - \phi_{n-1}(\tau)) d\tau$$

Donc

$$\|\phi_{n+1}(t) - \phi_n(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|A(\tau)\| \|\phi_n(\tau) - \phi_{n-1}(\tau)\| d\tau \right|$$

Plaçons-nous sur un intervalle fermé borné $[\alpha, \beta] \subset I$ arbitraire. Il existe alors un $M \geq 0$ tel que $\|A(\tau)\| \leq M$ pour tout $\tau \in [\alpha, \beta]$. En conséquence, l'inégalité ci-dessus entraîne

$$\forall t \in [\alpha, \beta], \|\phi_{n+1}(t) - \phi_n(t)\| \leq M \left| \int_{t_0}^t \|\phi_n(\tau) - \phi_{n-1}(\tau)\| d\tau \right|$$

Soit $K = \sup_{t \in [\alpha, \beta]} \|\phi_1(t) - \phi_0(t)\|$. Une récurrence facile permet d'établir que

$$\forall t \in [\alpha, \beta], \|\phi_{n+1}(t) - \phi_n(t)\| \leq K \frac{(M |t - t_0|)^n}{n!}$$

On en déduit que la suite $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur $[\alpha, \beta]$. Elle converge donc vers une fonction ϕ continue sur $[\alpha, \beta]$. Comme $[\alpha, \beta]$ était un intervalle arbitraire inclus dans I , on conclut que $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction ϕ continue sur I tout entier.

En faisant tendre n vers l'infini dans (1.3), on constate que ϕ vérifie (1.2). $\square$

Remarque 1.3.2 *Le théorème ci-dessus établit l'existence et unicité d'une solution au problème de Cauchy pour les équations différentielles linéaires. On verra dans le chapitre 2 un résultat similaire pour des équations différentielles beaucoup plus générales.*

Étudions plus précisément la structure de l'ensemble des solutions de (S) dans le cas homogène.

Corollaire 1.3.3 *Dans le cas $B = 0$, l'ensemble $\mathcal{E}$ des solutions de (S) est un s.e.v. de dimension n de $\mathcal{C}^1(I; \mathbb{K}^n)$. Plus précisément, si $(X_1, \dots, X_n)$ est une famille libre de $\mathbb{K}^n$, $t_0 \in I$ et ϕ_i la solution de (S) valant X_i en t_0 alors $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ est une base de $\mathcal{E}$.*

Ce résultat repose sur le lemme suivant :

Lemme 1.3.4 *Soit $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ une famille de solutions du système différentiel (S) avec $B = 0$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *pour tout $t \in I$, la famille $(\phi_1(t), \dots, \phi_n(t))$ est libre ;*
- (ii) *il existe $t_0 \in I$ tel que la famille $(\phi_1(t_0), \dots, \phi_n(t_0))$ soit libre.*

Démonstration : L'implication directe est triviale. Supposons donc qu'il existe $t_0 \in I$ tel que la famille $(\phi_1(t_0), \dots, \phi_n(t_0))$ soit libre. Soit $t_1 \in I$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i(t_1) = 0$. Il est clair que la fonction $\sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i$ vérifie (S) et s'annule en t_1 . Comme la fonction nulle vérifie également (S) et s'annule en t_1 , la partie unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz assure que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i$ s'annule sur I . En particulier cette fonction s'annule en t_0 et donc

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i(t_0) = 0$$

La famille $(\phi_1(t_0), \dots, \phi_n(t_0))$ étant, par hypothèse, libre, tous les coefficients λ_i sont nuls. Donc $(\phi_1(t_1), \dots, \phi_n(t_1))$ est également libre. $\square$

Démonstration du corollaire 1 : Il est évident que $\mathcal{E}$ est non vide -car contient la fonction nulle constitué de fonctions $\mathcal{C}^1(I; \mathbb{K}^n)$ et stable par combinaisons linéaires. Donc c'est bien

un s.e.v. de $\mathcal{C}^1(I; \mathbb{K}^n)$.

Considérons la famille de solutions $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ donnée dans l'énoncé. Le lemme assure qu'elle est libre. Maintenant, si $\phi \in \mathcal{E}$ alors il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$\phi(t_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i(t_0).$$

On constate que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i$ vérifie aussi $\mathcal{E}$ et coïncide avec ϕ en t_0 . Donc par unicité

$$\phi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i$$

Donc $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ est génératrice et l'on a bien $\dim \mathcal{E} = n$. $\square$

Dans le cas général non homogène, on déduit de la remarque de la page 7 que l'ensemble des solutions de (S) est un sous-espace affine de dimension n de $\mathcal{C}^1(I; \mathbb{K}^n)$.

Considérons maintenant une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n :

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_0(t)x = b(t) \quad (E)$$

avec $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ et b fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

En identifiant (E) à un système différentiel du premier ordre (comme expliqué dans l'introduction), on obtient aisément cet énoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire.

Théorème 1.3.5 *Soit $t_0 \in I$ et $(x_0, \dots, x_{n-1})$ un n -uplet de $\mathbb{K}^n$. L'équation différentielle (E) admet une unique solution φ telle que $\varphi^{(i)}(t_0) = x_i$ pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$. De plus, l'ensemble $\mathcal{E}'$ des solutions de l'équation différentielle homogène (E') associée à (E) est un sous-espace vectoriel de dimension n de $\mathcal{C}^n(I; K)$.*

En conséquence, on peut décrire la structure de l'ensemble des solutions de (E) à l'aide du corollaire suivant.

Corollaire 1.3.6 *Dans le cas $b = 0$, l'ensemble $\mathcal{E}$ des solutions de (S) est un s.e.v. de dimension n de $\mathcal{C}^n(I; \mathbb{K}^n)$. Plus précisément, si $(X_1, \dots, X_n)$ est une famille libre de $\mathbb{K}^n$, $t_0 \in I$ et ϕ_i la solution de (E) telle que*

$$\begin{pmatrix} \phi_i(t_0) \\ \phi'_i(t_0) \\ \vdots \\ \phi_i^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} = X_i$$

alors $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ est une base de $\mathcal{E}$.

1.4 Exponentielles de matrices

Nous avons vu à la section 1.2 que la résolution des équations différentielles scalaires d'ordre 1 à coefficient constant était étroitement liée à la fonction exponentielle. Nous verrons que cette propriété remarquable demeure vraie pour les systèmes linéaires à coefficients constants mais il nous faut au préalable définir ce qu'est une exponentielle de matrice.

1.4.1 Définition

Proposition 1.4.1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et est appelée exponentielle de la matrice A . On note $\exp A$ ou e^A la somme de cette série.

Démonstration : On munit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'une norme $||| \cdot |||$. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie, la convergence de la série ne dépend pas du choix de la norme. Pour simplifier les calculs, on supposera que $||| \cdot |||$ est une norme d'algèbre c'est-à-dire que ¹.

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), |||AB||| \leq |||A||| |||B|||. \quad (1.4)$$

L'espace vectoriel normé $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), ||| \cdot |||)$ est complet puisqu'il est de dimension finie. Pour prouver la convergence de la série ci-dessus, il suffit donc d'établir qu'elle est absolument convergente, c'est-à-dire que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \left| \frac{A^k}{k!} \right| \right\| < \infty.$$

A partir de (1.4), une récurrence élémentaire permet de vérifier

$$\forall k \in \mathbb{N}, |||A^k||| \leq |||A|||^k$$

De ce fait,

$$\forall K \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^K \left\| \left| \frac{A^k}{k!} \right| \right\| \leq \sum_{k=0}^K \frac{|||A|||^k}{k!} \leq e^{|||A|||},$$

d'où la convergence de la série.

Remarque 1.4.2 (i) Dans le cas $n = 1$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on retrouve bien la définition de l'exponentielle d'un nombre réel.

(ii) L'exponentielle de la matrice nulle est l'identité.

Proposition 1.4.3 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\det e^A = e^{\text{tr } A}$. En particulier, e^A est toujours inversible.

Démonstration : Quitte à travailler dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on peut supposer que A est trigonalisable. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les racines du polynôme caractéristique χ_A de A comptées avec leur ordre de multiplicité. Alors d'après le théorème de réduction des matrices, A est semblable à une matrice triangulaire supérieure avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sur la diagonale. Un calcul aisé montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k est semblable à une matrice triangulaire supérieure avec $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$ (La norme $|||A||| \stackrel{\text{def}}{=} n \max_{i,j} |a_{ij}|$ vérifie cette propriété) sur la diagonale, puis que e^A est semblable à une matrice triangulaire supérieure avec $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$ sur la diagonale. Donc

$$\det e^A = \prod_{i=1}^n e^{\lambda_i} = \exp \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) = e^{\text{tr } A}.$$

Proposition 1.4.4 Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent. Alors

$$e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A.$$

Preuve : On renvoie à la section suivante.

Attention : Dans le cas général, il n'y a aucune raison pour que $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$.

1.4.2 Comment calculer une exponentielle de matrice

La plupart du temps, calculer une exponentielle de matrice repose sur l'observation suivante : si A et B sont semblables alors il existe P inversible telle que $A = P^{-1}BP$, et on montre facilement (exo : le faire) en revenant à la définition de l'exponentielle d'une matrice que

$$e^A = P e^B P^{-1}$$

En conséquence il est facile de calculer e^A une fois connue e^B . Cela est intéressant si le calcul de e^B est "simple". Il y a deux cas particulièrement sympathiques :

— Le cas où B est diagonale. En effet, il est clair que

$$B = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \implies e^B = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$$

— Le cas où B est nilpotente (c'est le cas par exemple si B est triangulaire supérieure ou inférieure avec des 0 sur la diagonale) car alors $B^k = 0$ pour $k \geq n$, et donc

$$e^B = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B^k}{k!}$$

On en déduit que le calcul de l'exponentielle de toute matrice semblable à l'un de ces deux types de matrices est aisé. Par exemple si A est diagonalisable et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sont ses valeurs propres comptées avec leur multiplicité, on aura simplement

$$e^A = P \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) P^{-1}$$

où P est la matrice constituée par les vecteurs propres correspondants écrits en colonne. Remarque : Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ mais pas dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut toujours considérer A comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour calculer l'exponentielle de A . Même si les calculs intermédiaires peuvent faire intervenir des nombres complexes, on sait que le résultat final e^A est une matrice à coefficients réels.

Exercice : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ avec $a > 0$.

(i) Montrer que A a pour spectre $\{ia, -ia\}$ puis que

$$e^A = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$$

(ii) Retrouver le résultat en calculant directement A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

En désespoir de cause, si la matrice A n'est ni nilpotente ni diagonalisable, elle est toujours

trigonalisable dans $\mathbb{C}$ et l'on peut recourir à la décomposition de Dunford pour calculer l'exponentielle : on sait qu'il existe D diagonalisable et N nilpotentes telles que

$$A = D + N \quad \text{avec} \quad DN = ND.$$

Comme D et N sont respectivement diagonalisables et nilpotentes, calculer leur exponentielle n'est pas trop compliqué et comme elles commutent, on aura in fine

$$e^A = e^{D+N} = e^D e^N = e^N e^D.$$

1.5 Le cas linéaire homogène à coefficients constants

1.5.1 Le cas des systèmes

On dit que (S) est un système différentiel linéaire à coefficients constants s'il est de la forme

$$X' = AX + B(t)$$

avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et B fonction continue à valeurs dans $\mathbb{K}^n$. On dit qu'il est homogène si $B = 0$.

Nous allons voir que la résolution de tels systèmes revient à calculer des exponentielles de matrice.

Proposition 1.5.1 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors l'application*

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ t \longmapsto e^{tA} \end{cases}$$

est de classe C^1 et vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi'(t) = Ae^{tA} = e^{tA}A.$$

Démonstration : D'après la proposition 1.4.1, la fonction ϕ est la somme de la série de fonctions de terme général $\phi_k(t) = t^k A^k / k!$. Chaque ϕ_k est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi'_0(t) = 0 \quad \text{et} \quad \phi'_k(t) = t^{k-1} \frac{A^k}{(k-1)!} \quad \text{si} \quad k \geq 1.$$

Fixons $T > 0$ et choisissons une norme $||| \cdot |||$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant (1.4). Alors on a

$$\forall t \in [-T, T], \forall k \in \mathbb{N}^*, |||\phi'_k(t)||| \leq |||A||| (T|||A|||)^{k-1} / (k-1)!$$

donc la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} \phi'_k$ est normalement convergente sur $[-T, T]$. Comme la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} \phi_k$ converge vers ϕ sur $[-T, T]$, on en déduit que ϕ est de classe C^1 sur $[-T, T]$, et que

$$\phi'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1} \frac{A^k}{(k-1)!} = A \sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1} \frac{A^{k-1}}{(k-1)!} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1} \frac{A^{k-1}}{(k-1)!} \right) A.$$

Le réel T étant arbitraire, on obtient bien $\phi' = A\phi = \phi A$. □

Théorème 1.5.2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $X_0 \in \mathbb{K}^n$. Alors le système différentiel homogène

$$X' = AX \quad (I)$$

admet une unique solution ϕ telle que $\phi(0) = X_0$. Cette solution est définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi(t) = e^{tA} X_0.$$

Démonstration : Soit ϕ définie par la formule ci-dessus. Il est clair que $\phi(0) = X_0$. Par ailleurs, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$, on peut écrire

$$\frac{\phi(t+h) - \phi(t)}{h} = \frac{e^{(t+h)A} X_0 - e^{tA} X_0}{h} = \left(\frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} \right) X_0$$

La proposition précédente permet d'affirmer que la fraction apparaissant dans le terme de droite tend vers Ae^{tA} quand h tend vers 0. En conséquence la fonction ϕ est dérivable en t , et sa dérivée vaut $A\phi(t)$.

On en déduit que ϕ est C^1 sur $\mathbb{R}$, et solution de (S') . Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure de plus que c'est l'unique solution de (S') prenant la valeur X_0 en 0. $\square$

Corollaire 1.5.3 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $(X_1, \dots, X_n)$ une base de $\mathbb{K}^n$ et

$$\phi_i : t \mapsto e^{tA} X_i$$

Alors la famille de fonctions $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ est une base de $\mathcal{E}'$.

Démonstration : C'est un cas particulier du théorème correspondant pour les EDO linéaires homogènes générales.

Le théorème ci-dessus va aussi nous permettre de démontrer la proposition 1.4.4.

Démonstration de la proposition 1.4.4 : Soit donc A et B deux matrices qui commutent et $X_0 \in \mathbb{K}^n$ arbitraire. Posons $\phi(t) = e^{At} e^{Bt} X_0$ et $\psi(t) = e^{(A+B)t} X_0$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, ψ est l'unique solution du système

$$\begin{cases} X' = (A+B)X \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad (\Sigma)$$

Par ailleurs,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi'(t) = Ae^{At} e^{Bt} X_0 + e^{At} Be^{Bt} X_0$$

Comme B commute avec A , on établit facilement que B commute également avec les puissances de tA puis avec e^{tA} . En conséquence, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi'(t) = (A+B)e^{At} e^{Bt} X_0 = (A+B)\phi(t)$$

Comme $\phi(0) = X_0$, on en déduit que ϕ est également solution de (Σ) . Par unicité, on a donc $\phi(t) = \psi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En prenant $t = 1$, on conclut que $e^{A+B} = e^A e^B$. Un raisonnement analogue permet de montrer que $e^{A+B} = e^B e^A$. $\square$

Proposition 1.5.4 (*Solutions de (S') dans le cas complexe*). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de spectre $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$. Notons α_i la multiplicité de la valeur propre λ_i . Alors les composantes des solutions de (S') sont combinaisons linéaires à coefficients complexes des fonctions

$$t \mapsto t^\beta e^{\lambda_i t} \quad \text{avec} \quad 1 \leq i \leq p \quad \text{et} \quad 0 \leq \beta \leq \alpha_i - 1$$

Démonstration : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de spectre $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ avec λ_i de multiplicité α_i . Dans le cours d'Algèbre II du professeur Justin Nyenyezi (la partie sur la réduction des endomorphismes), vous avez vu qu'il existait une matrice de changement de base P et une matrice diagonale par blocs T du type

$$\begin{pmatrix} T_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & T_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & T_p \end{pmatrix}$$

avec T_i matrice triangulaire supérieure de taille α_i avec des λ_i sur la diagonale, telles que $T = P^{-1}AP$.

Soit ϕ une solution de (S') . Posons $\psi = P^{-1}\phi$. Alors on a

$$\psi' = P^{-1}\phi' = P^{-1}A\phi = P^{-1}AP\psi = T\psi$$

Étant donné que T est diagonale par blocs, il en est de même de ses puissances et de e^{tT} . Mieux : en revenant à la définition de l'exponentielle, on constate que

$$e^{tT} = \begin{pmatrix} e^{tT_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{tT_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{tT_p} \end{pmatrix}$$

On sait que $T_i = \lambda_i I_{\alpha_i} + N_i$ avec N_i triangulaire supérieure de taille α_i ayant des 0 sur la diagonale. Donc N_i est nilpotente d'indice au plus α_i . Comme N_i et $\lambda_i I_{\alpha_i}$ commutent, on a de plus

$$e^{tT_i} = e^{t\lambda_i I_{\alpha_i}} e^{tN_i} = e^{t\lambda_i} e^{tN_i}$$

Enfin, comme N_i est nilpotente, on a

$$e^{tN_i} = \sum_{\beta=0}^{\alpha_i-1} t^\beta N_i^\beta / \beta!.$$

En conséquence, les coefficients de e^{tA} sont combinaisons linéaires des fonctions

$$t \mapsto t^\beta e^{\lambda_i t} \quad \text{avec} \quad 1 \leq i \leq p \quad \text{et} \quad 0 \leq \beta \leq \alpha_i - 1.$$

Il en est donc de même des composantes de ψ et de ϕ . □

Proposition 1.5.5 (*Solutions de (S') dans le cas réel*). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ les valeurs propres réelles de A et

$$\{\mu_1 + i\nu_1, \mu_1 - i\nu_1, \dots, \mu_q + i\nu_q, \mu_q - i\nu_q\}$$

ses valeurs propres complexes non réelles. Soit α_j la multiplicité de λ_j et β_k la multiplicité (commune) de $\mu_k + i\nu_k$ et $\mu_k - i\nu_k$. Alors les composantes des solutions réelles de (S') sont des combinaisons linéaires réelles des fonctions :

$-t \mapsto t^\alpha e^{\lambda_j t}$ avec $0 \leq \alpha \leq \alpha_j - 1$ et $1 \leq j \leq p$;

$-t \mapsto e^{\mu_k t} \cos(\nu_k t)$ et $t \mapsto e^{\mu_k t} \sin(\nu_k t)$ avec $0 \leq \beta \leq \beta_k - 1$ et $1 \leq k \leq q$.

Démonstration : Soit ϕ une solution réelle. D'après la proposition 1.5.4, il existe des vecteurs $b_{j,\alpha}$, $g_{k,\beta}$ et $h_{k,\beta}$ de $\mathbb{C}^n$ tels que

$$\phi(t) = \sum_{j=1}^p \sum_{\alpha=0}^{\alpha_j-1} b_{j,\alpha} t^\alpha e^{\lambda_j t} + \sum_{k=1}^q \sum_{\beta=0}^{\beta_k} t^\beta (g_{k,\beta} e^{(\mu_k + i\nu_k)t} + h_{k,\beta} e^{(\mu_k - i\nu_k)t})$$

Comme ϕ est réelle, on a $\phi = (\phi + \bar{\phi})/2$. Donc l'égalité ci-dessus entraîne que

$$\phi(t) = \sum_{j=1}^p \sum_{\alpha=0}^{\alpha_j-1} \left(\frac{b_{j,\alpha} + \overline{b_{j,\alpha}}}{2} \right) t^\alpha e^{\lambda_j t} + \sum_{k=1}^q \sum_{\beta=0}^{\beta_k} t^\beta e^{\mu_k t} \left[\left(\frac{g_{k,\beta} + \overline{h_{k,\beta}}}{2} \right) e^{i\nu_k t} + \left(\frac{h_{k,\beta} + \overline{g_{k,\beta}}}{2} \right) e^{-i\nu_k t} \right].$$

Il est clair que les coefficients $\frac{b_{j,\alpha} + \overline{b_{j,\alpha}}}{2}$ sont réels et que

$$\left(\frac{g_{k,\beta} + \overline{h_{k,\beta}}}{2} \right) e^{i\nu_k t} + \left(\frac{h_{k,\beta} + \overline{g_{k,\beta}}}{2} \right) e^{-i\nu_k t} = \underbrace{\mathcal{Re}(g_{k,\beta} + h_{k,\beta})}_{\in \mathbb{R}} \cos \nu_k t + \underbrace{\mathcal{Im}(h_{k,\beta} - g_{k,\beta})}_{\in \mathbb{R}} \sin \nu_k t$$

La proposition est donc démontrée. $\square$

Attention : On remarquera que l'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}^n$ dont les composantes sont combinaisons linéaires des fonctions intervenant dans l'une des deux propositions précédentes est un s.e.v. de dimension n^2 alors que l'ensemble des solutions de (S') est de dimension n . En conséquence, les fonctions du type ci-dessus ne sont pas toutes solutions. Pour déterminer lesquelles sont vraiment solutions on peut au choix :

- procéder par identification : on injecte dans l'EDO considérée l'expression générale décrite dans la proposition ci-dessus, et on regarde quelles relations algébriques doivent être satisfaites par les coefficients ;
- faire un changement d'inconnue : si $A = PBP^{-1}$ avec B matrice "plus simple que A " (par exemple diagonale si A est diagonalisable), on peut comme dans la démonstration ci-dessus poser $\phi = P\psi$, calculer ψ puis en déduire ϕ ;
- calculer e^{tA} .

Exemple : Par la méthode de l'exponentielle de la matrice, montrer que les solutions réelles du système différentiel

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

sont les fonctions de la forme

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} e^{3t}(a + bt) \\ -e^{3t}(a + b + bt) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

Quelle est l'unique solution valant $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en 0 ? **Solution** : On cherche la solution générale sous la forme :

$$X(t) = e^{At} X(0),$$

où $X(0) = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}$ est un vecteur initial. Comme vu précédemment, A a une seule valeur propre réelle $\lambda = 3$ de multiplicité 2. Il n'est pas diagonalisable. Sa forme de Jordan est :

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

et il existe une matrice inversible P telle que $A = PJP^{-1}$, avec :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On utilise :

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}, \quad \text{où} \quad e^{Jt} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$e^{At} = e^{3t} P \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Calculons :

$$\begin{aligned} P \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & t-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & t-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+(t-1)=t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc :

$$e^{At} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $X(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Alors :

$$X(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} a+bt \\ b \end{pmatrix}.$$

On a donc :

$$x_1(t) = e^{3t}(a+bt), \quad x_2(t) = e^{3t}b.$$

Mais cette forme ne correspond pas encore exactement à celle proposée. Reformulons la solution générale de manière équivalente en prenant des combinaisons linéaires des solutions fondamentales réelles. Une base réelle de solutions est :

$$\phi_1(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \phi_2(t) = e^{3t} \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = e^{3t} \begin{pmatrix} t \\ -1-t \end{pmatrix}.$$

Alors toute solution réelle est de la forme :

$$\phi(t) = a\phi_1(t) + b\phi_2(t) = e^{3t} \left[a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} t \\ -1-t \end{pmatrix} \right] = e^{3t} \begin{pmatrix} a+bt \\ -a-b-bt \end{pmatrix}.$$

On peut alors calculer les solutions particulières demandées.

1.5.2 Le cas scalaire d'ordre n

Intéressons-nous maintenant à la résolution des équations différentielles scalaires d'ordre n du type

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_0x = 0 \quad (E')$$

avec $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$.

La proposition suivante permet de ramener (E') à un système différentiel.

Proposition 1.5.6 *La fonction $\varphi \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}; \mathbb{K})$ est solution de (E) si et seulement si la fonction $\Phi \stackrel{\text{déf}}{=} (\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n-1)})$ est solution du système différentiel d'ordre n*

$$X' = AX \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

Démonstration : Soit φ une solution de (E) . Posons $\Phi \stackrel{\text{déf}}{=} (\phi, \phi', \dots, \phi^{(n-1)})$. On a bien

$$\begin{aligned} \forall j \in \{0, \dots, n-2\}, \Phi'_{j+1} &= (\varphi^{(j)})' = \varphi^{(j+1)} = \Phi_{j+2} \\ \Phi'_n &= (\varphi^{(n-1)})' = \varphi^{(n)} = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i \varphi^{(i)} = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i \Phi_{i+1} \end{aligned}$$

d'où le résultat. $\square$

Définition 1.5.7 *On appelle équation caractéristique associée à (E') l'équation*

$$r^n + c_{n-1}r^{n-1} + \cdots + c_0 = 0.$$

Sachant que la fonction $r \mapsto (-1)^n (r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_0)$ n'est autre que le polynôme caractéristique de la matrice définie en (1.5), les résultats du paragraphe précédent sur la résolution des systèmes linéaires homogènes à coefficients constants permettent d'en déduire le résultat important suivant (On remarquera que l'ensemble engendré par les fonctions $\phi_{i,\beta}$ définies ci-dessous est un s.e.v de dimension n . C'est donc une base de l'ensemble des solutions).

Proposition 1.5.8 *(Base de solutions de (E') : cas complexe). Soit $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ l'ensemble des racines complexes de l'équation caractéristique associée à (E') . Notons α_i la multiplicité de la racine λ_i . Alors la famille de fonctions*

$$\phi_{i,\beta} : t \mapsto t^\beta e^{\lambda_i t} \quad \text{avec} \quad i \in \{1, \dots, p\} \quad \text{et} \quad \beta \in \{0, \dots, \alpha_i - 1\},$$

est une base de l'ensemble $\mathcal{E}'$ des solutions complexes de (E') .

En suivant la même démarche que pour les systèmes, on en déduit :

Proposition 1.5.9 (*Base de solutions de (E') : cas réel*). Notons

$$\{\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1 + i\nu_1, \mu_1 - i\nu_1, \dots, \mu_q + i\nu_q, \mu_q - i\nu_q\} \quad \text{avec} \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \mu_i \in \mathbb{R}, \nu_i \in \mathbb{R}^*$$

l'ensemble des racines réelles et complexes de l'équation caractéristique associée à (E') . Soit α_j la multiplicité de la racine λ_j , et β_k la multiplicité commune des racines $\mu_k + i\nu_k$ et $\mu_k - i\nu_k$. Alors la famille de fonctions constituée de

$$t \mapsto t^{p_j} e^{\lambda_j t}, \quad t \mapsto t^{q_k} e^{\mu_k t} \cos(\nu_k t) \quad \text{et} \quad t \mapsto t^{q_k} e^{\mu_k t} \sin(\nu_k t)$$

avec $j \in \{1, \dots, p\}, k \in \{1, \dots, q\}, p_k \in \{0, \dots, \alpha_k - 1\}$ et $q_k \in \{0, \dots, \beta_k - 1\}$ est une base de l'ensemble $\mathcal{E}'$ des solutions réelles de (E') .

Exemple important : le cas scalaire d'ordre 2 à coefficients réels constants.

Soit $(b, c) \in \mathbb{R}^2$. On cherche les solutions réelles de

$$x'' + bx' + cx = 0 \tag{I}$$

Pour cela, on va appliquer la proposition ci-dessus.

L'équation caractéristique associée à (E') est $r^2 + br + c = 0$. C'est une équation du second degré de discriminant $\Delta \stackrel{\text{déf}}{=} b^2 - 4c$. Notons $\delta \stackrel{\text{déf}}{=} \sqrt{|\Delta|}$.

Cas $\Delta > 0$: L'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes

$$\lambda_1 = \frac{-b - \delta}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{-b + \delta}{2}$$

et la solution générale de (E') s'écrit $\varphi(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Cas $\Delta = 0$: L'équation caractéristique a pour racine double $\lambda = -b/2$ et la solution générale de (E') s'écrit $\varphi(t) = (A + Bt)e^{\lambda t}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Cas $\Delta < 0$: L'équation caractéristique a deux racines complexes conjuguées distinctes

$$\lambda_- = \frac{-b - i\delta}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_+ = \frac{-b + i\delta}{2}$$

et la solution générale s'écrit $\varphi(t) = e^{-\frac{b}{2}t} (A \cos(\frac{\delta}{2}t) + B \sin(\frac{\delta}{2}t))$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Exemple 1.

$x'' - 5x' + 6x = 0$. Son équation caractéristique :

$$r^2 - 5r + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 2, 3.$$

Les racines sont réelles et distinctes. Solution générale :

$$x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}.$$

Exemple 1. $x'' - 4x' + 4x = 0$. Équation caractéristique :

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 2 \text{ (double)}.$$

Solution générale :

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{2t}.$$

Exemple 3. $x'' + 2x' + 5x = 0$. Équation caractéristique :

$$r^2 + 2r + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = -1 \pm 2i.$$

Solution générale :

$$x(t) = e^{-t} (C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)).$$

1.6 La méthode de variation des constantes

Intéressons-nous maintenant à la résolution des systèmes différentiels linéaires généraux

$$X' = A(t)X + B(t) \quad (S)$$

avec A et B fonctions continues sur un intervalle I .

On a vu que la solution générale d'un tel système est somme d'une solution particulière et de la solution générale du système homogène (S') associé. Dans cette section, on explique comment générer des solutions particulières à partir d'une base de solutions du système homogène. Il s'agit de la méthode de variation des constantes.

1.6.1 Le cas des systèmes

La méthode de variation des constantes repose sur le lemme suivant.

Lemme 1.6.1 *Soit $\phi_1, \dots, \phi_n$ des fonctions de $\mathcal{C}^1(I; \mathbb{K}^n)$ telles que, pour tout $t \in I$, la famille $(\phi_1(t), \dots, \phi_n(t))$ soit libre. Soit $f \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{K}^n)$. Alors il existe un unique n -uplet de fonctions $(u_1, \dots, u_n)$ de $\mathcal{C}^1(I; \mathbb{K})$ tel que*

$$\forall t \in I, f(t) = \sum_{i=1}^n u_i(t) \phi_i(t).$$

Démonstration : Pour tout $t \in I$, la famille $(\phi_1(t), \dots, \phi_n(t))$ est une base de $\mathbb{K}^n$. Donc il existe un unique n -uplet $(u_1(t), \dots, u_n(t))$ d'éléments de $\mathbb{K}$ tel que

$$f(t) = \sum_{i=1}^n u_i(t) \phi_i(t)$$

Notons $M(t)$ la matrice de colonnes $(\phi_1(t), \dots, \phi_n(t))$. Les fonctions ϕ_i sont de classe $\mathcal{C}^1$ donc l'application $\Delta = \det M$ (qui est un polynôme par rapport aux coefficients des ϕ_i) est aussi $\mathcal{C}^1$. Par hypothèse, cette application ne s'annule pas sur I . En utilisant la formule

$$[M(t)]^{-1} = {}^t \text{Com}(M(t)) / \Delta(t),$$

on conclut que $t \mapsto [M(t)]^{-1}$ est $\mathcal{C}^1$ sur I . Comme

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix} = [M(t)]^{-1} \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

les fonctions u_i sont bien de classe $\mathcal{C}^1$. □

Théorème 1.6.2 *Soit $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ une base de solutions de (S') et $f \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{K}^n)$. Notons $(u_1, \dots, u_n)$ la famille de fonctions de $\mathcal{C}^1(I; \mathbb{K})$ telle que $f = \sum_{j=1}^n u_j \phi_j$. Alors f est solution de (S) si et seulement si*

$$\forall t \in I, \sum_{j=1}^n u'_j(t) \phi_j(t) = B(t).$$

Démonstration : Soit donc $f \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{K}^n)$ et $(u_1, \dots, u_n)$ la famille de fonctions telle que $f = \sum_{j=1}^n u_j \phi_j$ donnée par le lemme précédent. Alors f est solution de (S) si et seulement si

$$\left(\sum_{j=1}^n u_j \phi_j \right)' = A \left(\sum_{j=1}^n u_j \phi_j \right) + B$$

En utilisant la formule de Leibniz, on voit que l'égalité ci-dessus se réécrit

$$\sum_{j=1}^n u_j' \phi_j + \sum_{j=1}^n u_j \phi_j' = \sum_{j=1}^n u_j (A \phi_j) + B$$

Or par hypothèse $\phi_j' = A \phi_j$ donc f est solution de (S) si et seulement si

$$\sum_{j=1}^n u_j' \phi_j = B. \quad \square$$

Remarque 1.6.3 La connaissance d'une base de solutions de (S') permet donc de résoudre (S) pourvu que l'on sache intégrer les u_j' . On dit que la méthode de variation des constantes permet de résoudre les systèmes linéaires à quadrature près.

1.6.2 Le cas scalaire d'ordre n

Il s'agit d'équations différentielles du type

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_0(t)x = b(t) \quad (E)$$

avec $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ et b fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Nous allons voir que, comme dans le cas des systèmes, la connaissance d'une base de solutions $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ de l'équation différentielle homogène (E') associée à (E) permet de résoudre (E) à quadrature près, et ce, à l'aide de la méthode de variation des constantes. Rappelons que l'on peut transformer (E) en un système différentiel de taille n en posant

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

et que, par conséquent, la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ de solutions de (E') est une base de solutions si et seulement si la matrice

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \dots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

est inversible pour tout $t \in I$.

En conséquence, dans ce nouveau cadre, le lemme 1.6.1 assure que si $f \in \mathcal{C}^n(I; \mathbb{K})$ alors il existe n fonctions u_i de $\mathcal{C}^1(I; \mathbb{K})$ telles que

$$\left\{ \begin{array}{lclclcl} f & = & u_1 \varphi_1 & + & u_2 \varphi_2 & + & \cdots \\ f' & = & u_1 \varphi_1' & + & u_2 \varphi_2' & + & u_n \varphi_n \\ & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ f^{(n-1)} & = & u_1 \varphi_1^{(n-1)} & + & u_2 \varphi_2^{(n-1)} & + & \cdots + u_n \varphi_n' \\ f^{(n-1)} & + & u_n \varphi_n^{(n-1)} & & & & \end{array} \right.$$

et on en déduit alors la proposition suivante :

Théorème 1.6.4 Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une base de solutions de (E') et $f \in \mathcal{C}^n(I; \mathbb{K})$. Alors f est solution de (E) si et seulement si il existe une famille $(u_1, \dots, u_n)$ de n fonctions de $\mathcal{C}^1(I; \mathbb{K})$ telles que $f = \sum_{j=1}^n u_j \varphi_j$ et vérifiant pour tout $t \in I$ le système linéaire suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n u'_j(t) \varphi_j(t) = 0 \\ \sum_{j=1}^n u'_j(t) \varphi'_j(t) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^n u'_i(t) \varphi_i^{(n-1)}(t) = b(t) \end{array} \right.$$

Attention : Dans le cas d'un système scalaire d'ordre n , la méthode de variation des constantes met en jeu la fonction inconnue et ses $(n - 1)$ premières dérivées. On notera que chercher f sous la forme $f = \sum_{j=1}^n u_j f_j$ ne fournit qu'une seule équation pour n inconnues, et ne permet donc pas de déterminer $u_1, \dots, u_n$.

Exemples : Application aux EDO du second ordre de manière générale puis aux cas particuliers suivants :

1. $y'' - 7y' + 6y = (x - 2) \exp(x)$.
2. $y'' + 2y' + y = \exp(-t)$.
3. $y'' - 2y' + y = t^{-1} \exp(-t)$.
4. $y'' + y = \tan(t)$.

1.6.3 Application au cas des coefficients constants

Dans le cas particulier où le système différentiel considéré est à coefficients constants, on dispose d'une formule explicite donnant toutes les solutions :

Théorème 1.6.5 Soit $t_0 \in I$, $X_0 \in \mathbb{K}^n$ et $B \in \mathcal{C}(I; \mathbb{K}^n)$. Alors le système différentiel

$$X' = AX + B(t) \quad (\text{S})$$

admet une unique solution ϕ valant X_0 en t_0 , donnée par la formule de Duhamel :

$$\forall t \in I, \phi(t) = e^{(t-t_0)A} X_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} B(s) ds \quad (1.6)$$

Démonstration : D'après le théorème 1.3.1, le système (S) admet une unique solution définie sur I entier. Pour déterminer cette solution ϕ , on utilise la méthode de variation des constantes. Sachant que les solutions de (S') sont du type $t \mapsto e^{tA}Y_0$ avec $Y_0 \in \mathbb{K}^n$, on écrit

$$\phi(t) = e^{tA}Y(t)$$

Comme l'application $t \mapsto e^{tA}$ ainsi que son inverse $t \mapsto e^{-tA}$ sont de classe C^1 , Y et ϕ sont simultanément de classe C^1 . De plus

$$\phi'(t) - A\phi(t) = Ae^{tA}Y(t) + e^{tA}Y'(t) - Ae^{tA}Y(t) = e^{tA}Y'(t),$$

donc ϕ est solution de S si et seulement si

$$\forall t \in I, Y'(t) = e^{-tA}B(t)$$

donc si et seulement si il existe $Y_0 \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$\forall t \in I, Y(t) = Y_0 + \int_{t_0}^t e^{-sA}B(s)ds.$$

Comme de plus $Y_0 = Y(t_0) = e^{-t_0A}\phi(t_0) = e^{-t_0A}X_0$, on en déduit la formule (1.6). $\square$

A titre d'exemple, donnons une méthode de résolution des systèmes différentiels dont le second membre est une "exponentielle-polynôme".

Proposition 1.6.6 *Considérons un système différentiel*

$$X' = AX + R(t)e^{\rho t} \tag{S}$$

tel que les composantes $(R_1, \dots, R_n)$ de R soient des polynômes de degré au plus d .

Alors (S) admet une solution du type $\phi(t) = P(t)e^{\rho t}$ où les composantes de P sont des polynômes de degré

- au plus d si ρ n'est pas valeur propre de A ,
- au plus $d + \alpha$ si ρ est valeur propre de multiplicité α de A .

Démonstration : D'après la proposition 1.5.4, les composantes des solutions du système homogène associé à (S) sont des combinaisons linéaires des fonctions $t \mapsto t^\beta e^{\lambda_i t}$ avec λ_i valeur propre de A de multiplicité α_i , et $\beta \leq \alpha_i - 1$.

Comme les colonnes de e^{tA} sont elles-mêmes des solutions de (S'), les coefficients de e^{tA} sont aussi des sommes de fonctions $t \mapsto t^\beta e^{\lambda_i t}$ avec $\beta \leq \alpha_i - 1$. La formule (1.6) avec $t_0 = 0$ et $X_0 = 0$ nous assure que $t \mapsto \int_0^t e^{(t-s)A}R(s)e^{\rho s}ds$ est une solution particulière de (S).

Les coefficients de $e^{(t-s)A}R(s)$ sont des combinaisons linéaires d'expressions du type $(t-s)^\beta e^{\lambda_i(t-s)}e^{\rho s}s^k$ avec $k \leq d$. En développant, on trouve une somme de termes du type

$$t^\gamma s^{k+\beta-\gamma} e^{\lambda_i t} e^{(\rho-\lambda_i)s} \quad \text{avec} \quad \gamma \leq \beta$$

Intégrer cette expression sur $[0, t]$ donne des termes du type

$$t^{k+\beta+1} e^{\rho t}$$

avec $k \leq d, \beta \leq \alpha_i - 1$, ce qui achève la preuve du résultat. $\square$

Remarque 1.6.7 *Pour déterminer les coefficients du polynôme P , on procède par identification.*

Pour les équations différentielles d'ordre n , on a :

Proposition 1.6.8 *Considérons une équation différentielle du type suivant :*

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_0x = R(t)e^{\rho t} \quad (E)$$

avec R polynôme de degré d .

Alors (E) admet une solution du type $\varphi(t) = P(t)e^{\rho t}$ où P est un polynôme de degré

- au plus d si ρ n'est pas racine de l'équation caractéristique associée à (E),
- au plus $d + \alpha$ si ρ est racine de multiplicité α de l'équation caractéristique.

Remarque importante : Bien que l'on dispose d'une formule explicite donnant la solution générale des systèmes différentiels (ou des équations différentiels scalaires d'ordre n) à coefficients constants, il est souvent plus rapide d'utiliser la méthode de variation de la constante donnée par le théorème 1.6.2 pour déterminer une solution particulière. En effet, calculer une exponentielle de matrice est, en général, très fastidieux.

Exemples : 1) Appliquer la variation des constantes pour intégrer les EDO suivantes :

1) $y' + y = \frac{1}{1+2e^x}$, 2) $y' + 2y = x^2 - 3x$.

1.6.4 Le cas particulier important des EDO du second ordre

Considérons l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants :

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

où p et q sont des constantes réelles, et $f(x)$ est une fonction continue définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. La résolution générale de cette équation comprend deux étapes :

- (1) Résolution de l'équation homogène associée :

$$y'' + py' + qy = 0$$

- (2) Recherche d'une solution particulière y_p de l'équation complète :

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

La solution générale de l'équation complète est alors :

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

où $y_h(x)$ est la solution générale de l'équation homogène.

2. Recherche d'une solution particulière selon la forme de $f(x)$

On utilise généralement la méthode de l'“essai judicieux” (ou méthode de l'“essai par forme approchée”), ou la méthode de la variation des constantes. Voici les cas les plus classiques de $f(x)$ avec des exemples.

Cas 1 : $f(x) = P_n(x)$, polynôme de degré n

Méthode : on cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré n , ou $n + 1$ si $P_n(x)$ est une solution de l'homogène.

Exemple :

$$y'' - 3y' + 2y = x$$

Équation homogène : racines $r = 1, 2$ donc $y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

Comme $f(x) = x$, on cherche $y_p = Ax + B$. En injectant dans l'équation, on détermine A et B .

Cas 2 : $f(x) = e^{\lambda x}$

Méthode : on cherche $y_p = A e^{\lambda x}$, sauf si λ est racine de l'équation caractéristique. Si λ est racine simple, on prend $y_p = A x e^{\lambda x}$, si c'est une racine double, $y_p = A x^2 e^{\lambda x}$.

Exemple :

$$y'' + y = e^x$$

Équation homogène : $r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \pm i$, donc $y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Essai : $y_p = A e^x$. Calcul de y_p'', y_p' puis substitution pour trouver A .

Cas 3 : $f(x) = \cos(\omega x)$ ou $\sin(\omega x)$

Méthode : on cherche $y_p = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$, sauf si ω est tel que les fonctions $\cos(\omega x), \sin(\omega x)$ apparaissent dans y_h . Dans ce cas, on multiplie l'essai par x ou x^2 selon la multiplicité.

Exemple :

$$y'' + 4y = \cos(2x)$$

Équation homogène : $r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r = \pm 2i$, donc $y_h = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$.

Comme $f(x)$ est déjà solution homogène, on essaye $y_p = x(A \cos(2x) + B \sin(2x))$.

Cas 4 : $f(x) = e^{\lambda x} P_n(x)$

Méthode : combinaison des cas 1 et 2. On tente $y_p = e^{\lambda x} Q(x)$ où Q est un polynôme de même degré que $P_n(x)$. Si $e^{\lambda x}$ est solution de l'homogène, on multiplie par x ou x^2 selon la multiplicité.

Exemple :

$$y'' - 2y' + y = x e^x$$

Équation homogène : $(r - 1)^2 = 0$ donc $y_h = (C_1 + C_2 x) e^x$

Comme e^x est racine double, on essaye $y_p = x^2(Ax + B)e^x$.

Cas 5 : $f(x) = e^{\lambda x} \cos(\omega x)$ ou $e^{\lambda x} \sin(\omega x)$

Méthode : on tente $y_p = e^{\lambda x}(A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x))$. Si $\lambda \pm i\omega$ est racine de l'équation caractéristique, on multiplie par x ou x^2 .

Exemple :

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \cos x$$

Équation caractéristique : $r^2 + 2r + 2 = 0 \Rightarrow r = -1 \pm i$, donc $\lambda = -1, \omega = 1$ est racine de l'équation. Essai : $y_p = x(A \cos x + B \sin x) e^{-x}$

1.7 Comportement asymptotique des solutions

Soit A une matrice carrée de taille n à coefficients réels ou complexes. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres (complexes) deux à deux distinctes de A et α_i leur multiplicité. On rappelle que

- le sous-espace propre E_{λ_i} associé à λ_i est l'ensemble de valeurs propres de A pour λ_i c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs colonnes $X \in \mathbb{C}^n$ tels que $AX = \lambda_i X$,
- le sous-espace caractéristique associé à λ_i est $E'_{\lambda_i} = \text{Ker}(A - \lambda_i \text{Id})^{\alpha_i}$.

Il est clair que l'on a toujours $E_{\lambda_i} \subset E'_{\lambda_i}$. On rappelle que

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^p E'_{\lambda_i}$$

et que la matrice A est diagonalisable si et seulement si

$$E_{\lambda_i} = E'_{\lambda_i} \quad \text{pour tout } i \in \{1, \dots, p\}.$$

Définition 1.7.1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On appelle

- sous-espace stable l'ensemble $E_{\mathbb{C}}^s \stackrel{\text{déf}}{=} \bigoplus_{\text{Re} \lambda_i < 0} E'_{\lambda_i}$,
- sous-espace instable l'ensemble $E_{\mathbb{C}}^i \stackrel{\text{déf}}{=} \bigoplus_{\text{Re} \lambda_i > 0} E'_{\lambda_i}$,
- sous-espace neutre l'ensemble $E_{\mathbb{C}}^n \stackrel{\text{déf}}{=} \bigoplus_{\text{Re} \lambda_i = 0} E'_{\lambda_i}$.

Remarque 1.7.2 Dans le cas d'une matrice réelle, les valeurs propres non réelles sont conjuguées deux à deux. De ce fait, les ensembles

$$E_{\mathbb{R}}^s \stackrel{\text{déf}}{=} E_{\mathbb{C}}^s \cap \mathbb{R}^n, \quad E_{\mathbb{R}}^i \stackrel{\text{déf}}{=} E_{\mathbb{C}}^i \cap \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad E_{\mathbb{R}}^n \stackrel{\text{déf}}{=} E_{\mathbb{C}}^n \cap \mathbb{R}^n$$

vérifient (exo : pourquoi ?)

$$\mathbb{R}^n = E_{\mathbb{R}}^s \oplus E_{\mathbb{R}}^i \oplus E_{\mathbb{R}}^n.$$

Proposition 1.7.3 Tous les espaces définis ci-dessus sont stables par l'action de e^{tA} et ce pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Démonstration : Les sous-espaces caractéristiques étant stables par A , il en est de même des espaces définis ci-dessus. En conséquence, la même propriété persiste pour les puissances de A puis pour e^{tA} (raisonner sur les sommes partielles puis passer à la limite en utilisant le fait que les s.e.v. de dimension finie sont toujours fermés).

Théorème 1.7.4 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

- $E_{\mathbb{K}}^s$ est l'ensemble des vecteurs colonnes X de $\mathbb{K}^n$ tels que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{tA} X = 0.$$

- $E_{\mathbb{K}}^i$ est l'ensemble des vecteurs colonnes X de $\mathbb{K}^n$ tels que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-tA} X = 0.$$

- $E_{\mathbb{K}}^s$ est l'ensemble des vecteurs colonnes X de $\mathbb{K}^n$ tels que e^{tA} ait un comportement polynômial à l'infini : il existe $C > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \|e^{tA}X\| \leq C(1 + |t|)^N. \quad (1.7)$$

Preuve : Considérons le cas des solutions complexes pour simplifier la présentation. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ les valeurs propres (deux à deux distinctes) à partie réelle strictement négative. Soit Π_s le projecteur sur $E_{\mathbb{C}}^s$ parallèlement à $E_{\mathbb{C}}^n \oplus E_{\mathbb{C}}^i$ et $\tilde{\Pi}_s$ le projecteur conjugué défini par $\tilde{\Pi}_s \stackrel{\text{def}}{=} \text{Id} - \Pi_s$. On identifie ces projecteurs à leur matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Soit X un vecteur colonne de $\mathbb{C}^n$ et Φ la solution de (S) avec donnée initiale X . En utilisant le fait que $X = \Pi_s X + \tilde{\Pi}_s X$, et la propriété d'unicité pour le problème de Cauchy, on voit que

$$\Phi = \Phi_s + \tilde{\Phi}_s$$

où Φ_s et $\tilde{\Phi}_s$ sont les solutions de (S) avec donnée $\Pi_s X$ et $\tilde{\Pi}_s X$, respectivement. La proposition précédente permet d'affirmer de plus que $\Pi_s \Phi_s = \Phi_s$ et $\tilde{\Pi}_s \tilde{\Phi}_s = \tilde{\Phi}_s$. Donc, on peut écrire

$$\Phi'_s = A\Pi_s \Phi_s \quad \text{et} \quad \tilde{\Phi}'_s = A\tilde{\Pi}_s \tilde{\Phi}_s$$

Il est clair que $\text{Ker } A\Pi_s = E_{\mathbb{C}}^n \oplus E_{\mathbb{C}}^i$ et que l'endomorphisme induit par $A\Pi_s$ sur $E_{\mathbb{C}}^s$ a pour valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ avec multiplicités $\alpha_1, \dots, \alpha_q$. En conséquence, les composantes de Φ_s sont combinaisons linéaires des fonctions $t \mapsto t^\alpha e^{\lambda_i t}$ avec $0 \leq \alpha \leq \alpha_i - 1$ et $1 \leq i \leq q$. En particulier, il est clair que pour tout $\lambda < \min \{|\text{Re} \lambda_i| / 1 \leq i \leq q\}$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, |\Phi_s(t)| \leq C e^{-\lambda t}.$$

Un raisonnement analogue montre que les composantes de $\tilde{\Phi}_s$ sont combinaisons linéaires des fonctions $t \mapsto t^\alpha e^{\lambda_i t}$ avec $0 \leq \alpha \leq \alpha_i - 1$ et $q+1 \leq i \leq p$. Comme $\text{Re} \lambda_i \geq 0$ pour $i \geq q+1$, on en conclut que si $\tilde{\Phi}_s$ n'est pas nulle (ce qui est équivalent à $\tilde{\Pi}_s X \neq 0$) alors $\tilde{\Phi}_s$ ne tend pas vers 0 en $+\infty$.

Sachant que $\Phi = \Phi_s + \tilde{\Phi}_s$, on peut maintenant conclure que Φ tend vers 0 en $+\infty$ si et seulement si $\tilde{\Phi}_s$ est nulle, c'est-à-dire si et seulement si $\tilde{\Pi}_s X = 0$. La première propriété en découle car $\text{Ker } \tilde{\Pi}_s = E_{\mathbb{C}}^s$.

La preuve des deux autres propriétés est analogue. □

Remarque 1.7.5 En fait la démonstration donne un résultat plus précis :

- si $X \in E_{\mathbb{K}}^s$ alors pour tout $\lambda < \min \{|\text{Re} \lambda_i| / \text{Re} \lambda_i < 0\}$ il existe $C > 0$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \|e^{tA}X\| \leq C e^{-\lambda t}$$

- si $X \in E_{\mathbb{K}}^i$ alors pour tout $\lambda < \min \{\text{Re} \lambda_i / \text{Re} \lambda_i > 0\}$ il existe $C > 0$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \|e^{-tA}X\| \leq C e^{-\lambda t};$$

- si $X \in E_{\mathbb{K}}^n$, on peut prendre pour N dans (1.7) la plus grande multiplicité des valeurs propres imaginaires pures.

Le théorème précédent et les résultats des sections précédentes permettent d'affirmer que les solutions de (S) peuvent avoir trois types de comportement suivant la valeur de A et la donnée initiale :

- un comportement de type exponentielle en $\pm\infty$;
- un comportement de type polynômial en $\pm\infty$;
- un comportement périodique (si la matrice est diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont imaginaires pures).

Cela conduit à la définition suivante :

Définition 1.7.6 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Nous dirons que la matrice A est

- *hyperbolique* si elle ne possède pas de valeur propre imaginaire pure ;
- *parabolique* si toutes les valeurs propres sont imaginaires pures et A n'est pas diagonalisable ;
- *elliptique* si toutes les valeurs propres sont imaginaires pures et A est diagonalisable.

Proposition 1.7.7 L'ensemble des matrices hyperboliques est ouvert : si A est hyperbolique alors il existe $\delta > 0$ tel que pour toute matrice B telle que $\|B\| \leq \delta$, la matrice $A+B$ est encore hyperbolique.

Démonstration : Supposons pour simplifier que toutes les valeurs propres complexes de A sont simples. Alors χ_A a n racines simples et le théorème des fonctions implicites permet de montrer que dans cette situation, les racines dépendent continûment des coefficients du polynôme. Comme par ailleurs la valeur des coefficients de χ_A dépend continûment des coefficients de A , on en déduit que les valeurs propres de $A+B$ dépendent continûment des coefficients de $A+B$ si B est dans un voisinage de 0. En particulier, si A est hyperbolique alors il existe $\eta > 0$ tel que pour toute valeur propre λ de A on ait $|\operatorname{Re} \lambda| \geq \eta$. La propriété de continuité montre que pour B assez petite, les valeurs propres de $A+B$ seront toutes de partie réelle supérieure à $\eta/2$ ou inférieure à $-\eta/2$, donc non nulles. $\square$

Terminons cette section par une étude détaillée du cas où A est une matrice 2×2 à coefficients réels. Nous nous limitons à l'étude du comportement asymptotique des solutions réelles.

Les valeurs propres λ_1 et λ_2 (comptées avec leur multiplicité) sont les solutions du polynôme caractéristique de A , à savoir $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr} A \lambda + \det A$. Comme la matrice A est réelle, les racines de A sont ou bien réelles ou bien complexes conjuguées.

Premier cas : λ_1 et λ_2 : sont réelles et distinctes : Dans ce cas la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Plus précisément, il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

et l'on a donc

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} \end{pmatrix} P^{-1}$$

- Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, alors toutes les solutions tendent vers 0 en $+\infty$ à la vitesse (au moins) $e^{t\lambda_2}$. On parle de nœud attractif.

- Si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, alors toutes les solutions tendent vers 0 en $-\infty$ à la vitesse (au moins) $e^{t\lambda_1}$. On parle de nœud répulsif.
- Si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, alors toutes les solutions tendent vers l'infini en $\pm\infty$, sauf celles qui sont colinéaires à un vecteur propre de A . On parle de point selle.
- L'une des deux valeurs propres est nulle. Alors les solutions de (S) sont bornées sur $\mathbb{R}^+$ ou sur $\mathbb{R}^-$ suivant le signe de la valeur propre non nulle.
Notons que les trois premiers cas décrits ci-dessus, la partie réelle des valeurs propres est non nulle et donc la matrice est hyperbolique.

Deuxième cas : λ_1 et λ_2 sont réelles et confondues

On note λ la valeur commune des valeurs propres. Il y a alors deux cas de figure.

- Premier sous-cas : la matrice est diagonalisable.

Si $A = \lambda I_2$ on a nécessairement

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda} \end{pmatrix}$$

et le comportement des solutions de (S) en $\pm\infty$ est donc évident. Si $\lambda < 0$, on parle de puits et si $\lambda > 0$, de source.

- Deuxième sous-cas : la matrice n'est pas diagonalisable.

Alors A est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, et donc il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que

$$e^{tA} = e^{t\lambda} P \begin{pmatrix} 1 & at \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Si $\lambda > 0$ (resp. $\lambda < 0$), on parle de nœud impropre répulsif (resp. nœud impropre attractif). Dans le cas particulier où $\lambda = 0$, on parle de matrice parabolique (si $\lambda \neq 0$ elle est bien sûr hyperbolique).

Troisième cas : λ_1 et λ_2 sont complexes conjuguées et non réelles.

Il existe donc $\theta \neq 0$ et $\rho \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 = \rho - i\theta \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \rho + i\theta$$

Ces deux valeurs propres étant distinctes, la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Plus précisément il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$P^{-1}AP = \Delta \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} \rho - i\theta & 0 \\ 0 & \rho + i\theta \end{pmatrix}.$$

Remarquons que la matrice

$$B \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} \rho & -\theta \\ \theta & \rho \end{pmatrix}$$

est également semblable à Δ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (pourquoi ?)

En conséquence A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et donc aussi dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (pourquoi ?) : il existe $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = R^{-1}AR$. Le calcul de e^{tB} est aisé car

$$B = \rho I_2 + \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$e^{tA} = e^{t\rho} R \begin{pmatrix} \cos(t\theta) & -\sin(t\theta) \\ \sin(t\theta) & \cos(t\theta) \end{pmatrix} R^{-1}.$$

On retrouve que le comportement asymptotique des solutions de (S) est dicté par la partie réelle des valeurs propres (ici c'est ρ). Plus précisément, les solutions tendent vers 0 en $+\infty$ (resp. $-\infty$) à la vitesse $e^{t\rho}$ si et seulement si $\rho < 0$ (resp. $\rho > 0$). Si $\rho < 0$ (resp. $\rho > 0$), on parle de foyer attractif (resp. foyer répulsif).

Dans le cas limite $\rho = 0$, on constate que les solutions sont périodiques de période $2\pi/\theta$. On dit que le système (S) ou la matrice A est elliptique et que le point $(0, 0)$ est un centre.

1.8 Exercices

Exercice 1. Trouver la solution générale de l'équation différentielle :

$$y^{(4)} - 4y'' + 4y = e^{2x} + x^2.$$

Exercice 2. Soit le système d'équations différentielles linéaires suivant :

$$\begin{cases} x' = 3x + 4y \\ y' = -4x + 3y \end{cases}$$

Trouver la solution générale du système.

Exercice 3. Résoudre l'équation différentielle suivante en utilisant la méthode de variation des constantes :

$$y'' + y = \tan(x), \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Solution.

Étape 1 : Résolution de l'équation homogène associée

Considérons l'équation homogène :

$$y'' + y = 0.$$

L'équation caractéristique est :

$$r^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \pm i.$$

La solution générale de l'équation homogène est donc :

$$y_h(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x).$$

Étape 2 : Méthode de variation des constantes

On cherche une solution particulière sous la forme :

$$y_p(x) = u_1(x) \cos(x) + u_2(x) \sin(x),$$

où u_1 et u_2 sont des fonctions à déterminer.

On impose :

$$\begin{cases} u_1'(x) \cos(x) + u_2'(x) \sin(x) = 0, \\ -u_1'(x) \sin(x) + u_2'(x) \cos(x) = \tan(x). \end{cases}$$

Ce système peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1'(x) \\ u_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tan(x) \end{pmatrix}.$$

On résout ce système :

Le déterminant de la matrice est :

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

En inversant la matrice, on obtient :

$$\begin{pmatrix} u_1'(x) \\ u_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \tan(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(x) \tan(x) \\ \cos(x) \tan(x) \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$u_1'(x) = -\sin(x) \tan(x), \quad u_2'(x) = \cos(x) \tan(x).$$

On intègre :

$$u_1(x) = - \int \sin(x) \tan(x) dx = - \int \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)} dx,$$

$$u_2(x) = \int \cos(x) \tan(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{1} dx = -\cos(x) + C.$$

Pour $u_1(x)$, on utilise $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$:

$$u_1(x) = - \int \frac{1 - \cos^2(x)}{\cos(x)} dx = - \int \left(\frac{1}{\cos(x)} - \cos(x) \right) dx.$$

Donc :

$$u_1(x) = - \int \sec(x) dx + \int \cos(x) dx = -\ln |\sec(x) + \tan(x)| + \sin(x) + C.$$

Solution particulière :

$$\begin{aligned} y_p(x) &= u_1(x) \cos(x) + u_2(x) \sin(x) \\ &= (-\ln |\sec(x) + \tan(x)| + \sin(x)) \cos(x) + (-\cos(x)) \sin(x) \\ &= -\cos(x) \ln |\sec(x) + \tan(x)| + \sin(x) \cos(x) - \sin(x) \cos(x) \\ &= -\cos(x) \ln |\sec(x) + \tan(x)|. \end{aligned}$$

Solution générale :

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) - \cos(x) \ln |\sec(x) + \tan(x)|.$$

Exercice 4. Trouver la solution générale de l'équation :

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = \sin(x).$$

Solution

1. Équation homogène associée :

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$$

On résout l'équation caractéristique :

$$r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$$

Par la méthode de Ruffini ou d'essai, on trouve que $r = 1$ est une racine :

$$(r - 1)(r^2 - 5r + 6) = (r - 1)(r - 2)(r - 3)$$

Les solutions générales de l'équation homogène sont donc :

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$$

2. Méthode de variation des constantes :

On cherche une solution particulière sous la forme :

$$y_p(x) = u_1(x)e^x + u_2(x)e^{2x} + u_3(x)e^{3x}$$

On impose les conditions auxiliaires suivantes pour simplifier les calculs :

$$\begin{cases} u_1'(x)e^x + u_2'(x)e^{2x} + u_3'(x)e^{3x} = 0 \\ u_1'(x)e^x + 2u_2'(x)e^{2x} + 3u_3'(x)e^{3x} = 0 \\ u_1'(x)e^x + 4u_2'(x)e^{2x} + 9u_3'(x)e^{3x} = \sin(x) \end{cases}$$

On écrit ce système sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1'(x) \\ u_2'(x) \\ u_3'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin(x) \end{bmatrix}$$

On résout ce système linéaire pour obtenir $u_1'(x), u_2'(x), u_3'(x)$, puis on intègre pour obtenir $u_1(x), u_2(x), u_3(x)$. Cela peut se faire par la méthode de Cramer ou par réduction du système (calculs omis ici pour compacité). On obtient finalement une solution particulière $y_p(x)$.

3. Solution générale :

La solution générale de l'équation complète est donnée par :

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x} + y_p(x).$$

Exercice 5. Trouver une solution particulière de l'équation :

$$y'' - y = xe^x \cos(x).$$

Solution.

Considérons l'équation homogène :

$$y'' - y = 0$$

Son équation caractéristique est :

$$r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r = \pm 1$$

Donc, la solution générale de l'équation homogène est :

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Étape 2 : Méthode de variation des constantes. On cherche une solution particulière sous la forme :

$$y_p(x) = u_1(x)e^x + u_2(x)e^{-x}$$

On impose :

$$u_1'(x)e^x + u_2'(x)e^{-x} = 0 \quad (1) \quad u_1'(x)e^x - u_2'(x)e^{-x} = xe^x \cos(x) \quad (2)$$

En additionnant et soustrayant les équations (1) et (2), on obtient :

$$2u_1'(x)e^x = xe^x \cos(x) \Rightarrow u_1'(x) = \frac{x \cos(x)}{2}$$

$$2u_2'(x)e^{-x} = -xe^x \cos(x) \Rightarrow u_2'(x) = -\frac{x \cos(x)}{2}e^{2x}$$

Intégrons :

$$u_1(x) = \int \frac{x \cos(x)}{2} dx$$

On utilise une intégration par parties :

$$\int x \cos(x) dx = x \sin(x) + \cos(x) \Rightarrow u_1(x) = \frac{1}{2}(x \sin(x) + \cos(x))$$

$$u_2(x) = -\frac{1}{2} \int x \cos(x) e^{2x} dx$$

Cette intégrale est plus complexe, on utilise une double intégration par parties ou table de formules. Pour simplifier ici, on note :

$$u_2(x) = -\frac{1}{2}I(x), \quad \text{où } I(x) = \int x \cos(x) e^{2x} dx$$

Étape 3 : Solution générale. La solution générale est :

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + u_1(x)e^x + u_2(x)e^{-x}$$

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \left(\frac{1}{2}x \sin(x) + \frac{1}{2} \cos(x) \right) e^x - \frac{1}{2} \left(\int x \cos(x) e^{2x} dx \right) e^{-x}$$

Exercice 6. Déterminer la solution du problème de Cauchy :

$$y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

Solution.

1. Résolution de l'équation homogène

L'équation homogène associée est :

$$y'' + 4y = 0.$$

L'équation caractéristique est :

$$r^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \pm 2i.$$

Les solutions de l'équation homogène sont donc :

$$y_h(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t).$$

2. Méthode de variation des constantes

Nous écrivons une solution sous la forme :

$$y(t) = u_1(t) \cos(2t) + u_2(t) \sin(2t),$$

où u_1 et u_2 sont des fonctions à déterminer. La méthode impose :

$$\begin{cases} u_1'(t) \cos(2t) + u_2'(t) \sin(2t) = 0, \\ -2u_1'(t) \sin(2t) + 2u_2'(t) \cos(2t) = 0. \end{cases}$$

Ce système homogène admet uniquement la solution $u_1' = u_2' = 0$, ce qui signifie que les constantes sont vraiment constantes.

Donc la solution générale est simplement :

$$y(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t).$$

3. Utilisation des conditions initiales

$$y(0) = C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0) = C_1 = 1,$$

$$y'(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t) \Rightarrow y'(0) = 2C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = 1.$$

4. Solution finale

$$\boxed{y(t) = \cos(2t) + \sin(2t)}$$

Exercice 7. Résoudre le système suivant et donner la solution générale :

$$\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = x + y \end{cases}$$

Prouver que toutes les solutions sont définies sur $\mathbb{R}$.

Solution.

On pose $\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, alors le système s'écrit :

$$\mathbf{X}'(t) = A\mathbf{X}(t), \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Recherche des valeurs propres de A : On résout $\det(A - \lambda I) = 0$:

$$\det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (3 - \lambda)(1 - \lambda) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$$

Donc $\lambda = 2$ est une valeur propre double.

Étude de la diagonalisabilité.

On cherche les vecteurs propres associés à $\lambda = 2$:

$$(A - 2I)\mathbf{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient $v_1 = v_2$, donc l'espace propre est de dimension 1 : la matrice A n'est pas diagonalisable.

Mise sous forme de Jordan.

Puisque A n'est pas diagonalisable, on cherche une base de vecteurs généralisés. On a un vecteur propre $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On cherche un vecteur généralisé $\mathbf{v}_2$ tel que :

$$(A - 2I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Forme de la solution générale.

On utilise la solution dans le cas d'une matrice de Jordan :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= e^{2t} \left(c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right) \\ \mathbf{X}(t) &= e^{2t} \left((c_1 + c_2 t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = e^{2t} \begin{pmatrix} c_1 + c_2 t + c_2 \\ c_1 + c_2 t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc la solution générale est :

$$x(t) = e^{2t}(c_1 + c_2 t + c_2), \quad y(t) = e^{2t}(c_1 + c_2 t)$$

Domaine de définition. Les fonctions exponentielles et polynomiales sont définies sur tout $\mathbb{R}$, donc les solutions le sont aussi. Ainsi, toutes les solutions sont définies sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8. Soit l'équation différentielle :

$$y'' + \lambda y = 0 \quad \text{avec} \quad y(0) = y(\pi) = 0$$

Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles ce problème admet une solution non triviale (problème de Sturm-Liouville).

Exercice 9. Trouver la solution générale de :

$$y'' + y = \tan x$$

en utilisant la méthode de variation des constantes.

Exercice 10. Résoudre :

$$y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = e^x$$

et prouver que toutes les solutions tendent vers $+\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 11. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable. Résoudre :

$$Y' = AY + B(x)$$

où B est une fonction continue. Exprimer la solution générale en fonction des valeurs propres de A .

Pour aller plus loin

Exercice 12. Résoudre l'équation différentielle suivante en utilisant la transformation de Laplace :

$$y'' - 2y' + y = \delta(t - 1), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

où δ est la fonction de Dirac.

Solution.

Résolvons l'équation différentielle suivante à l'aide de la transformation de Laplace :

$$y'' - 2y' + y = \delta(t - 1), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

où δ est la fonction de Dirac.

Étape 1 : Application de la transformation de Laplace

On applique la transformation de Laplace de chaque terme en utilisant les conditions initiales :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y''(t)\} &= s^2 Y(s), \\ \mathcal{L}\{2y'(t)\} &= 2sY(s), \\ \mathcal{L}\{y(t)\} &= Y(s), \\ \mathcal{L}\{\delta(t - 1)\} &= e^{-s}. \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$s^2 Y(s) - 2sY(s) + Y(s) = e^{-s}.$$

Factorisation :

$$Y(s)(s^2 - 2s + 1) = e^{-s}.$$

Remarquons que $s^2 - 2s + 1 = (s - 1)^2$, donc :

$$Y(s) = \frac{e^{-s}}{(s - 1)^2}.$$

Étape 2 : Transformation de Laplace inverse

On utilise la propriété de translation dans le temps :

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{(s - 1)^2}\right\} = u_1(t) \cdot (t - 1)e^{(t-1)}.$$

La solution du problème est donnée par :

$$y(t) = (t - 1)e^{t-1} \cdot u_1(t),$$

où $u_1(t)$ est la fonction échelon unité en $t = 1$.

Exercice 13. Considérons l'équation :

$$y'' + (a + b \cos(2x))y = 0$$

Montrer que si a est suffisamment grand, il existe des solutions périodiques.
Considérons l'équation différentielle suivante :

$$y'' + (a + b \cos(2x))y = 0,$$

connue sous le nom d'**équation de Mathieu**. Nous souhaitons montrer que pour a suffisamment grand, il existe des solutions périodiques.

Solution.

Commençons par remarquer que cette équation est de la forme standard des équations linéaires à coefficients périodiques. Le terme $q(x) = a + b \cos(2x)$ est 2π -périodique. L'étude de la périodicité des solutions d'une telle équation relève de la théorie de **Floquet**.

La méthode de Floquet stipule que si les coefficients de l'équation sont périodiques, alors les solutions peuvent être écrites sous la forme :

$$y(x) = e^{\mu x} p(x),$$

où $p(x)$ est une fonction 2π -périodique et $\mu \in \mathbb{C}$. En particulier, la solution est périodique (de période 2π ou un multiple) si et seulement si μ est purement imaginaire avec $\mu = in$, $n \in \mathbb{Z}$, ou nul.

Pour analyser le comportement asymptotique pour $a \gg 1$, nous introduisons une approche perturbative. Notons que si $b = 0$, l'équation devient

$$y'' + ay = 0,$$

dont les solutions sont

$$y(x) = A \cos(\sqrt{a}x) + B \sin(\sqrt{a}x),$$

qui sont périodiques si et seulement si $\sqrt{a}/\pi$ est un nombre rationnel. Mais comme on cherche des solutions périodiques pour un ensemble non discret de valeurs de a , cela ne suffit pas.

Cependant, lorsque a est très grand, le terme oscillant $b \cos(2x)$ devient un petit terme par rapport à a . On peut alors appliquer la théorie des perturbations périodiques. Écrivons $q(x) = a(1 + \frac{b}{a} \cos(2x))$.

L'équation devient :

$$y'' + a \left(1 + \frac{b}{a} \cos(2x) \right) y = 0, \quad \text{ou encore} \quad y'' + ay + b \cos(2x)y = 0.$$

On considère donc cela comme une perturbation de l'équation $y'' + ay = 0$.

La théorie classique des équations de Mathieu montre que pour $a \gg 1$, il existe des bandes de stabilité dans le plan (a, b) où les solutions sont bornées, et en particulier, des valeurs de a pour lesquelles les solutions sont 2π -périodiques.

Ainsi, pour a suffisamment grand, le terme $b \cos(2x)$ agit comme une perturbation faible d'un système à solutions périodiques, et les solutions restent périodiques dans certaines plages de valeurs de b .

Exercice 14. Étudier l'existence et l'unicité des solutions de :

$$y'(x) = y(x-1) \quad \text{pour } x \geq 0$$

avec une condition initiale $y(x) = \phi(x)$ sur $[-1, 0]$.

Exercice 15. Résoudre :

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \quad (\text{Équation de Legendre})$$

avec $y(1) = 1$ et $y'(1)$ finie. Montrer que les solutions polynomiales sont les polynômes de Legendre.

Exercice 16. Soit l'équation différentielle :

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad (\text{Équation de Bessel})$$

(a) Montrer que si $\nu = \frac{1}{2}$, une solution particulière est $y(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$.

(b) En déduire la solution générale pour $\nu = \frac{1}{2}$.

Exercice 17. Étudier les solutions de :

$$xy'' + (1-x)y' + \lambda y = 0 \quad (\text{Équation de Laguerre})$$

au voisinage de $x = 0$. Pour quelles valeurs de λ existe-t-il des solutions polynomiales ?

Exercice 18. Soit l'équation suivante :

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

avec $p(x) = \frac{2}{x}$ et $q(x) = \frac{2}{x^2}$. Trouver une base de solutions fondamentales sur $x > 0$.

Exercice 19. Soit l'équation :

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

où p et q sont continues sur $\mathbb{R}^+$ avec $q(x) \leq 0$. Montrer que toute solution bornée tend vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$ ou oscille de manière non bornée.

Exercice 20. Résoudre l'équation différentielle suivante à coefficients variables :

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = \ln(x), \quad x > 0.$$

Chapitre 2

Équations différentielles non linéaires

2.1 Le théorème de Cauchy-Lipschitz

Dans cette section, on cherche à résoudre les équations différentielles du type

$$X' = F(t, X) \quad (S)$$

où F est une fonction continue définie sur $I \times \Omega$ (avec I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{K}^n$) et à valeurs dans $\mathbb{K}^n$.

Comme dans le cas linéaire, on s'intéresse au problème de Cauchy : étant donnés $t_0 \in I$ et $x_0 \in \Omega$, existe-t-il une solution de (S) définie au voisinage de t_0 et prenant la valeur x_0 en t_0 , et cette solution est-elle unique ?

Dans tout ce qui suit, $\|\cdot\|$ désigne une norme sur $\mathbb{K}^n$. Le résultat suivant qui est une généralisation naturelle du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire donne une première réponse à cette question.

Théorème 2.1.1 (de Cauchy-Lipschitz). *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{K}^n$ et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On suppose que*

- F est continue de $I \times \Omega$ dans $\mathbb{K}^n$;
- il existe une fonction L intégrable sur tout sous-intervalle fermé borné de I telle que
$$\forall t \in I, \forall (x, y) \in \Omega^2, \|F(t, x) - F(t, y)\| \leq L(t)\|x - y\|$$

Alors pour tout point (t_0, x_0) de $I \times \Omega$, il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ contenant t_0 et une fonction $\phi : J \rightarrow \Omega$ de classe C^1 vérifiant (S) sur J et telle que $\phi(t_0) = x_0$.

Cette solution est unique au sens suivant : s'il existe une autre fonction ψ de classe C^1 sur un sous-intervalle J' de I contenant t_0 , vérifiant (S) sur J' et telle que $\psi(t_0) = x_0$ alors $\psi \equiv \phi$ sur $J \cap J'$.

Démonstration : Vu les hypothèses sur F il est équivalent de montrer qu'il existe une unique fonction ϕ continue sur un intervalle J contenant t_0 et telle que

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(t', \phi(t')) dt' \quad \text{pour tout } t \in J. \quad (3.1)$$

Soit $r_0 > 0$ tel que la boule fermée $\bar{B}(x_0, r_0)$ de centre x_0 et de rayon r_0 soit incluse dans Ω et J , un intervalle ouvert contenant t_0 . On choisit J de longueur suffisamment petite pour que

$$\int_J \|F(t, x_0)\| dt \leq \frac{r_0}{2} \quad \text{et} \quad \int_J L(t) dt \leq \frac{1}{2}.$$

On considère une fonction $\phi \in \mathcal{C}(J; \bar{B}(x_0, r_0))$. Alors

$$\psi : \begin{cases} J \rightarrow E \\ t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^t F(t', \phi(t')) dt' \end{cases}$$

est une fonction continue sur J et à valeurs dans $\bar{B}(x_0, r_0)$. En effet, pour tout $t \in J$, on a

$$\begin{aligned} \|\psi(t) - x_0\| &\leq \int_J \|F(t, \phi(t))\| dt \\ &\leq \int_J \|F(t, \phi(t)) - F(t, x_0)\| dt + \int_J \|F(t, x_0)\| dt \\ &\leq r_0 \int_J L(t) dt + \int_J \|F(t, x_0)\| dt \\ &\leq r_0. \end{aligned}$$

Il en résulte que l'on peut définir la suite $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{C}(J; \bar{B}(x_0, r_0))$ par

$$\phi_0(t) \equiv x_0 \quad \text{et} \quad \phi_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(t', \phi_n(t')) dt'. \quad (3.2)$$

Démontrons que la suite $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}(J; \bar{B}(x_0, r_0))$. Pour cela, on écrit que si

$$\rho_n \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{t \in J, p \in \mathbb{N}} \|\phi_{n+p}(t) - \phi_n(t)\|$$

alors on a

$$\begin{aligned} \rho_{n+1} &\leq \sup_{p \in \mathbb{N}} \int_J \|F(t, \phi_{n+p}(t)) - F(t, \phi_n(t))\| dt \\ &\leq \sup_{p \in \mathbb{N}} \int_J L(t) \|\phi_{n+p}(t) - \phi_n(t)\| dt \\ &\leq \rho_n \int_J L(t) dt \\ &\leq \frac{1}{2} \rho_n. \end{aligned}$$

En conséquence la suite $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0. La suite $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc de Cauchy dans l'espace complet $\mathcal{C}(J; \bar{B}(x_0, r_0))$. Elle converge donc uniformément vers une fonction ϕ qui appartient aussi à $\mathcal{C}(J; \bar{B}(x_0, r_0))$. Par passage à la limite dans (3.2), on trouve que ϕ est solution de (3.1). Reste à prouver l'unicité. Considérons donc deux solutions ϕ et ψ de (3.1) définies sur deux intervalles ouverts J et J' et telles que $\phi(t_0) = \psi(t_0)$. On a pour tout $(t, t_1) \in (J \cap J')^2$,

$$\psi(t) - \phi(t) = \int_{t_1}^t (F(\tau, \psi(\tau)) - F(\tau, \phi(\tau))) d\tau \quad (3.3)$$

Si $\int_{J \cap J'} L(t) < 1$, une adaptation immédiate de la preuve de la convergence de la suite $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ permet d'obtenir $\psi \equiv \phi$ sur $J \cap J'$, mais on peut en fait fort bien se passer de cette condition sur J . En effet, soit $K = \{t \in J \cap J' \mid \phi(t) = \psi(t) \text{ sur } [t_0, t] \cup [t, t_0]\}$. L'ensemble K est un sous-intervalle de $J \cap J'$ par construction. Cet intervalle n'est pas vide car contient t_0 . Soit t_+ la borne supérieure de K . Supposons par l'absurde que $t_+ < \sup J \cap J'$. Alors $\phi - \psi \equiv 0$ sur $[t_0, t_+]$ et donc sur $[t_0, t_+]$ aussi par continuité de $\phi - \psi$. Donc $t_+ \in K$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que

$$]t_+ - \varepsilon, t_+ + \varepsilon \left[\subset J \cap J' \quad \text{et} \quad \int_{t_+ - \varepsilon}^{t_+ + \varepsilon} L(t) dt \leq \frac{1}{2}$$

De (3.3), on tire

$$\sup_{|t - t_+| < \varepsilon} \|\psi(t) - \phi(t)\| \leq \frac{1}{2} \sup_{|t - t_+| < \varepsilon} \|\psi(t) - \phi(t)\|$$

Donc $]t_+ - \varepsilon, t_+ + \varepsilon[\subset K$. Cela contredit la définition de t_+ . Donc $t_+ = \sup J \cap J'$. Un raisonnement analogue est valable pour la borne inférieure. Donc $K = J \cap J'$. Autrement dit $\psi \equiv \phi$ sur $J \cap J'$. $\square$

Remarque 2.1.2 *La deuxième hypothèse du théorème de Cauchy-Lipschitz -le caractère lipschitzien par rapport à la variable d'espace- est vérifiée dès que F est différentiable par rapport à x , à différentielle bornée. C'est une conséquence immédiate de l'inégalité des accroissements finis.*

Insistons également sur le fait que le théorème de Cauchy-Lipschitz est à la fois local en temps et en espace. C'est-à-dire qu'il suffit en fait d'exiger que l'hypothèse Lipschitz soit vérifiée au voisinage de tout point de Ω pour une fonction L pouvant dépendre du point et du voisinage considérés.

Remarque 2.1.3 *Par la transformation habituelle, du théorème de Cauchy-Lipschitz pour les systèmes différentiels on déduit un théorème analogue pour les équations différentielles scalaires d'ordre n du type*

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) \quad (\text{E})$$

La fonction $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ doit être continue et vérifier

$$|f(t, y_0, \dots, y_{n-1}) - f(t, x_0, \dots, x_{n-1})| \leq L(t) \max_{0 \leq i \leq n-1} |y_i - x_i|$$

pour une fonction L localement intégrable sur I .

On prendra garde au fait que pour résoudre le problème de Cauchy associé à (E) il faut imposer en t_0 la valeur de la fonction et de ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à $n - 1$.

Remarque 2.1.4 *Si l'on exige simplement que la fonction F soit continue, alors on a encore existence d'une solution pour le problème de Cauchy (c'est le théorème d'Arzela-Peano voir par exemple [10]) mais on peut perdre l'unicité. Pour s'en convaincre on cherchera à résoudre l'équation différentielle $x' = 2\sqrt{|x|}$.*

Le théorème de Cauchy-Lipschitz ne fournit l'existence d'une solution que sur un sous-intervalle de I contenant t_0 suffisamment petit. On peut se demander s'il n'est pas possible de prolonger cette solution sur un intervalle de temps plus grand (pour les EDO linéaires on pouvait toujours prendre $J = I$). Le lemme ci-dessous nous aidera à répondre à cette question.

Lemme 2.1.5 (de recollement). Soit F vérifiant les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz et $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$. Soit ϕ_1 et ϕ_2 deux solutions de (S) définies sur des sous-intervalles I_1 et I_2 de I contenant t_0 . Alors $\phi_1 \equiv \phi_2$ sur $I_1 \cap I_2$ et la fonction ϕ définie sur $I_1 \cup I_2$ par

$$\phi(t) = \begin{cases} \phi_1(t) & \text{si } t \in I_1 \\ \phi_2(t) & \text{si } t \in I_2 \end{cases}$$

vérifie $\phi(t_0) = x_0$ et (S) sur $I_1 \cup I_2$.

Démonstration : Le fait que ϕ_1 et ϕ_2 coïncident sur $I_1 \cap I_2$ est donné par le théorème de Cauchy-Lipschitz. Cela assure que la définition de ϕ est licite. Le reste est alors immédiat. $\square$

Définition 2.1.6 On dit que la solution ϕ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' = F(t, X) \\ X|_{t=t_0} = x_0 \end{cases} \quad (C)$$

est maximale si on ne peut pas la prolonger en une solution de (C) définie sur un intervalle strictement plus grand.

Théorème 2.1.7 Sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$ le problème de Cauchy (C) admet une unique solution maximale. De plus, l'intervalle de définition de cette solution est ouvert.

Démonstration : **Existence :** on considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des solutions de (C) et, pour ϕ dans $\mathcal{E}$, on note J_ϕ l'intervalle de définition de ϕ . On définit alors la fonction ψ sur l'intervalle ouvert $J := \bigcup_{\phi \in \mathcal{E}} J_\phi$ par

$$\psi(x) = \phi(x) \quad \text{si } x \in J_\phi$$

Cette définition est licite en vertu de la partie unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz, et la fonction ψ ainsi construite est clairement un prolongement de toutes les fonctions ϕ considérées.

Unicité : Si ϕ_1 et ϕ_2 sont deux solutions maximales alors leurs intervalles de définition sont les mêmes sinon le lemme de recollement permettrait de construire un prolongement sur l'intervalle (plus grand) $I_1 \cup I_2$.

Intervalle de définition ouvert : Si tel n'est pas le cas alors cet intervalle J contient (par exemple) sa borne supérieure t^* . En particulier $(t^*, \phi(t^*)) \in I \times \Omega$ et l'on peut donc résoudre (S) avec donnée $\phi(t^*)$ en t^* . La solution maximale ψ ainsi obtenue coïncide avec ϕ en t^* donc est égale à ϕ . Son intervalle de définition est donc J . Mais ψ est définie au-delà de t^* en vertu du théorème de Cauchy-Lipschitz. Donc $t^* < \sup J$, ce qui est contraire à nos hypothèses. $\square$

2.2 Quelques propriétés qualitatives des solutions

2.2.1 Critères d'existence globale

Le théorème de Cauchy-Lipschitz donne l'existence et l'unicité pour les équations différentielles ordinaires. C'est un théorème local dans la mesure où il ne donne l'existence d'une solution que sur un sous-intervalle de I . Dans le cas d'une équation différentielle linéaire, nous avons vu qu'il y avait existence globale, c'est-à-dire que les solutions maximales étaient toujours définies sur I tout entier. Dans le cas général, cela n'est pas forcément le cas, même si la fonction F est très régulière et définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ tout entier. Le lecteur pourra s'en persuader en cherchant à résoudre l'équation différentielle

$$x' = x^2.$$

Ci-dessous, nous donnons une condition nécessaire pour qu'une solution maximale ne soit pas définie sur l'intervalle I tout entier. Pour simplifier la présentation, on suppose que F est définie sur $I \times \mathbb{R}^n$ (i.e. $\Omega = \mathbb{R}^n$) avec I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Proposition 2.2.1 *Soit F une fonction de $I \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ satisfaisant les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz au voisinage de tout point de $I \times \mathbb{R}^n$. Soit ϕ une solution maximale de (S) et $]T_*, T^*[$ son intervalle de définition. Alors*

$$T_* > \inf I \implies \limsup_{t \rightarrow T_*} \|\phi(t)\| = \infty \quad \text{et} \quad T^* < \sup I \implies \limsup_{t \rightarrow T^*} \|\phi(t)\| = \infty.$$

Démonstration : On montre juste le résultat pour la borne supérieure. Soit $t_0 \in I$. Supposons que ϕ soit bornée sur $[t_0, T^*[$ et que (par l'absurde) $T^* < \sup I$. L'ensemble $A := \{\phi(t)/t \in [t_0, T^*]\}$ est un borné de $\mathbb{R}^n$. Comme F est continue sur le compact $[t_0, T^*] \times \bar{A}$, on en déduit que qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall t \in [t_0, T^*[, \|F(t, \phi(t))\| \leq M.$$

En conséquence, pour tout $(t, t') \in [t_0, T^*]^2$, on a d'après l'inégalité des accroissements finis

$$\|\phi(t) - \phi(t')\| \leq M |t - t'|$$

Donc ϕ vérifie le critère de Cauchy en T^* . L'espace $\mathbb{R}^n$ étant complet, il existe donc $x_{T^*} \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\lim_{t \rightarrow T^*} \phi(t) = x_{T^*}.$$

Comme par ailleurs

$$\phi'(t) = F(t, \phi(t)) \quad \text{pour tout } t \in [t_0, T^*[,$$

on en déduit que $\phi'(t)$ admet pour limite $F(T^*, x_{T^*})$ en T^* . En conséquence, la fonction ϕ se prolonge par continuité en T^* , le prolongement est dérivable jusqu'en T^* et l'équation différentielle (S) est vérifiée en $t = T^*$. Comme ϕ est une solution maximale, on conclut que T^* est dans l'intervalle de définition de ϕ . Mais on a vu que cet intervalle était ouvert, donc il ne peut pas contenir sa borne supérieure T^* , d'où la contradiction. $\square$

Corollaire 2.2.2 *Sous les hypothèses de la proposition précédente, si l'on a de plus*

$$\forall t \in I, \forall x \in \mathbb{R}^n, \|F(t, x)\| \leq M\|x\|^2$$

alors si l'intervalle maximal de définition est $]T_, T^*[$ et $t_0 \in]T_*, T^*[$, on a*

$$T_* > \inf I \implies \int_{T_*}^{t_0} \|\phi(t)\| dt = +\infty \quad \text{et} \quad T^* < \sup I \implies \int_{t_0}^{T^*} \|\phi(t)\| dt = +\infty.$$

Démonstration : La solution ϕ vérifie pour tout $t \in [t_0, T^*[$,

$$\phi(t) = \phi(t_0) + \int_{t_0}^t F(t', \phi(t')) dt'$$

Donc, vu l'hypothèse sur F , on a

$$\|\phi(t)\| \leq \|\phi(t_0)\| + M \int_{t_0}^t \|\phi(t')\|^2 dt'$$

Le lemme de Gronwall implique que

$$\|\phi(t)\| \leq \|\phi(t_0)\| \exp \left(M \int_{t_0}^t \|\phi(t')\| dt' \right)$$

Donc, tant que l'intégrale ci-dessus est finie, la fonction ϕ reste bornée, et la proposition précédente permet donc de conclure au résultat voulu. $\square$

Le corollaire suivant permet de retrouver que pour les équations linéaires, l'intervalle de définition des solutions maximales est toujours égal à I .

Corollaire 2.2.3 *Sous les hypothèses de la proposition précédente, s'il existe deux fonctions α et β localement intégrables de I dans $\mathbb{R}^+$ et telle que*

$$\|F(t, x)\| \leq \alpha(t) + \beta(t)\|x\| \quad \text{pour tout} \quad (t, x) \in I \times \mathbb{R}^n$$

alors toutes les solutions maximales sont définies sur I .

Démonstration : Soit ϕ une solution maximale et J son intervalle ouvert de définition. En utilisant le fait que

$$\phi(t) = \phi(t_0) + \int_{t_0}^t F(t', \phi(t')) dt'$$

les hypothèses sur F puis le lemme de Gronwall, il vient pour tout $t \in J$:

$$\|\phi(t)\| \leq \left(\|\phi(t_0)\| + \left| \int_{t_0}^t \alpha(t') dt' \right| \right) \exp \left(\left| \int_{t_0}^t \beta(t') dt' \right| \right)$$

Donc, si $\sup J < \sup I$ alors ϕ est bornée sur $[t_0, \sup J[$. De même, si $\inf J > \inf I$ alors ϕ est bornée sur $] \inf J, t_0]$. La proposition ci-dessus permet donc de conclure que $\inf J = \inf I$ et que $\sup J = \sup I$. $\square$

Dans le cas général où F n'est définie que sur $I \times \Omega$ avec Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, on dispose du résultat suivant (démontré dans [4] par exemple).

Proposition 2.2.4 Soit F vérifiant les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz et ϕ une solution maximale de (S) . Notons $I =]a, b[$ et $J =]T_*, T^*[$ l'intervalle ouvert de définition de ϕ . Alors

- ou bien $T^* = b$,
- ou bien $\phi(t)$ sort de tout compact de Ω quand $t \rightarrow T^*$.

Résultat analogue pour T_* .

2.2.2 Dépendance par rapport aux paramètres et conditions initiales

Dans les applications, on ne connaît pas toujours exactement la valeur des données (t_0, x_0) ni même de la fonction F . Il est donc important de savoir dans quelle mesure une petite erreur sur ces quantités influera sur la valeur de la solution donnée par le théorème de Cauchy-Lipschitz. Cela nous amène naturellement à étudier le problème de la dépendance par rapport aux paramètres et aux conditions initiales.

Lemme 2.2.5 Soit F vérifiant les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, J un sous-intervalle fermé borné de I et K un compact inclus dans Ω . Il existe un réel positif M tel que si $(t_0, t_1) \in J^2$, si ϕ_0, ϕ_1 sont deux solutions de (S) définies sur J à valeurs dans K et si $\phi_0(t_0) = x_0$ et $\phi_1(t_1) = x_1$ alors

$$\forall t \in J^2, \|\phi_1(t) - \phi_0(t)\| \leq (M|t_1 - t_0| + \|x_1 - x_0\|) \exp \left| \int_{t_0}^t L(t') dt' \right|.$$

Démonstration : En utilisant la version intégrale de (S) , on voit que pour tout $t \in J$,

$$\phi_1(t) - \phi_0(t) = x_1 - x_0 + \int_{t_0}^t (F(t', \phi_1(t')) - F(t', \phi_0(t'))) dt' + \int_{t_1}^{t_0} F(t', \phi_1(t')) dt'$$

Comme $J \times K$ est un compact de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et comme F est continue, on en déduit qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall (t, x) \in J \times K, \|F(t, x)\| \leq M$$

En particulier, comme ϕ_1 et à valeurs dans K , on a donc

$$\forall t' \in J, \|F(t', \phi_1(t'))\| \leq M$$

Le résultat voulu découle alors directement du lemme de Gronwall. $\square$

Nous pouvons maintenant énoncer un résultat général de dépendance par rapport à un paramètre et aux conditions initiales. Le cadre est le suivant : on se donne une fonction $F : I \times \Omega \times \Omega' \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue avec I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ et Ω' ouvert de $\mathbb{R}^p$ telle qu'il existe une fonction L intégrable sur tout sous-intervalle fermé borné de I vérifiant

$$\forall t \in I, \forall (x, y) \in \Omega^2, \forall \lambda \in \Omega', \|F(t, x, \lambda) - F(t, y, \lambda)\| \leq L(t)\|x - y\|$$

et on s'intéresse à la résolution de la famille d'EDO

$$X' = F_\lambda(t, X) \quad (S_\lambda)$$

avec $F_\lambda(t, X) := F(t, X, \lambda)$ et $\lambda \in \Omega'$.

Théorème 2.2.6 *Soit $(t_0, x_0, \lambda_0) \in I \times \Omega \times \Omega'$. Il existe un intervalle ouvert J contenant t_0 , un voisinage U de x_0 et un voisinage U' de λ_0 tels que pour tout $(t_1, x_1, \lambda_1) \in J \times U \times U'$ l'équation (S_{λ_1}) admette une unique solution $\phi_{t_1, x_1, \lambda_1}$ définie et C^1 sur J et telle que $\phi_{t_1, x_1, \lambda_1}(t_1) = x_1$. De plus l'application $(t_1, x_1, \lambda_1) \mapsto \phi_{t_1, x_1, \lambda_1}$ est continue de $J \times U \times U'$ dans $\mathcal{C}(J; \mathbb{R}^n)$.*

Démonstration : Notons que l'on peut se ramener au cas sans paramètre grâce à l'artifice suivant : pour $(t, X, \lambda) \in I \times \Omega \times \Omega'$, on pose

$$G(t, (X, \lambda)) = \begin{pmatrix} F(t, X, \lambda) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En effet : ϕ est solution de (S_λ) si et seulement si $\psi := (\phi, \lambda)$ vérifie

$$Y' = G(t, Y).$$

La nouvelle fonction G vérifie bien les hypothèses de l'énoncé avec $\mathbb{R}^n$ remplacé par $\mathbb{R}^{n+p}$ et Ω remplacé par $\Omega \times \Omega'$.

Supposons donc désormais que F ne dépende pas de λ . Soit r_0 tel que $\bar{B}(x_0, r_0) \subset \Omega$. En utilisant la continuité de F par rapport à x , on voit que l'on peut choisir un intervalle ouvert J contenant t_0 tel que

$$\int_J L(t') dt' \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \int_J \|F(t, x_0)\| \leq \frac{r_0}{4}$$

Pour $\phi \in \mathcal{C}(J; \bar{B}(x_0, r_0))$, on constate alors que la fonction ψ définie par

$$\psi(t) = x_1 + \int_{t_1}^t F(\tau, \phi(\tau)) d\tau$$

est dans $\mathcal{C}(J; \bar{B}(x_0, r_0))$.

Cela découle d'une majoration facile dans la décomposition

$$\psi(t) - x_0 = x_1 - x_0 + \int_{t_1}^t (F(\tau, \phi(\tau)) - F(\tau, x_0)) d\tau + \int_{t_1}^t F(\tau, x_0) d\tau$$

En reprenant mot pour mot la démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz il est alors facile de conclure que pour tout $x_1 \in \bar{B}(x_0, r_0/4)$ et $t_1 \in J$, le système (S) a une solution ϕ_{t_1, x_1} définie sur J à valeurs dans $\bar{B}(x_0, r_0)$ et vérifiant $\phi_{t_1, x_1}(t_1) = x_1$. La continuité par rapport à (t_1, x_1) est alors une conséquence immédiate du lemme précédent. $\square$

2.2.3 Le flot

Définition 2.2.7 Soit $F : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ vérifiant les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz. L'application définie sur $I \times \Omega$ et qui à (t_0, x_0) associe la solution maximale ϕ_{t_0, x_0} de (S) prenant la valeur x_0 en t_0 est appelé *flot associé à F*.

Notation. Il sera parfois commode de considérer le flot comme une fonction de trois variables plutôt que comme une famille de fonctions dépendant des paramètres t_0 et x_0 . On notera alors

$$\phi(t, t_0, x_0) := \phi_{t_0, x_0}(t).$$

Proposition 2.2.8 Pour tout $(t, t_0, t_1, x_0) \in I^3 \times \Omega$, les expressions $\phi(t, t_0, x_0)$ et $\phi(t, t_1, \phi(t_1, t_0, x_0))$ sont définies simultanément, et l'on a

$$\phi(t, t_1, \phi(t_1, t_0, x_0)) = \phi(t, t_0, x_0).$$

Démonstration : C'est une conséquence immédiate de la définition du flot et de la partie unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz. En effet, les deux fonctions coïncident en t_1 et vérifient la même EDO. $\square$

Remarque 2.2.9 En particulier, la proposition ci-dessus assure que

$$\phi(t_0, t_1, \phi(t_1, t_0, x_0)) = x_0.$$

En conséquence, il existe un voisinage de x_0 tel que l'application $x \mapsto \phi(t_1, t_0, x)$ soit bijective. Le théorème d'inversion globale et le théorème ci-dessous assurent en fait que cette application est un difféomorphisme. Pour le montrer nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.2.10 Soit $F : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ vérifiant les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz et ϕ une solution de (S) sur un sous-intervalle J de I . Soit $\varepsilon > 0$ et $\phi_\varepsilon : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction C^1 , solution approchée de ϕ au sens suivant :

- il existe $t_0 \in J$ tel que $\phi_\varepsilon(t_0) = \phi(t_0)$,
- pour tout $t \in J$, on a $\|\phi'_\varepsilon(t) - F(t, \phi_\varepsilon(t))\| \leq \varepsilon$.

Alors on a

$$\forall t \in J, \|\phi_\varepsilon(t) - \phi(t)\| \leq \varepsilon |t - t_0| e^{\left| \int_{t_0}^t L(\tau) d\tau \right|}.$$

Démonstration : Il suffit de remarquer que pour tout $t \in J$, on a

$$\phi_\varepsilon(t) - \phi(t) = \int_{t_0}^t (\phi'_\varepsilon(\tau) - F(\tau, \phi_\varepsilon(\tau))) d\tau + \int_{t_0}^t (F(\tau, \phi_\varepsilon(\tau)) - F(\tau, \phi(\tau))) d\tau.$$

En conséquence, en utilisant les hypothèses sur F et ϕ_ε , il vient

$$\|\phi_\varepsilon(t) - \phi(t)\| \leq \varepsilon |t - t_0| + \left| \int_{t_0}^t L(\tau) \|\phi_\varepsilon(\tau) - \phi(\tau)\| d\tau \right|$$

et le lemme de Gronwall permet de conclure. $\square$

Théorème 2.2.11 Soit F une fonction continue de $I \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^n$, différentiable par rapport à x et telle que $D_x F$ soit continue sur $I \times \Omega$. Alors le flot est différentiable par rapport à x et la matrice jacobienne $D_x \phi(\cdot, t_0, x_0)$ vérifie l'équation différentielle linéaire (à valeurs matricielles) suivante sur l'intervalle de définition de ϕ_{t_0, x_0} :

$$\begin{cases} \Phi' = D_x F(t, \phi_{t_0, x_0}(t)) \cdot \Phi, \\ \Phi|_{t=t_0} = I_n. \end{cases} \quad (\text{L})$$

Démonstration : Pour $h \in \mathbb{R}^n$ assez petit, on peut trouver un intervalle fermé borné J contenant t_0 tel que t_0 soit intérieur à J , et sur lequel ϕ_{t_0, x_0} et ϕ_{t_0, x_0+h} sont définies (c'est une conséquence du théorème de dépendance par rapport aux conditions initiales). On a alors pour tout $t \in J$,

$$\begin{aligned} \phi'_{t_0, x_0}(t) &= F(t, \phi_{t_0, x_0}(t)) \\ \phi'_{t_0, x_0+h}(t) &= F(t, \phi_{t_0, x_0+h}(t)) \end{aligned}$$

Donc, par différence, et en utilisant le fait que F est différentiable par rapport à x ,

$$\Delta'(t, h) = D_x F(t, \phi_{t_0, x_0}(t)) \cdot \Delta(t, h) + \varepsilon(t, h)$$

avec $\Delta(t, h) = \phi_{t_0, x_0+h}(t) - \phi_{t_0, x_0}(t)$ et

$$\varepsilon(t, h) = F(t, \phi_{t_0, x_0+h}(t)) - F(t, \phi_{t_0, x_0}(t)) - D_x F(t, \phi_{t_0, x_0}(t)) \cdot \Delta(t, h)$$

Remarquons que ε est continue, vérifie $\varepsilon(t_0, h) = \varepsilon(t, 0) = 0$ et que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\varepsilon(t, h)\|}{\|h\|} = 0 \quad \text{uniformément par rapport à } t \in J.$$

En effet, si F est C^2 par rapport à x et telle que $(t, x) \mapsto D^2 F(t, x)$, c'est une conséquence du théorème de Taylor-Lagrange qui entraîne l'existence de $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $t \in J$, et h assez petit, on ait

$$\|\varepsilon(t, h)\| \leq M \|h\|^2$$

Si l'on a seulement $D_x F$ continue, on peut utiliser l'égalité des accroissements finis qui assure que pour chaque composante ε^i de ε , il existe $\theta \in [0, 1]$ tel que

$$\varepsilon^i(t, h) = (D_x F^i(t, \theta \phi_{t_0, x_0+h}(t) + (1 - \theta) \phi_{t_0, x_0}(t)) - D_x F^i(t, \phi_{t_0, x_0}(t))) \cdot \Delta(t, h)$$

Le théorème de dépendance par rapport aux conditions initiales assure qu'il existe $r > 0$, un intervalle J contenant t_0 et $M \geq 0$ tels que $\|\Delta(t, h)\| \leq M \|h\|$. En conséquence, étant donné que $D_x F$ est continue, on peut conclure que pour tout $\eta > 0$ il existe $r > 0$ tel que

$$\forall t \in J, \forall h \in B(0, r), \|\varepsilon(t, h)\| \leq \eta \|h\|.$$

Donc $t \mapsto \Delta(t, h)$ est une solution $\eta \|h\|$ -approchée (au sens du lemme précédent) de l'équation linéaire.

$$X' = D_x F(t, \phi_{t_0, x_0}(t)) \cdot X, \quad X(t_0) = h \quad (3.4)$$

Si l'on note $t \mapsto L(t, h)$ la solution de cette équation, on en déduit qu'il existe une constante K telle que pour tout $t \in J$ et $h \in B(0, r)$, on a

$$\|\Delta(t, h) - L(t, h)\| \leq K\varepsilon\|h\|.$$

Enfin, l'équation (3.4) étant linéaire, l'application $h \mapsto L(\cdot, h)$ est également linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathcal{C}(J, \mathbb{R}^n)$, et on peut vérifier qu'elle est continue à l'aide de l'équation. En conséquence, le flot est bien différentiable en (t, t_0, x_0) par rapport à x , pour $t \in J$ et sa différentielle vérifie l'équation (L) . $\square$

Remarque 2.2.12 *Plus généralement, si F est C^k sur son domaine de définition alors le flot est également C^k par rapport aux trois variables.*

2.2.4 Exemples d'équations différentielles non linéaires

2.2.5 Equations différentielles du type $x' \partial_x f + \partial_t f = 0$

Soit f une fonction C^1 de deux variables définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On s'intéresse à la résolution de l'équation différentielle généralisée

$$x' \partial_x f(t, x) + \partial_t f(t, x) = 0. \quad (E)$$

Elle se ramène bien sûr à une équation différentielle ordinaire au voisinage de tout point (t_0, x_0) tel que $\partial_x f(t_0, x_0) \neq 0$ (il suffit de diviser par $\partial_x f(t, x) \dots$).

Le résultat suivant montre que la résolution de (E) se ramène à celle d'une équation implicite.

Proposition 2.2.13 *Soit φ une fonction de classe C^1 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que $I \times \varphi(I) \subset U$. Alors φ est solution de (E) si et seulement si il existe un réel C tel que*

$$\forall t \in I, f(t, \varphi(t)) = C. \quad (3.5)$$

Démonstration : Si φ vérifie (3.5) alors, en dérivant puis en appliquant le théorème de composition, on constate que φ vérifie bien (E) .

Réciproquement, si φ vérifie (E) alors, pour tout $t \in I$, on a

$$\frac{d}{dt} (f(t, \varphi(t))) = \partial_t f(t, \varphi(t)) + \varphi'(t) \partial_x f(t, \varphi(t)) = 0,$$

donc en intégrant, on trouve (3.5) pour une constante C adéquate. $\square$

2.2.5.1 Exemple typique 1 : Équations à variables séparées.

Elles sont du type

$$x' b(x) + a(t) = 0 \quad (S)$$

avec a et b fonctions continues sur des intervalles I et J de $\mathbb{R}$.

Si l'on fixe A une primitive de a et B une primitive de b , il est clair que l'équation considérée est du type (E) avec $f(t, x) = A(t) + B(x)$ et $\Omega = I \times J$. Les solutions φ sont donc définies implicitement par

$$A(t) + B(\varphi(t)) = C$$

avec C constante arbitraire.

Plus généralement, certaines équations différentielles du type

$$x'Q(t, x) + P(t, x) = 0 \quad (E)$$

peuvent se ramener à des équations du type (E) pourvu que l'on puisse trouver un facteur intégrant c'est-à-dire une fonction λ définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ tel qu'il existe une fonction f de classe C^1 définie sur le même ouvert et telle que

$$\partial_t f = \lambda P \quad \text{et} \quad \partial_x f = \lambda Q.$$

En effet, en multipliant $(\tilde{E})$ par λ , on obtiendra encore une équation du type (E) . Remarquons que si P et Q ne s'annulent pas alors λ et f sont liés par la relation

$$\lambda = \frac{\partial_t f}{P} = \frac{\partial_x f}{Q}.$$

Remarque 2.2.14 Les équations $(\tilde{E})$ peuvent se réinterpréter en termes de formes différentielles : si l'on pose

$$\alpha = P(t, x)dt + Q(t, x)dx$$

alors résoudre (E) revient à trouver une fonction ϕ de classe C^1 sur un intervalle de $\mathbb{R}$ telle que $\phi^* \alpha = 0$.

Exemple 1. Soit l'équation à variables séparées $xdx + ydy = 0$. Son intégrale générale est $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1$.

Le premier membre n'étant pas négatif, il en est de même du second. Désignons $2C_1$ par C^2 , on aura

$$x^2 + y^2 = C^2.$$

C'est l'équation d'une famille de cercles concentriques centrés à l'origine des coordonnées et de rayon C .

Exemple 2. Soit l'équation

$$(1+x)ydx + (1-y)xdy = 0$$

Séparons les variables :

$$\begin{aligned} \frac{1+x}{x}dx + \frac{1-y}{y}dy &= 0 \\ \left(\frac{1}{x} + 1\right)dx + \left(\frac{1}{y} - 1\right)dy &= 0. \end{aligned}$$

On obtient en intégrant

$$\log|x| + x + \log|y| - y = C \quad \text{ou} \quad \log|xy| + x - y = C.$$

qui est l'intégrale générale de l'équation proposée.

2.2.5.2 Exemple typique 2 : Équations homogènes.

Elles sont du type

$$x' = f(x/t) \quad (\text{H})$$

avec f fonction numérique continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Pour les résoudre sur $] -\infty, 0[$ ou sur $]0, +\infty[$, on pose $x = ty$ et on obtient

$$ty' + y = f(y)$$

Cette équation a pour solutions particulières les fonctions constantes égales à y_0 avec y_0 tel que $f(y_0) = y_0$. Le théorème de Cauchy Lipschitz assure que si y est une solution prenant une fois la valeur y_0 alors cette fonction sera constante.

Limitons-nous désormais aux fonctions qui ne prennent jamais de telles valeurs. Alors on peut écrire

$$\frac{y'}{f(y) - y} = \frac{1}{t}.$$

Il s'agit d'une équation à variables séparées.

Exemple. L'équation $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 - y^2}$ est homogène et a pour solution générale

$$-\frac{x^2}{2y^2} = \log |Cy|$$

qui peut être exprimée sous la forme

$$x = y\sqrt{-2\log |Cy|}.$$

2.2.5.3 Équations aux différentielles totales. Facteur intégrant

a) Équation aux différentielles totales L'équation

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (2.1)$$

est appelée équation aux différentielles totales si $M(x, y)$ et $N(x, y)$ sont des fonctions continues dérivables telles que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (2.2)$$

les dérivées partielles $\frac{\partial M}{\partial y}$ et $\frac{\partial N}{\partial x}$ étant continues dans un certain domaine.

Intégration des équations aux différentielles totales. Montrons que si le premier membre de l'équation 2.1 est une différentielle totale, la condition 2.2 est observée, et inversement, si la condition 2.2 est observée, le premier membre de l'équation 2.1 est la différentielle totale d'une certaine fonction $u(x, y)$, c.-à-d. que l'équation 2.1 est de la forme

$$du(x, y) = 0 \quad (2.3)$$

dont l'intégrale générale est $u(x, y) = C$.

Supposons d'abord que le premier membre de l'équation 2.1 soit la différentielle totale d'une certaine fonction $u(x, y)$, c.-à-d.

$M(x, y)dx + N(x, y)dy = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy;$
alors

$$M = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad N = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Dérivant la première relation par rapport à y et la seconde par rapport à x , on obtient

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \quad (2.4)$$

Supposant que les dérivées secondes sont continues, on a $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ c.-à-d. que l'égalité 2.2 est une condition nécessaire pour que le premier membre de l'équation 2.1 soit la différentielle totale d'une certaine fonction $u(x, y)$. Montrons que cette condition est aussi suffisante, c.-à-d. que si les égalités 2.2 ont lieu, le premier membre de l'équation 2.1 est la différentielle totale d'une certaine fonction $u(x, y)$.

De la relation

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$$

on déduit

$$u = \int_{x_0}^x M(x, y)dx + \varphi(y), \quad (*)$$

où x_0 est l'abscisse d'un point arbitraire dans le domaine d'existence de la solution.

Intégrant par rapport à x , nous supposons y constant, et, par conséquent, la constante d'intégration est remplacée ici par une fonction arbitraire de y .

Choisissons la fonction $\varphi(y)$ de telle sorte que soit observée la seconde relation 2.4. A cet effet, dérivons (*) les deux membres de la dernière égalité par rapport à y et égalons le résultat à $N(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial M}{\partial y} dx + \varphi'(y) = N(x, y).$$

Mais comme $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, on peut écrire : L'intégrale $\int_{x_0}^x M(x, y)dx$ dépend de y . Pour trouver la dérivée de cette intégrale par rapport à y , il faut dériver par rapport à y la fonction sous le signe somme $\frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x M(x, y)dx = \int_{x_0}^x \frac{\partial M}{\partial y} dx$. Ceci résulte du théorème de Leibniz sur la dérivation d'une intégrale définie par rapport à un paramètre.

$$\int_{x_0}^x \frac{\partial N}{\partial x} dx + \varphi'(y) = N, \text{ c.-à-d. } N(x, y)|_{x_0}^x + \varphi'(y) = N(x, y)$$

ou

$$N(x, y) - N(x_0, y) + \varphi'(y) = N(x, y).$$

Par conséquent,

$$\varphi'(y) = N(x_0, y) \quad \text{ou} \quad \varphi(y) = \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy + C_1$$

Par conséquent, la fonction $u(x, y)$ sera de la forme

$$u = \int_{x_0}^x M(x, y)dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy + C.$$

$P(x_o, y_o)$ représente ici un point au voisinage duquel existe la solution de l'équation différentielle 2.1.

Egalant cette expression à une constante arbitraire C , on obtient l'intégrale générale de l'équation 2.1

$$\int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy = C.$$

Exemp 1. Soit l'équation

$$\frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0.$$

Assurons-nous que c'est une différentielle totale. Désignons

$$M = \frac{2x}{y^3}; \quad N = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$$

alors

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{6x}{y^4}; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{6x}{y^4}.$$

La condition 2.2 est observée pour $y \neq 0$. Le premier membre de l'équation donnée est donc la différentielle totale d'une certaine fonction $u(x, y)$. Trouvons cette fonction.

Comme $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y}$ on a

$$u = \int \frac{2x}{y^3} dx + \varphi(y) = \frac{x^2}{y^3} + \varphi(y)$$

où $\varphi(y)$ est une fonction de y qu'il faut déterminer.

Dérivons cette relation par rapport à y et prenons en considération que

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$$

On trouve

$$-\frac{3x^2}{y^4} + \varphi'(y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$$

par conséquent,

$$\varphi'(y) = \frac{1}{y^2}; \quad \varphi(y) = -\frac{1}{y} + C_1 \quad u(x, y) = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} + C_1$$

Par conséquent, l'intégrale générale de l'équation proposée est $\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C$.

b) Facteur intégrant Supposons que le premier membre de l'équation

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{2. 1}$$

ne soit pas une différentielle totale. Il est parfois possible de choisir une fonction $\mu(x, y)$ telle que si l'on multiplie le premier membre de l'équation proposée par cette fonction, ce premier membre devient une différentielle totale. La solution générale de l'équation ainsi obtenue coïncide avec la solution générale de l'équation proposée; la fonction $\mu(x, y)$

est dite un facteur intégrant de l'équation 2.1. Pour trouver un facteur intégrant μ , on procède comme suit multiplions les deux membres de l'équation donnée par le facteur intégrant, encore inconnu μ ,

$$\mu M dx + \mu N dy = 0.$$

Pour que cette dernière équation soit une équation aux différentielles totales, il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

c.-à-d.

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial \mu}{\partial x} \text{ ou encore } M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right).$$

On obtient en faisant le quotient des deux membres de cette dernière équation par μ ,

$$M \frac{\partial \log \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \log \mu}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}. \quad (2.5)$$

Il est évident que toute fonction $\mu(x, y)$ satisfaisant à cette dernière équation est un facteur intégrant de l'équation 2.1. L'équation 2.5 est une équation aux dérivées partielles de fonction inconnue μ dépendant de deux variables x et y . On démontre que, dans des conditions déterminées, elle possède une infinité de solutions et il en résulte que l'équation 2.1 a un facteur intégrant. Mais dans le cas général, il est plus difficile de déterminer $\mu(x, y)$ dans 2.5 que d'intégrer l'équation proposée 2.1. C'est seulement dans des cas particuliers que l'on arrive à déterminer la fonction $\mu(x, y)$.

Supposons, par exemple, que l'équation 2.1 admette un facteur intégrant dépendant seulement de y . Alors $\frac{\partial \log \mu}{\partial x} = 0$ et on obtient pour μ une équation différentielle ordinaire

$$\frac{d \log \mu}{dy} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$$

d'où l'on détermine (par une quadrature) $\log \mu$ et donc μ . Il est évident que l'on ne peut procéder ainsi que si l'expression $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$ ne dépend pas de x .

D'une manière analogue, si l'expression $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$ ne dépend pas de y mais dépend seulement de x , on trouve facilement le facteur intégrant qui dépend seulement de x .

Exemple 2. Résoudre l'équation

$$(y + xy^2) dx - x dy = 0$$

Solution. Posons $M = y + xy^2$; $N = -x$;

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 + 2xy; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -1; \quad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

Il en résulte que le premier membre de l'équation n'est pas une différentielle totale. Voyons si cette équation admet un facteur intégrant dépendant seulement de y . Remarquons que

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{-1 - 1 - 2xy}{y + xy^2} = -\frac{2}{y}$$

on conclut qu'il en est bien ainsi. Trouvons-le. On a : $\frac{d \log \mu}{dy} = -\frac{2}{y}$ d'où $\log \mu = -2 \log y$, soit $\mu = \frac{1}{y^2}$.

On obtient, après multiplication de tous les termes de l'équation proposée par le facteur intégrant μ , l'équation

$$\left(\frac{1}{y} + x\right) dx - \frac{x}{y^2} dy = 0.$$

aux différentielles totales $\left(\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}\right)$. Résolvant cette équation, on trouve son intégrale générale :

$$\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + C = 0 \quad \text{ou} \quad y = -\frac{2x}{x^2 + 2C}.$$

D'autres exemples et détails peuvent être trouvés dans [9].

2.2.6 Équation de Bernoulli

Ce sont des EDO du type

$$x' = a(t)x + b(t)x^\alpha \tag{B}$$

avec a et b fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et $\alpha \in \mathbb{R}$.

On sait déjà traiter les cas $\alpha \in \{0, 1\}$ car (B) est alors une équation différentielle scalaire linéaire d'ordre 1. Si $\alpha \notin \{0, 1\}$ et si l'on se restreint aux solutions strictement positives de (B) alors on se ramène à la résolution d'une EDO linéaire en posant $y = x^{1-\alpha}$. En effet, on constate alors que x vérifie (B) si et seulement si y vérifie

$$y' = (1 - \alpha)a(t)y + (1 - \alpha)b(t).$$

Dans le cas où $\alpha \in \mathbb{N}$, l'équation de Bernoulli garde un sens pour les solutions non strictement positives, et la partie unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz assure que les solutions non identiquement nulles ne s'annulent jamais. On peut donc appliquer la méthode précédente pour trouver toutes les solutions non nulles. Cela s'applique également (sans condition de signe) si α est un entier négatif.

Exemples : Intégrer les EDO de Bernoulli suivantes :

1. $y' + ty = t^3 y^3$ Rép. $y = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1 + Ce^{x^2}}}$.
2. $(1 - t^2)y' - ty - ay^2 = 0$, Rép. $(c\sqrt{1 - t^2} - a^2)y = 1$.
3. $3y^2 y' - ay^3 - t - 1 = 0$ Rép. $a^2 y^3 = Ce^{at} - a(t + 1) - 1$.
4. $\dot{x} + \frac{2}{t}x = \frac{e^t}{t^3\sqrt{x}}$ Rép. $x(t) = \left(\frac{c}{t^3} + \frac{3e^t}{2t^3}\right)^{\frac{2}{3}}$.

2.2.7 Équation de Ricatti

Il s'agit d'EDO du type

$$x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t) \tag{R}$$

avec a, b et c fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Supposons que l'on connaisse déjà une solution φ_0 de (R). On cherche alors la solution générale x de (R) en posant $x = \varphi_0 + y$. Un calcul immédiat montre que x est solution de (R) si et seulement si

$$y' = (2a(t)\varphi_0(t) + b(t))y + a(t)y^2.$$

Il s'agit d'une équation de type Bernoulli avec $\alpha = 2$. Clairement, la fonction nulle est solution (on le savait déjà puisque φ_0 est solution de (R) par hypothèse). Les autres solutions ne s'annulent jamais. On peut donc les chercher sous la forme $y = 1/z$ avec z vérifiant

$$z' = -(2a(t)\varphi_0(t) + b(t))z - a(t).$$

Exemple 1 : Résoudre $\dot{x} + \frac{1}{t}x = \frac{x^2}{t^3} + 2t$ sachant qu'une solution particulière est donnée par $x_p(t) = t^2$.

Autres exemples à faire en TPE : Equations de Lagrange et de Clairaut. Voir par exemple [9] pages 52-56.

2.2.8 Exemples d'équations non linéaires d'ordre supérieur

Considérons une équation différentielle scalaire "générale" d'ordre n :

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}). \quad (E)$$

Il est clair que plus n est grand, plus la résolution est difficile. On donne ci-dessous quelques exemples de situations où l'on peut transformer (E) en une équation différentielle d'ordre $n - 1$ moyennant un changement d'inconnue astucieux.

Intégration "à vue"

On parle d'intégration à vue lorsqu'il existe une fonction g telle que pour toute fonction x n fois dérivable, on ait

$$x^{(n)} - f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) = \frac{d}{dt}g(t, x, \dots, x^{(n-1)}).$$

En intégrant, on voit que les solutions de (E) vérifient l'équation implicite d'ordre $n - 1$

$$g(t, x, \dots, x^{(n-1)}) = C$$

avec C constante arbitraire.

Le théorème des fonctions implicites permet de récrire cette équation sous la forme

$$x^{(n-1)} = h(t, x, x', \dots, x^{(n-2)})$$

au voisinage de tout point où la dérivée partielle de g par rapport à la dernière variable ne s'annule pas. Sous cette condition, on a donc transformé la résolution de (E) en la résolution d'une famille d'EDO d'ordre $n - 1$.

Remarque 2.2.15 Comme vu précédemment, nombreuses EDO peuvent s'intégrer à vue après multiplication par un facteur intégrant adéquat.

Exemple. Équation de Newton.

$$y'' = f(y) \text{ avec } f \text{ fonction continue.}$$

Cette équation ne s'intègre pas à vue, mais y' est clairement un facteur intégrant. En effet, en multipliant l'équation par y' puis en intégrant à vue, on constate qu, au voisinage d'un point où y' ne s'annule pas, y est solution de l'équation de Newton si et seulement si il existe une primitive F de f telle que

$$(y')^2 = 2F(y)$$

Sous certaines hypothèses (qui dépendent de F), on peut alors prendre la racine carrée et résoudre l'EDO localement.

Équations différentielles homogènes de degré 1 par rapport à $x, \dots, x^{(n-1)}$.

On suppose que pour tout $\lambda > 0$, on a

$$f(t, \lambda x_0, \dots, \lambda x_{n-1}) = \lambda f(t, x_0, \dots, x_{n-1})$$

Formellement, l'EDO s'écrit donc

$$\frac{x^{(n)}}{x} = f\left(t, 1, \frac{x'}{x}, \dots, \frac{x^{(n-1)}}{x}\right)$$

Par récurrence, on vérifie que $x^{(k)}/x$ peut s'exprimer à l'aide des dérivées d'ordre 0 à $k-1$ de x'/x . Cela suggère de poser $y = x'/x$ afin de se ramener à une équation du type

$$y^{(n-1)} = g(t, y, \dots, y^{(n-2)})$$

Pour revenir à x , il ne reste plus qu'à résoudre l'équation différentielle linéaire $x' = xy$. Exemple. Par ce changement d'inconnue, l'EDO $xx'' + 2x'^2 = 0$ se transforme en $y' + 3y^2 = 0$ qui s'intègre à vue.

Variables manquantes.

Si f ne dépend pas de x , on peut interpréter (E) comme une équation différentielle d'ordre $n-1$ par rapport à x' .

Si f ne dépend pas de t , c'est un peu plus compliqué, mais on peut aussi se ramener à une EDO d'ordre $n-1$. On considère dans un premier temps x' comme une fonction de la variable x . On pose donc $z(x(t)) = x'(t)$. Ce changement de variable est valable localement si x' ne s'annule pas près du point considéré. On peut alors écrire

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dz}{dx} \frac{dx}{dt} = z \frac{dz}{dx}, \quad \frac{d^3x}{dt^3} = z \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 + z^2 \frac{d^2z}{dx^2}, \quad \text{etc}$$

et l'on trouve que z vérifie bien une EDO d'ordre $n-1$. Pour revenir à x , il faut alors résoudre

$$x'(t) = z(x(t)).$$

Cela s'intègre à vue si l'on introduit une primitive de la fonction $1/z$.

Exemple. Par ce nouveau changement d'inconnue, l'EDO $xx'' + 2x'^2 = 0$ se transforme en l'EDO linéaire $xz' + 2z = 0$.

2.3 Exercices

Exercice 1. Étudier le système plan $x' = y$, $y' = -\sin x$. Montrer qu'il s'agit d'un système conservatif et décrire les trajectoires dans le plan de phase.

Exercice 2. Considérer le système $x' = y - x(x^2 + y^2)$, $y' = -x - y(x^2 + y^2)$. Montrer que l'origine est un centre et que les trajectoires sont des cercles asymptotiques. Justifier.

Exercice 3. Étudier l'existence et la stabilité d'un cycle limite pour le système de Van der Pol :

$$x'' - \mu(1 - x^2)x' + x = 0, \quad \mu > 0.$$

Réécrire sous forme de système d'EDO et utilisez les outils qualitatifs pour analyser.

Exercice 4. Soit $x'(t) = x(t)^p$, avec $p > 1$, $x(0) = x_0 > 0$. Montrer que la solution explose en temps fini et calculer le temps d'explosion en fonction de x_0 et p .

Exercice 5. Soit $x'(t) = \sqrt{|x(t)|}$, $x(0) = 0$. Montrer que la solution n'est pas unique. Donner au moins deux solutions maximales et discutez de l'unicité en fonction de la régularité du champ.

Exercice 6. Étudier le comportement des solutions de $x'' + x + \epsilon x^3 = 0$, avec $\epsilon \in \mathbb{R}$ petit. Utiliser la méthode de perturbation ou l'énergie.

Exercice 7. Soit l'équation de Riccati : $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$ où $a, b, c \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

- (a) Montrer que si l'on connaît une solution particulière y_1 , alors la substitution $y = y_1 + \frac{1}{v}$ transforme l'équation en une équation linéaire.
- (b) Résoudre explicitement $y' = y^2 - xy - 1$ avec $y_1(x) = x$.

Exercice 8. Considérons $y' + p(x)y = q(x)y^n$ ($n \neq 0, 1$).

- (a) Démontrer que la substitution $v = y^{1-n}$ réduit l'équation à une forme linéaire.
- (b) Appliquer cette méthode pour résoudre $xy' + y = x^4y^3$.

Exercice 9. Soit le système :

$$\begin{cases} x'(t) = ax - bxy \\ y'(t) = -cy + dxy \end{cases}$$

où $a, b, c, d > 0$.

- (a) Trouver les points d'équilibre et étudier leur stabilité.
- (b) Montrer qu'il existe une intégrale première $V(x, y) = dx + by - c \ln x - a \ln y$.

Exercice 10. Soit $y' = f(y)$ avec $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

- (a) Démontrer que les solutions non constantes sont strictement monotones.
- (b) En déduire le comportement asymptotique des solutions de $y' = y^2 - y^4$.

Exercice 11. Considérons $y = xy' + f(y')$.

- (a) Montrer que la solution générale est une famille de droites $y = Cx + f(C)$.
- (b) Démontrer qu'il existe une solution singulière enveloppe de cette famille.
- (c) Appliquer à $y = xy' + \sqrt{1 + y'^2}$.

Exercice 12. Soit $xy' = y(1 + \ln y - \ln x)$ avec $y(1) = e$.

- (a) Effectuer le changement $y = xv(x)$ et résoudre l'EDO résultante.
- (b) Étudier l'unicité de la solution au voisinage de $x = 0$.

Exercice 13. Soit $y' = y^3 + p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$.

- (a) Pour $p = q = r = 0$, résoudre explicitement et étudier le comportement en $\pm\infty$.
- (b) Dans le cas $p(x) = 1$, $q(x) = x$, $r(x) = 0$, montrer qu'une substitution appropriée conduit à une équation d'Airy.

Exercice 14. Soit le système $x' = -x + xy$, $y' = -y - x^2$.

- (a) Linéariser autour de $(0, 0)$ et étudier la stabilité du point critique.
- (b) Construire une fonction de Lyapunov et conclure sur la stabilité asymptotique.

Exercice 15. Considérons $y'' + \frac{2}{x}y' + y^n = 0$ pour $n > 0$.

- (a) Effectuer le changement $y(x) = v(t)/x$ avec $t = \ln x$ pour obtenir $v'' + v' + v^n = 0$.
- (b) Pour $n = 5$, trouver une solution explicite non triviale.

Exercice 16. Soient y_1, y_2 solutions de $y_1'' + f_1(x, y_1) = 0$ et $y_2'' + f_2(x, y_2) = 0$ avec $f_1(x, y) \geq f_2(x, y)$.

- (a) Établir que si $y_1(0) = y_2(0)$ et $y_1'(0) = y_2'(0)$, alors $y_1(x) \leq y_2(x)$ pour $x \geq 0$.
- (b) Appliquer au cas $f_1(x, y) = e^y$ et $f_2(x, y) = y^2$.

Exercice 17. Considérons $y'' + f(y)y' + g(y) = 0$ où $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

- (a) Transformer en système du premier ordre et étudier les conditions pour l'existence de cycles limites.
- (b) Appliquer au cas $f(y) = y^2 - 1$ et $g(y) = y$ (van der Pol).

Equations différentielles autonomes

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux propriétés qualitatives des équations différentielles autonomes c'est-à-dire du type

$$X' = F(X) \quad (S)$$

où F est une fonction Lipschitzienne (ou au moins localement lipschitzienne) sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Rappelons que considérer ce type d'équations différentielles n'est pas vraiment restrictif dans la mesure où tout système différentiel non autonome d'ordre n peut être vu comme un système différentiel autonome d'ordre $n + 1$.

Rappelons également que le théorème de Cauchy-Lipschitz assure que le problème de Cauchy associé à (S) admet toujours une unique solution maximale. Dans la suite on supposera toujours que F est C^1 .

3.1 Champs de vecteurs

L'étude des équations différentielles autonomes est étroitement liée à celle des champs de vecteurs que nous définissons maintenant.

Définition 3.1.1 *On appelle champ de vecteurs sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ toute fonction C^1 de Ω dans $\mathbb{R}^n$. On dit que le champ de vecteurs est complet si toutes les solutions maximales du système (S) associé sont globales (c'est-à-dire définies sur $\mathbb{R}$ entier).*

Remarque 3.1.2 *Dans le cas d'une équation différentielle scalaire d'ordre n du type*

$$x^{(n)} = f(x, x', \dots, x^{(n-1)})$$

on dira que le champ de vecteurs associé est $(x', x'', \dots, f(x, x', \dots, x^{(n-1)}))$.

Remarquons que dans le cas d'une équation différentielle autonome, l'ensemble des solutions est invariant par translation temporelle, c'est-à-dire que ϕ est la solution maximale de (S) définie sur I et telle que $\phi(t_0) = x_0$ si et seulement si la fonction ψ définie sur $I - t_0$ par

$$\psi(t) = \phi(t + t_0)$$

est la solution maximale de (S) telle que $\psi(0) = x_0$. C'est une conséquence immédiate de la propriété d'unicité des solutions donnée par le théorème de Cauchy-Lipschitz.

De ce fait, on se limitera dans ce qui suit à l'étude du problème de Cauchy en $t_0 = 0$. Cela motive la définition suivante de flot d'un champ de vecteurs :

Définition 3.1.3 *Si F est un champ de vecteurs sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, on appelle flot associé à F l'application ϕ qui à tout $x \in \Omega$ associe la solution maximale ϕ_x de (S) telle que $\phi_x(0) = x$.*

Suivant que l'on s'intéresse à la solution issue de x ou à sa dépendance par rapport à x à l'instant t , on utilisera les notations $\phi_t(x) = \phi(t, x) = \phi_x(t)$.

Définition 3.1.4 *Les sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ de la forme $\{\phi(t); t \in I\}$ où ϕ est une solution maximale de (S) définie sur I sont appelées courbes intégrales du champ de vecteurs F .*

Remarque. Deux courbes intégrales passant par le même point coïncident. En effet, elles correspondent à deux solutions maximales ϕ et ψ de (S) définies sur des intervalles ouverts I et J et telles qu'il existe $t_0 \in I$ et $t_1 \in J$ vérifiant $\psi(t_1) = \phi(t_0)$. En conséquence, si l'on note $T = t_1 - t_0$, on constate que la fonction $\theta : t \mapsto \psi(t + T)$ vérifie (S) et $\theta(t_0) = \psi(t_1) = \phi(t_0)$. Donc $\theta = \phi$ sur $I \cap (J - T)$. Comme ϕ est maximale, on doit de plus avoir $J - T \subset I$. En échangeant les rôles de ϕ et de ψ , on démontre l'inclusion réciproque. On peut donc conclure que

$$I = J - T \quad \text{et} \quad \psi(\cdot + T) = \phi \quad \text{sur} \quad I$$

Cette remarque permet de donner la définition suivante :

Définition 3.1.5 *Pour $x_0 \in \Omega$, la courbe intégrale passant par x_0 est appelée orbite de x_0 pour le champ de vecteurs F (ou courbe intégrale issue de x_0).*

La remarque ci-dessus montre que deux orbites ayant un point commun coïncident. Par ailleurs, le théorème de Cauchy-Lipschitz assure que pour tout point x_0 de Ω , il existe une orbite de F passant par x_0 . En conséquence l'ensemble des orbites correspondant à un champ de vecteurs donné constitue une partition de l'ouvert où est défini notre champ de vecteurs F . Cette partition est appelée *portrait de phase*.

A titre d'exemple la figure 3.1 montre le portrait de phase du système

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \alpha x_1 \left(b \frac{x_2}{k+x_2} - \gamma \right) \\ \frac{dx_2}{dt} = \alpha \left(\lambda - d \frac{x_1 x_2}{k+x_2} \right). \end{cases} \quad (3.1)$$

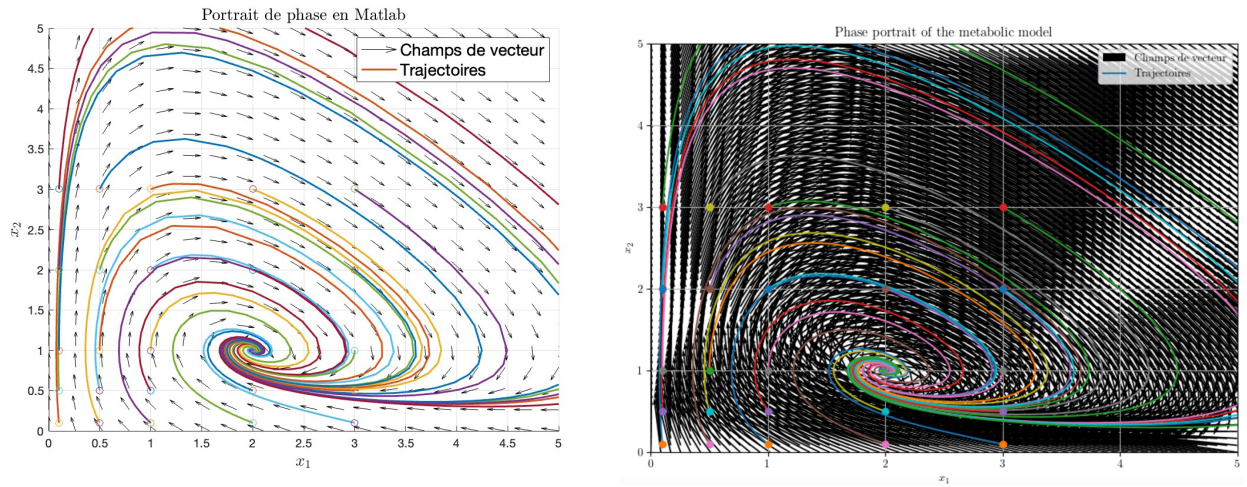


FIGURE 3.1 – Portrait de phase du système 3.1. A gauche le portrait de phase fait en Matlab et à droite celui fait en Python. Les valeurs des paramètres sont $\alpha = 1; b = 2; \gamma, \lambda = d = k = 1$.

Lorsque l'on ne sait pas résoudre explicitement l'équation différentielle considérée, il est souvent quand même possible d'obtenir des informations très précises sur les orbites (et donc sur les solutions). Dans la définition ci-dessous, nous décrivons quatre types d'orbites particulières que l'on rencontre fréquemment.

Définition 3.1.6 Soit F un champ de vecteurs sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, x_0 un point de Ω et $(\phi_t(x_0))_{t \in \mathbb{R}}$ une orbite passant par x_0 et définie pour tout $t \in \mathbb{R}$.

- On dit que le point x_0 est stationnaire/fixe/critique ou encore est un point d'équilibre de F si la fonction $t \mapsto \phi_t(x_0)$ est constante.
- On dit que l'orbite $(\phi_t(x_0))_{t \in \mathbb{R}}$ est un cycle si la fonction $t \mapsto \phi_t(x_0)$ est périodique.
- On dit que l'orbite $(\phi_t(x_0))_{t \in \mathbb{R}}$ est hétérocline si elle relie deux points fixes x_- et x_+ distincts, c'est-à-dire

$$F(x_-) = F(x_+) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(x_0) = x_- \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x_0) = x_+;$$

- Si $x_- = x_+$, on dit que l'orbite est homocline.

Exemples. (i) Pour l'équation $x'' + x = 0$, tout point (x_0, x'_0) est un cycle. Si $(x_0, x'_0) = (0, 0)$ ce cycle est réduit à un point. C'est donc un point stationnaire.

(ii) Considérons l'équation de Bernoulli :

$$x' = x^2 - x \tag{B}$$

Les points fixes correspondants sont 0 et 1. La fonction nulle est clairement solution et l'argument habituel montre que les autres solutions ne s'annulent jamais. Pour les trouver, on peut donc poser $y = 1/x$. On obtient alors $y' = y - 1$ qui se résout explicitement. En revenant à x , on en déduit que les solutions non nulles de (B) sont du type

$$x(t) = \frac{1}{1 + ae^t} \quad \text{avec} \quad a \neq -1$$

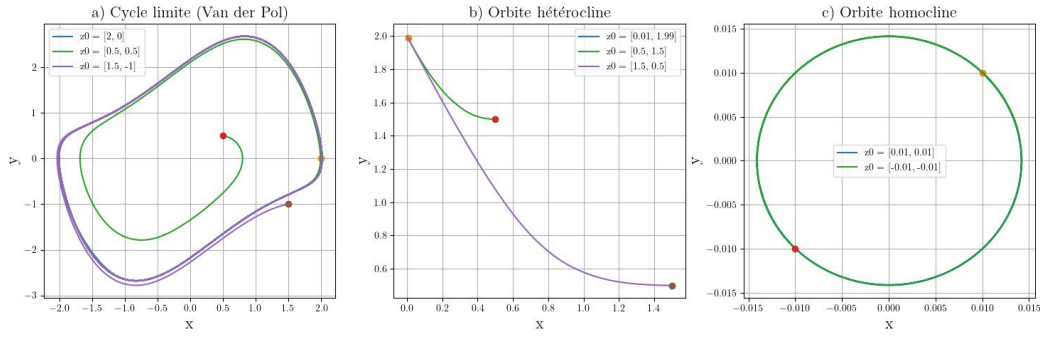


FIGURE 3.2 – De gauche vers la droite : a) Cycle limite (Van der Pol) pour $\mu = 1$. Le système possède un attracteur limite stable (orbite fermée). b) Hétérocline : Trajectoire connectant deux points selles différents. c) Homocline : Trajectoire partant et revenant au même point selle. Image réalisée en Python.

En prenant $a = 1$, on constate que l'orbite passant par $1/2$ est hétérocline (puisqu'elle relie les valeurs 1 en $-\infty$ à la valeur 0 en $+\infty$. C'est la seule orbite hétérocline pour cette équation (pourquoi?)

(iii) De façon générale, une équation différentielle scalaire d'ordre 1 n'admet jamais d'orbite homocline non stationnaire (exo : pourquoi?)

(iv) Considérons finalement l'équation non linéaire d'ordre deux suivante :

$$x'' = x - 2x^3$$

Il est clair que le champ de vecteurs correspondant $F(x, x') = (x', x - 2x^3)$ a trois points critiques, à savoir $(0, 0)$, $(-\sqrt{2}/2, 0)$ et $(\sqrt{2}/2, 0)$. Un calcul facile montre que la fonction $t \mapsto 1/\cosh t$ correspond à une orbite homocline pour le point critique $(0, 0)$.

(v) La figure 3.2 montre les orbites de systèmes suivants :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \mu(1 - x^2)y - x. \end{cases} \quad (3.2a)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - x - y) \\ \dot{y} = y(2 - x - y) \end{cases} \quad (3.2b)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + x^2 \end{cases} \quad (3.2c)$$

Proposition 3.1.7 Soit F un champ de vecteurs sur Ω . Le point x_0 de Ω est critique si et seulement si $F(x_0) = 0$.

Démonstration : Le sens direct est trivial, et la réciproque résulte de la partie unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz. $\square$

Le critère suivant permet de déterminer les solutions périodiques et donc les cycles.

Proposition 3.1.8 Soit F un champ de vecteurs (pas nécessairement complet) sur Ω et ϕ une solution maximale de (S) . Alors ϕ est périodique si et seulement si il existe deux temps distincts t_1 et t_2 tels que $\phi(t_1) = \phi(t_2)$.

Démonstration : La partie directe est triviale. Réciproquement, notons I l'intervalle de définition de ϕ et supposons qu'il existe deux temps t_1 et t_2 avec $t_1 < t_2$ tels que $\phi(t_1) = \phi(t_2)$. Soit $T = t_2 - t_1$. On constate que la fonction ψ définie sur $I - T$ par

$$\psi(t) = \phi(t + T)$$

est solution de (S) et égale à ϕ pour $t = t_1$. En conséquence, elle coïncide avec ϕ sur $I \cap I - T$. Comme ϕ est une solution maximale, on en déduit que $I - T \subset I$ (et donc la borne inférieure de I est $-\infty$). Un raisonnement analogue avec la fonction $t \mapsto \phi(t - T)$ permet d'établir que $\sup I = +\infty$. En conséquence $I = \mathbb{R}$ et $\phi = \psi$ sur $\mathbb{R}$. Autrement dit, ϕ est T -périodique. $\square$

Proposition 3.1.9 *Supposons le champ de vecteurs F complet et C^1 . Alors toute application ϕ_t est un C^1 difféomorphisme de Ω dans lui-même et vérifie les propriétés suivantes :*

- (i) $\phi_0 = \text{Id}$,
- (ii) $\phi_t \circ \phi_{-t} = \phi_{-t} \circ \phi_t = \text{Id}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$,
- (iii) $\phi_t \circ \phi_s = \phi_s \circ \phi_t = \phi_{t+s}$ pour tout $(s, t) \in \mathbb{R}^2$. Autrement dit l'ensemble $\{\phi_t, t \in \mathbb{R}\}$ est un groupe commutatif pour la composition.

Démonstration : Les égalités ci-dessus et la bijectivité de Ω dans $\phi_t(\Omega)$ résultent des propriétés du flot établies dans le cas général dans le chapitre précédent.

Ces égalités entraînent manifestement que $\phi_t(\Omega) = \Omega$. Enfin le caractère C^1 provient du résultat du chapitre précédent sur la régularité du flot. En particulier, pour tout $t \in \mathbb{R}$, les fonctions ϕ_t et ϕ_{-t} sont C^1 et bijections réciproques l'une de l'autre. Donc ϕ_t est un C^1 difféomorphisme sur Ω , de difféomorphisme réciproque ϕ_{-t} . $\square$

Le fait que les résultats ci-dessus nécessitent que le champ de vecteurs soit complet peut paraître un peu restrictif. En fait, si l'on s'intéresse au flot en tant qu'objet géométrique c'est-à-dire aux orbites ou au portrait de phase, il n'en est rien grâce à la proposition suivante qui montre que seule la direction du champ de vecteurs considéré détermine les courbes intégrales :

Proposition 3.1.10 *Soit F un champ de vecteurs C^1 sur Ω . Alors pour toute fonction λ de Ω dans $\mathbb{R}_*^+$ et de classe C^1 et tout $x_0 \in \mathbb{R}$, la courbe intégrale de λF issue de x_0 coïncide avec la courbe intégrale de F issue de x_0 .*

Preuve : Notons ϕ la solution maximale de $X' = F(X)$ telle que $\phi(0) = x_0$ et ψ la solution maximale de $X' = (\lambda F)(X)$ telle que $\psi(0) = x_0$. Soit I et J les intervalles ouverts de définition de ϕ et ψ . On a

$$\forall t \in I, \phi'(t) = F(\phi(t)) \quad \text{et} \quad \forall s \in J, \psi'(s) = \lambda(\psi(s))F(\psi(s))$$

On souhaite faire le changement de variable temporel $t = T(s)$ avec T nulle en 0 et solution de l'équation différentielle scalaire

$$T' = (\lambda \circ \phi)(T) \tag{3.3}$$

Notons $K =]s_-, s_+[$ l'intervalle de définition de la solution maximale T de cette équation différentielle. Comme λ et ϕ sont C^1 , la fonction $\lambda \circ \phi$ est C^1 sur l'intervalle de définition

de ϕ et le théorème de Cauchy-Lipschitz permet d'affirmer qu'il existe une unique solution maximale T nulle en 0 à l'équation ci-dessus. Notons que l'hypothèse $\lambda > 0$ assure que T est strictement croissante. Donc $T(K) =]T(s_-), T(s_+)[$.

On définit $\chi = \phi \circ T$ et on calcule :

$$\chi'(s) = \phi'(T(s))T'(s) = F(\phi(T(s)))\lambda(\phi(T(s))) = F(\chi(s))\lambda(\chi(s))$$

On constate que $\chi(0) = \psi(0)$ et que χ et ψ vérifient la même équation différentielle. Par unicité de la solution maximale, on peut conclure que $K \subset J$ et que $\phi \circ T = \psi$ sur K . En conséquence, on a

$$T(s) = \int_0^s \lambda(\psi(s')) ds' \quad \text{pour } s \in K$$

En particulier $T(K) \subset I$. De plus, si par exemple $T(s_+) < \sup I$ alors on peut résoudre l'équation différentielle (4.1) à partir du temps s_+ avec la valeur $T(s_+)$ et obtenir ainsi un prolongement de T . En conséquence $T(s_+) \geq \sup I$. De même $T(s_-) \leq \inf I$. Donc

$$I = T(K) \subset T(J)$$

En échangeant les rôles de ϕ et ψ , on montre également que $T(J) \subset I$. Donc les courbes intégrales issues de x_0 des champs F et λF coïncident. Passer de l'une à l'autre revient juste à "changer la vitesse de parcours". $\square$

Exercice : Établir un résultat analogue dans le cas d'une fonction λ à valeurs strictement négatives.

Corollaire 3.1.11 *Si F est un champ de vecteurs C^1 sur $\mathbb{R}^n$, il existe un champ de vecteurs complet G ayant les mêmes courbes intégrales que F .*

Démonstration : Il suffit d'appliquer le résultat précédent. avec $\lambda(x) := 1/(1 + \|F(x)\|^2)$ (où $\|\cdot\|$ est une norme euclidienne).

Le champ de vecteurs $G := \lambda F$ étant borné, les résultats du chapitre précédent assurent que toutes ses solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$. $\square$

Définition 3.1.12 *On appelle intégrale première d'un champ de vecteurs F défini sur Ω (ou de l'équation différentielle (S)) toute fonction $\mathcal{H}$ constante le long de toute courbe intégrale de F , c'est-à-dire telle que pour toute solution maximale ϕ définie sur I la fonction $t \mapsto \mathcal{H}(\phi(t))$ soit constante.*

Du théorème de composition, on déduit facilement le résultat suivant :

Proposition 3.1.13 *Une fonction $\mathcal{H}$ définie et différentiable sur Ω est une intégrale première de F si et seulement si*

$$\forall x \in \Omega, d\mathcal{H}(x) \cdot F(x) = 0.$$

Remarque 3.1.14 *L'existence d'une intégrale première facilite grandement l'étude des orbites et du portrait de phase d'un champ de vecteurs. En effet, il est clair que les orbites sont incluses dans les lignes de niveau des intégrales premières (l'inclusion pouvant être*

stricte). Plus précisément, si $\mathcal{H}$ est une intégrale première de F et ϕ une solution de (S) alors il existe une constante C telle que sur tout l'intervalle de définition I de ϕ , on ait

$$\mathcal{H}(\phi_1(t), \dots, \phi_n(t)) = C.$$

Dans les cas non dégénérés, c'est-à-dire au voisinage de tout temps t_0 tel que $\nabla \mathcal{H}(\phi(t_0)) \neq 0$, le théorème des fonctions implicites permet d'exprimer une des composantes de ϕ en fonction des autres. Cela est particulièrement intéressant si $n = 2$ car la courbe intégrale peut alors être calculée explicitement. Pour $n \geq 3$, on peut encore se ramener à cette situation si l'on dispose de $n - 1$ intégrales premières $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_{n-1}$ indépendantes en $\phi(t_0)$, c'est-à-dire telles que la famille $(\nabla \mathcal{H}_1(\phi(t_0)), \dots, \nabla \mathcal{H}_{n-1}(\phi(t_0)))$ soit libre.

La notion d'intégrale première est aussi pertinente pour les équations différentielles scalaires d'ordre n du type

$$x^{(n)} = f(x', x'', \dots, x^{(n-1)}).$$

À l'aide de l'argument habituel consistant à récrire (E) comme un système de type (S) , on voit que, dans ce cadre, une intégrale première est une fonction telle que pour toute solution ϕ de (E) , la fonction $t \mapsto \mathcal{H}(\phi(t), \phi'(t), \dots, \phi^{(n-1)}(t))$ soit constante.

Au voisinage de tout temps t_0 tel que la dérivée de la fonction $X \mapsto \mathcal{H}(X)$ en $\phi(t_0)$ par rapport à la dernière variable ne s'annule pas, le théorème des fonctions implicites permet de voir ϕ comme la solution d'une équation différentielle scalaire d'ordre $n - 1$.

Exemple 1. Équation de Newton $x'' = -g(x)$. La fonction "énergie"

$$\mathcal{H}(x, x') := \frac{1}{2}x'^2 + G(x)$$

avec G primitive de g , est une intégrale première.

D'un point de vue physique, le premier terme représente l'énergie cinétique et $G(x)$, l'énergie potentielle.

Exemple 2. Considérons l'équation du pendule pesant :

$$x'' + \sin x = 0.$$

Le champ de vecteurs associé est borné, donc toutes les solutions sont globales. De plus, d'après l'exemple précédent, $\mathcal{H}(x, x') = \frac{1}{2}x'^2 - \cos x$ est une intégrale première. En conséquence, les orbites sont incluses dans les courbes d'équation

$$\frac{1}{2}x'^2 = C + \cos x. \quad (3.4)$$

Comme le membre de gauche est positif et $\cos x \in [-1, 1]$, on voit qu'il faut se restreindre à $C \geq -1$ pour avoir des courbes de niveau non vides. Il est clair que le portrait de phase est 2π périodique en x (interprétation physique ?) Les points fixes sont $(x_0, x'_0) = (k\pi, 0)$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Les solutions sont toutes globales (voir le chapitre précédent).

- Pour $C = -1$, l'orbite correspondante est réduite au point $(x_0, x'_0) = (0, 0)$ (modulo 2π pour l'abscisse). Physiquement il s'agit de la position d'équilibre stable du pendule.

- Pour $C = 1$, les orbites correspondantes sont ou bien réduites au point $(x_0, x'_0) = (\pi, 0)$ (modulo 2π pour l'abscisse) (physiquement il s'agit de la position d'équilibre instable du pendule) ou bien des orbites hétéroclines joignant deux point fixes de ce type successifs.
- Pour $C \in]-1, 1[$, les orbites sont des cycles. En effet, x est astreint à vérifier $\cos x \geq -C > -1$ et donc reste à valeurs dans un intervalle du type $](2k-1)\pi, (2k+1)\pi[$ en vertu du théorème des valeurs intermédiaires. En particulier x est bornée. Par ailleurs, x ne saurait être monotone sur $\mathbb{R}$ ou même $\mathbb{R}^+$ car admettrait alors une limite ℓ en $+\infty$; et l'égalité (4.2) entraînerait alors $x'(t) \rightarrow 0$ puis $x''(t) \rightarrow 0$. L'équation vérifiée par x donnerait donc $\sin \ell = 0$, ce qui est incompatible avec la condition $\cos \ell \geq -C > -1$. Donc x n'est pas monotone et il existe t_0 et t_1 distincts tels que $x(t_0) = x(t_1)$. Donc x est périodique.
- Pour $C > 1$, x' ne s'annule jamais et $|x'|$ admet une borne inférieure strictement positive. En conséquence $x(t)$ va de $-\infty$ à $+\infty$ ou de $+\infty$ à $-\infty$.

3.2 Stabilité des solutions stationnaires

L'exemple du pendule montre que les points fixes/stationnaires peuvent être stables ou instables. Dans cette section on établit plusieurs critères assurant la stabilité des points stationnaires. Mais il convient avant tout de définir précisément cette notion de stabilité. Dans toute cette section, on suppose que F est un champ de vecteurs complet de classe C^1 défini sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. On a vu que supposer que F est complet n'est pas restrictif si l'on s'intéresse uniquement aux orbites et portrait de phase.

Définition 3.2.1 Soit x_0 un point critique/stationnaire de F . On dit que ce point est

- *stable* si toute solution maximale issue d'un point proche de x_0 est définie sur $\mathbb{R}^+$ et reste proche de x_0 pour tout temps positif :
il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que le flot ϕ de F soit défini sur $\mathbb{R}^+ \times B(x_0, \varepsilon_0)$ et tel que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta \in]0, \varepsilon_0]$ tel que

$$\|\phi_t(x) - x_0\| \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}^+ \quad \text{et} \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \|x - x_0\| \leq \eta;$$

- *asymptotiquement stable* si ϕ est défini sur $\mathbb{R}^+ \times B(x_0, \varepsilon_0)$ pour ε_0 assez petit et si de plus $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x) = x_0$ pour tout x dans un voisinage de x_0 .

Remarque 3.2.2 Il est clair que la stabilité asymptotique entraîne la stabilité.

Exemple. Cas des systèmes linéaires homogènes à coefficients constants :

$$X' = AX \quad \text{avec} \quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

D'après le chapitre 1, le point 0 est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres (complexes) de A sont à partie réelle strictement négative. C'est par exemple le cas pour l'équation différentielle scalaire

$$x'' + kx' + x = 0 \quad \text{avec} \quad k > 0.$$

Le point 0 est stable si et seulement si toutes les valeurs propres sont à partie réelle négative et la multiplicité des valeurs propres imaginaires pures est égale à la dimension des sous-espaces propres correspondants. C'est par exemple le cas pour l'équation

$$x'' + x = 0$$

dont toutes les solutions sont périodiques, mais aussi pour l'équation du pendule pesant avec donnée initiale proche de $(0, 0)$.

Définition 3.2.3 Soit F un champ de vecteurs C^1 défini sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, x_0 un point de Ω et V un voisinage de x_0 inclus dans Ω . On dit que $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Lyapunov pour F au voisinage de x_0 si L est décroissante le long de toute courbe intégrale de F issue d'un point de V .

Remarque 3.2.4 Un calcul immédiat montre que $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Lyapunov pour F au voisinage de x_0 si et seulement si

$$\forall x \in V, dL(x) \cdot F(x) \leq 0.$$

Exemple. Équation de Newton amortie $x'' + kx' + g(x) = 0$ avec $k > 0$.

La fonction "énergie" $L(x) = \frac{1}{2}x'^2 + G(x)$ avec G primitive de g vérifie pour toute solution ϕ ,

$$\frac{d}{dt}L(\phi(t)) = \phi'(t)\phi''(t) + \phi'(t)g(\phi(t)) = -k\phi'^2(t).$$

C'est donc une fonction de Lyapunov.

Ci-dessous on munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme euclidienne.

Théorème 3.2.5 (de Lyapunov). Soit F un champ de vecteurs C^1 défini sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, x_0 un point stationnaire de F et V un voisinage de x_0 inclus dans Ω . Soit L une fonction de Lyapunov de classe C^1 sur V et deux fois différentiable en x_0 .

1. Si on suppose de plus que

- x_0 est un minimum local de L ,
- $d^2L(x_0)$ est une forme bilinéaire définie positive, alors x_0 est un point stable.

2. Si outre les hypothèses précédentes, on suppose qu'il existe $\beta > 0$ tel que

$$\forall x \in V, dL(x) \cdot F(x) \leq -\beta (L(x) - L(x_0))$$

alors x_0 est asymptotiquement stable.

Démonstration : Pour simplifier les calculs, on suppose que $x_0 = 0$. Cela revient à considérer le champ $G : x \mapsto F(x + x_0)$ avec x proche de x_0 . On notera en effet que les courbes intégrales de F se déduisent de celles de G par translation de vecteur x_0 . Quitte à changer L en $L - L(0)$, on peut aussi supposer que $L(0) = 0$. Remarquons enfin que $dL(0) = 0$ puisque L est différentiable et admet un minimum en 0. Enfin, comme par hypothèse $d^2L(0)$ est une forme bilinéaire définie positive, la matrice associée est

diagonalisable dans une base orthonormale et toutes les valeurs propres associées sont strictement positives. En conséquence, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, d^2 L(0)(h, h) \geq 4\alpha \|h\|^2. \quad (3.5)$$

Comme L est de classe C^2 et vérifie $L(0) = 0, dL(0) = 0$ et (4.3), la formule de Taylor à l'ordre 2 entraîne qu'il existe $M > 0$ et $\eta > 0$ tels que $B(0, \eta) \subset V$ et

$$\|x\| \leq \eta \implies \alpha \|x\|^2 \leq L(x) \leq M \|x\|^2 \quad (3.6)$$

Considérons un élément x de $B(0, \eta)$ et l'ensemble I_x des temps t positifs tels que

$$\forall s \in [0, t], \|\phi_s(x)\| \leq \eta$$

L'ensemble I_x est clairement un sous-intervalle fermé non vide de $\mathbb{R}^+$. Nous allons montrer qu'il existe $\eta' > 0$ tel que si $\|x\| \leq \eta'$ alors $I_x = \mathbb{R}^+$. Pour cela, considérons $T \in I_x$. Alors, vu que $L(\phi_T(x)) \leq L(x)$ on peut écrire que

$$\alpha \|\phi_T(x)\|^2 \leq L(\phi_T(x)) \leq L(x) \leq M \|x\|^2.$$

En conséquence, si l'on choisit η' tel que

$$\sqrt{M/\alpha} \eta' < \eta$$

alors on a

$$\|\phi_T(x)\| \leq \sqrt{M/\alpha} \|x\| < \eta$$

Donc T n'est pas égal à la borne supérieure de I . Cela montre que, sous cette condition, on a $I = \mathbb{R}^+$ et

$$\forall x \in B(0, \eta'), \forall t \in \mathbb{R}^+, \|\phi_t(x)\| \leq \sqrt{M/\alpha} \|x\|$$

Autrement dit, 0 est stable.

Démontrons maintenant la deuxième partie du théorème. On sait déjà qu'il existe $\eta' > 0$ tel que $\phi_t(B(0, \eta')) \subset B(0, \eta) \subset V$ pour tout $t \geq 0$. Donc, si $x \in B(0, \eta')$, on peut écrire que

$$\frac{d}{dt} (L(\phi_t(x))) = dL(\phi_t(x)) \cdot F(\phi_t(x)) \leq -\beta L(\phi_t(x))$$

Donc, par intégration,

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, L(\phi_t(x)) \leq L(x)e^{-\beta t}$$

Mais d'après 3.6, on a

$$L(\phi_t(x)) \geq \alpha \|\phi_t(x)\|^2.$$

En conséquence, l'inégalité ci-dessus montre que $\phi_t(x)$ tend vers 0 (avec un taux de convergence exponentiel). $\square$

Exemple. Équation de Newton amortie $x'' + kx' + g(x) = 0$ avec $k > 0$.

On considère encore la fonction énergie $L(x, x') = \frac{1}{2}x'^2 + G(x)$. Le champ de vecteurs

associé à l'équation est $F(x, x') = (x', -kx' - g(x))$. On suppose que $g(0) = 0$ de telle sorte que $(0, 0)$ soit critique.

On applique le théorème précédent afin de déterminer des conditions suffisantes sur g pour que $(0, 0)$ soit stable ou asymptotiquement stable.

Pour étudier la stabilité, on calcule

$$DL(x, x') = (g(x), x') \quad \text{et} \quad D^2L(x, x') = \begin{pmatrix} g'(x) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La condition de stabilité en $(0, 0)$ donnée par le théorème de Lyapunov est donc équivalente à $g'(0) > 0$.

Pour étudier la stabilité asymptotique, on calcule

$$DL(x, x') \cdot F(x, x') = -kx^2 = -2kL(x, x') + 2kG(x).$$

La condition de stabilité asymptotique est donc vérifiée si et seulement si il existe $\alpha > 0$ tel que $G(x) \leq (1 - \alpha)L(x, x')$ pour tout (x, x') proche de $(0, 0)$. Clairement, cette condition ne peut pas être satisfaite, donc le critère de stabilité asymptotique ne s'applique pas dans ce cas (ce qui ne signifie pas que $(0, 0)$ n'est pas asymptotiquement stable, voir plus loin).

Rappelons que pour une équation linéaire à coefficients constants, 0 est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres sont à partie réelle strictement négative. Le théorème ci-dessous montre que, dans une certaine mesure, ce résultat perdure au voisinage d'un point stationnaire pour une EDO non linéaire autonome.

Théorème 3.2.6 *Soit F un champ de vecteurs C^1 défini sur un ouvert Ω contenant le point stationnaire x_0 . Supposons que toutes les valeurs propres de $DF(x_0)$ soient à partie réelle strictement négative.*

Alors le point x_0 est asymptotiquement stable. Plus précisément, pour tout réel μ strictement supérieur à toutes les parties réelles des valeurs propres de $DF(x_0)$, il existe $r > 0$ tel que pour tout $x_0 \in B(0, r)$ et solution ϕ de (S) avec donnée initiale x_0 , on ait

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\mu t} \phi(t) = 0.$$

Démonstration : Notons μ_0 la borne supérieure de toutes les parties réelles, et fixons $\mu \in]\mu_0, 0[$.

Par définition de la différentielle de F en x_0 , il existe une fonction k tendant vers 0 en 0 et telle que pour tout h assez petit, on ait

$$F(x_0 + h) = dF(x_0) \cdot h + \|h\|k(h) \quad (4.5)$$

Pour simplifier les calculs, on suppose dans la suite que $x_0 = 0$ (on a déjà vu dans la preuve précédente que ce n'était pas restrictif). On fixe $\mu > \mu_0$ puis $\tilde{\mu} \in]\mu_0, \mu[$ et on introduit la fonction auxiliaire

$$\phi_{\tilde{\mu}}(t) := e^{-t\tilde{\mu}} \phi(t)$$

où ϕ est une solution de (S) telle que $\phi(0) = x$, et x un point de Ω .

Remarquons que $\phi_{\tilde{\mu}}$ vérifie

$$\phi'_{\tilde{\mu}}(t) = e^{-t\tilde{\mu}} (\phi'(t) - \tilde{\mu}\phi(t)).$$

Donc, si l'on pose $A = DF(0)$, on obtient d'après (4.5), tant que $\phi(t)$ est suffisamment petit,

$$\phi'_{\tilde{\mu}}(t) = (A - \tilde{\mu}I_n) \phi_{\tilde{\mu}}(t) + \|\phi_{\tilde{\mu}}(t)\| k(\phi(t))$$

d'où, en vertu de la formule de Duhamel,

$$\phi_{\tilde{\mu}}(t) = e^{(A - \tilde{\mu}I_n)t} x + \int_0^t e^{(t-\tau)(A - \tilde{\mu}I_n)} \|\phi_{\tilde{\mu}}(\tau)\| k(\phi(\tau)) d\tau$$

Remarquons que les valeurs propres de la matrice $A - \tilde{\mu}I_n$ sont encore à partie réelle strictement négative. En conséquence, il existe $C > 0$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}^n, \|e^{t(A - \tilde{\mu}I_n)} y\| \leq C\|y\|$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\eta > 0$ tel que $\|y\| \leq \eta$ implique $\|k(y)\| \leq \varepsilon$. De la formule de Duhamel, on déduit donc que tant que $\|\phi(t)\| \leq \eta$, on a

$$\|\phi_{\tilde{\mu}}(t)\| \leq C\|x\| + \int_0^t C\varepsilon \|\phi_{\tilde{\mu}}(\tau)\| d\tau.$$

Le lemme de Gronwall entraîne donc que, tant que $\|\phi(t)\| \leq \eta$,

$$\|\phi_{\tilde{\mu}}(t)\| \leq C\|x\| e^{C\varepsilon t}$$

ou encore

$$\|\phi(t)\| \leq C e^{(C\varepsilon + \tilde{\mu})t} \|x\|$$

Choisissons ε assez petit pour que $(C + 1)\varepsilon + \tilde{\mu} \leq 0$ puis $\eta' = \eta/C$. Alors, pour $\|x\| < \eta'$, le raisonnement précédent donne

$$\|\phi(t)\| \leq C e^{-\varepsilon t} \|x\| < \eta$$

tant que $\|\phi(t)\| < \eta$. L'argument utilisé dans la démonstration du théorème de Lyapunov permet alors d'affirmer que ϕ est définie sur $\mathbb{R}^+$ et que l'inégalité ci-dessus est vraie pour tout temps.

Exemple. Équation de Newton amortie : $x'' + kx' + g(x) = 0$ avec $k > 0$.

On vérifie facilement que le théorème s'applique pour tout $k > 0$.

3.3 Points stationnaires hyperboliques

Dans le premier chapitre de ce cours, nous avons étudié précisément le comportement asymptotique des équations différentielles linéaires à coefficients constants du type

$$X' = AX \tag{L}$$

avec A matrice carrée à coefficients réels ou complexes.

Dans le cas où A est à coefficients réels, nous avons vu que $\mathbb{R}^n$ était somme directe du sous-espace stable $E_{\mathbb{R}}^s$, du sous-espace instable $E_{\mathbb{R}}^i$ et du sous-espace neutre $E_{\mathbb{R}}^n$ définis de la façon suivante :

$$E_{\mathbb{R}}^s \stackrel{\text{d\'ef}}{=} (\oplus_{\operatorname{Re} \lambda_i < 0} E'_{\lambda_i}) \cap \mathbb{R}^n, \quad E_{\mathbb{R}}^i \stackrel{\text{d\'ef}}{=} (\oplus_{\operatorname{Re} \lambda_i > 0} E'_{\lambda_i}) \cap \mathbb{R}^n, \quad E_{\mathbb{R}}^n \stackrel{\text{d\'ef}}{=} (\oplus_{\operatorname{Re} \lambda_i = 0} E'_{\lambda_i}) \cap \mathbb{R}^n$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres réelles ou complexes de A et E'_{λ_i} le sous-espace caractéristique associé à λ_i .

Par ailleurs, nous savons qu'il est possible de caractériser ces trois sous-espaces vectoriels en termes de comportement asymptotique des solutions de l'équation différentielle (L) :

- $E_{\mathbb{R}}^s$ est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^n$ tels que la solution de (L) issue de x tende vers 0 en $+\infty$;
- $E_{\mathbb{R}}^i$ est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^n$ tels que la solution de (L) issue de x tende vers 0 en $-\infty$;
- $E_{\mathbb{R}}^n$ est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^n$ tels que la solution de (L) issue de x soit à norme majorée par un polynôme.

Enfin, dans le cas d'une équation différentielle autonome

$$X' = F(X) \tag{S}$$

telle que $F(x_0) = 0$, nous avons vu que, lorsque toutes les valeurs propres de $A := DF(x_0)$ étaient à partie réelle strictement négative, toutes les solutions issues d'un point x proche de x_0 tendaient exponentiellement vite vers x_0 (voir la section précédente).

Dans cette section, nous souhaitons étudier le cas plus général où le point stationnaire x_0 est de type hyperbolique c'est-à-dire est tel que le sous-espace neutre associé à la matrice $A := DF(x_0)$ soit réduit à $\{0\}$. Afin d'énoncer un résultat précis, il convient d'abord d'introduire les concepts de variété stable et variété instable.

On rappelle que $\phi_t(x)$ désigne la valeur à l'instant de t de la solution maximale de (S) issue de x à l'instant 0.

Définition 3.3.1 Soit $\delta > 0$ et x_0 un point stationnaire de F .

- La variété stable $V_{\delta}^s(x_0)$ de (S) près de x_0 est l'ensemble des $x \in B(x_0, \delta)$ tels que $t \mapsto \phi_t(x)$ soit définie sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $B(x_0, \delta)$ pour tout $t \geq 0$.
- La variété instable $V_{\delta}^i(x_0)$ de (S) près de x_0 est l'ensemble des $x \in B(x_0, \delta)$ tels que $t \mapsto \phi_t(x)$ soit définie sur $\mathbb{R}^-$ et à valeurs dans $B(x_0, \delta)$ pour tout $t \leq 0$.

Le théorème ci-dessous montre que dans le cas d'un point stationnaire hyperbolique, au moins l'une de ces deux variétés n'est pas réduite à $\{x_0\}$. Pour simplifier les notations, on suppose que $x_0 = 0$.

Théorème 3.3.2 (de la variété stable). Soit F un champ de vecteurs de classe C^k admettant 0 comme point stationnaire hyperbolique. Alors $\mathbb{R}^n = E_{\mathbb{R}}^s \oplus E_{\mathbb{R}}^i$ et on a le résultat suivant :

(i) si $E_{\mathbb{R}}^s$ n'est pas réduit à $\{0\}$ alors il existe $\delta > 0$ et une application v_s de classe C^k définie sur un voisinage de 0 dans $E_{\mathbb{R}}^s$ et à valeurs dans $E_{\mathbb{R}}^i$ telle que

$$V_{\delta}^s(0) = \{x + v_s(x) / x \in E_{\mathbb{R}}^s\} \quad v_s(0) = 0 \quad \text{et} \quad Dv_s(0) = 0.$$

(ii) si $E_{\mathbb{R}}^i$ n'est pas réduit à $\{0\}$ alors il existe $\delta > 0$ et une application v_i de classe C^k définie sur un voisinage de 0 dans $E_{\mathbb{R}}^i$ et à valeurs dans $E_{\mathbb{R}}^s$ telle que

$$V_{\delta}^i(0) = \{x + v_i(x) / x \in E_{\mathbb{R}}^i\} \quad v_i(0) = 0 \quad \text{et} \quad Dv_i(0) = 0.$$

La démonstration de ce théorème se trouve par exemple dans [4]. Elle dépasse sensiblement le cadre du cours. Comme sous-produit de la démonstration, on obtient en sus que, quitte à diminuer δ , si $x \in V_\delta^s(0)$ alors $\phi_t(x)$ tend exponentiellement vite vers 0.

Exemple. Considérons le système différentiel

$$\begin{cases} x' = 3x \\ y' = 2y + xz \\ z' = -z \end{cases}$$

Il est clair que $(0, 0, 0)$ est un point stationnaire. Si l'on note $F(x, y, z)$ le membre de droite, on constate que

$$DF(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ z & 2 & x \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donc $DF(0, 0, 0) = \text{diag}(3, 2, -1)$ et le point stationnaire $(0, 0, 0)$ est donc de type hyperbolique. De plus les sous-espaces stables et instables associés à $DF(0, 0, 0)$ sont respectivement $\mathbb{R}e_3$ et $\mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2$ avec (e_1, e_2, e_3) base canonique de $\mathbb{R}^3$. Le théorème de la variété stable permet donc de conclure à l'existence d'un intervalle I contenant 0, d'un voisinage V_i de $(0, 0)$ et de deux applications $v_s : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $v_i : V \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ et nulles à l'origine telles que

$$V_\delta^s(0) = \{(x, v_s(x)) / x \in I\} \quad \text{et} \quad V_\delta^i(0) = \{(x, v_i(x)) / x \in V\}.$$

Notons que $V_\delta^s(0)$ et $V_\delta^i(0)$ sont une courbe gauche et une surface, respectivement, passant par l'origine.

En fait, dans cet exemple très simple, il est facile de calculer $z(t)$ puis de résoudre explicitement l'équation. Cela permet de retrouver le résultat donné par le théorème de la variété stable.

Exercice : Faire les calculs jusqu'au bout.

Remarque 3.3.3 *Nous n'avons pas traité les EDO à coefficients variables ou encore d'autres méthodes de résolution des EDO telles que la méthode des séries entières ou celle de la transformée de Laplace. Le lecteur intéressé peut consulter par exemple [8].*

3.4 Exercices

Exercice 1. Le point $(0, 0)$ est-il un équilibre stable du système

$$\begin{cases} u_1'(t) = -2u_1(t) - 3u_2(t) + u_1(t)^5 \\ u_2'(t) = u_1(t) + u_2(t) - u_2(t)^2? \end{cases}$$

Exercice 2. Le point $(0, 0)$ est-il un équilibre stable du système

$$\begin{cases} u_1'(t) = u_1(t) + e^{u_2(t)} - \cos u_2(t) \\ u_2'(t) = 3u_1(t) - u_2(t) - \sin u_2(t)? \end{cases}$$

Exercice 3. Considérons le système

$$\begin{cases} x' = 2y(z - 1) \\ y' = -x(z - 1) \\ z' = -z^3 \end{cases} \quad (4.2)$$

(a) Déterminer des réels a, b et c tels que

$$V(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$$

soit une fonction de Liapounov pour (4.2).

(b) L'origine est-elle stable pour (4.2) ?

(c) Montrer que l'origine n'est pas asymptotiquement stable pour (4.2).

Exercice 4. Trouver une fonction de Liapounov pour l'équation

$$x' = -x^3$$

L'origine est-elle stable ?

Exercice 5. Pour chacun des deux systèmes suivants, chercher les points d'équilibre, écrivez la linéarisation du système en ces points et étudiez leur type et leur stabilité. Esquissez le plan de phase autour des points d'équilibre.

$$\begin{cases} x' = x(1 - x^2) \\ y' = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x\left(1 - y - \frac{x}{3}\right) \\ y' = y\left(x - 1 - \frac{y}{3}\right) \end{cases}.$$

Exercice 6. Considérons l'équation

$$u'' - \epsilon(1 - u^2)u' + u = 0$$

d'un oscillateur avec frottement (paramétré par ϵ). Ecrire cette équation sous la forme d'un système planaire, trouver les points d'équilibre de ce système, écrivez la linéarisation du système en ces points et étudier le type et la stabilité des points d'équilibre en fonction de $\epsilon \in \mathbb{R}$.

Exercice 7. (a) On considère le système autonome

$$\begin{cases} x' = -y + x(x^2 + y^2) \\ y' = x + y(x^2 + y^2) \end{cases} \quad (S1)$$

et son linéarisé

$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = x. \end{cases} \quad (L)$$

Montrer que l'origine est stable pour $(\bar{L})$ et instable pour $(\bar{S1})$.

(b) On considère le système

$$\begin{cases} x' = -y - x(x^2 + y^2) \\ y' = x - y(x^2 + y^2) \end{cases} \quad (S2)$$

Montrer que l'origine est asymptotiquement stable pour $(\sqrt{S2})$ (alors qu'elle n'est pas attractive pour $(\bar{L})$).

(c) On considère le système

$$\begin{cases} x' = -y + e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) x \\ y' = x + e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) y \end{cases} \quad (S3)$$

Montrer que l'origine est stable mais pas asymptotiquement stable.

Exercice 8. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 , et t_0 et x_0 des réels. On considère l'équation différentielle

$$x'(t) = f(x(t)) \quad (E)$$

et le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (C)$$

Dans tout cet exercice "solution" veut dire "solution maximale"

Partie 1 (importance des équilibres).

Soit $(J, x(\cdot))$ une solution de (E) et $x^* \in \mathbb{R}$. On suppose que $x(t) \rightarrow x^*$ quand $t \rightarrow \sup J$. On veut montrer que $f(x^*) = 0$.

- Montrer que $\sup J = +\infty$ puis que $f(x(t)) \rightarrow f(x^*)$ quand $t \rightarrow +\infty$.
- Supposons par l'absurde que $f(x^*) \neq 0$, par exemple $f(x^*) > 0$ (le cas $f(x^*) < 0$ est analogue). Montrer qu'il existe $T \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \geq T$, $x'(t) \geq f(x^*)/2$. En déduire que $x(t) \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$. Aboutir à une contradiction et conclure.
- Montrer le résultat plus général suivant : soit $X^* \in \mathbb{R}^d$ et $(J, X(\cdot))$ une solution de l'équation autonome $X'(t) = g(X(t))$ avec $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction de classe C^1 . Si $X(t) \rightarrow X^*$ quand $t \rightarrow \sup J$ alors $\sup J = +\infty$ et $g(X^*) = 0$. A quoi sert l'hypothèse g de classe C^1 (plutôt que C^0) ?

Partie 2 (portrait de phase).

Soit $(J, x(\cdot))$ une solution de (C). Soit $E_+ = \{x \in [x_0, +\infty[, f(x) = 0\}$ l'ensemble des équilibres plus grands que x_0 et $E_- = \{x \in]-\infty, x_0], f(x) = 0\}$ l'ensemble des équilibres plus petits que x_0 . Si $E_+ \neq \emptyset$ (resp. $E_- \neq \emptyset$), on pose $x_+ = \inf E_+$ (resp. $x_- = \sup E_-$).

- Montrer que si $E_+ \neq \emptyset$, alors $f(x_+) = 0$, si bien que x_+ est le plus petit équilibre plus grand que x_0 . Montrer de même que quand E_- est non vide, x_- est le plus grand équilibre plus petit que x_0 .
- Montrer que si $f(x_0) = 0$ alors $J = \mathbb{R}$ et pour tout réel t , $x(t) = x_0$.

(c) On suppose $f(x_0) > 0$.

a) Montrer que $f(x(t)) > 0$ pour tout t dans J . En déduire que $x(\cdot)$ est strictement croissante.

b) On suppose $E_+ = \emptyset$. Montrer qu'il n'existe pas de réel x^* tel que $x(t) \rightarrow x^*$ quand $t \rightarrow \sup J$. En déduire que $x(t) \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow \sup J$.

c) On suppose $E_+ \neq \emptyset$. Montrer que $x(t) < x_+$ pour tout t dans J . En déduire que $\sup J = +\infty$ puis qu'il existe $x^* \in]x_0, x_+]$ tel que $x(t) \rightarrow x^*$ quand $t \rightarrow +\infty$. En déduire que $x(t) \rightarrow x_+$ quand $t \rightarrow +\infty$.

Dans le cas $f(x_0) > 0$, on a donc montré que s'il y a pas d'équilibre plus grand que x_0 , alors la solution tend vers $+\infty$ en $\sup J$ et que sinon, elle est définie jusqu'en $+\infty$ et tend vers le plus petit équilibre plus grand que x_0 quand $t \rightarrow +\infty$. On montre de manière similaire que s'il n'y a pas d'équilibre plus petit que x_0 , alors la solution tend vers $-\infty$ en $\inf J$ et que sinon, elle est définie jusqu'en $-\infty$ et tend vers le plus grand équilibre plus petit que x_0 quand $t \rightarrow -\infty$.

d) Énoncer les résultats qu'on obtiendrait de manière analogue dans le cas $f(x_0) < 0$.

4) a) On suppose $f(x_0) > 0$. Donner et représenter graphiquement la trajectoire associée à la solution $(J, x(\cdot))$ dans les quatre cas suivants :

i) $E_- = E_+ = \emptyset$; ii) $E_- \neq \emptyset, E_+ = \emptyset$; iii) $E_- = \emptyset, E_+ \neq \emptyset$; iv) $E_- \neq \emptyset, E_+ \neq \emptyset$.

b) Quelles seraient les trajectoires si $f(x_0) < 0$? Pour l'équation différentielle $x'(t) = -f(x(t))$?

5) Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^1 telle que f et g ont toujours le même signe : $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sgn}(g(x)) = \operatorname{sgn}(f(x))$, où $\operatorname{sgn}(x)$ vaut 0 si $x = 0$, 1 si $x > 0$ et -1 si $x < 0$. Par exemple, $g = f^3$. Expliquer pourquoi l'équation différentielle $x'(t) = g(x(t))$ a le même portrait de phase que (E).

6) L'équation différentielle $x'(t) = f^{1/3}(x(t))$ a-t-elle le même portrait de phase que (E)?

Partie 3 (stabilité des équilibres).

Soit x^* un équilibre de (E), c'est à dire un réel tel que $f(x^*) = 0$ et $\varepsilon > 0$.

(a) Montrer que si $f(x) > 0$ sur $]x^* - \varepsilon, x^*]$ et $f(x) < 0$ sur $]x^*, x^* + \varepsilon[$, alors x^* est attractif. En déduire que si $f'(x^*) < 0$ alors x^* est attractif. On pourra faire un schéma commenté.

(b) Montrer que si $f'(x^*) > 0$ alors x^* est répulsif.

(c) Montrer que si $f'(x^*) = 0$ et $f''(x^*) \neq 0$, alors x^* n'est ni attractif ni répulsif. Que peut-on dire si $f''(x^*) = 0$?

Partie 4 (explosion ou non).

(a) Donner les solutions des équations différentielles $x'(t) = x(t)$ et $x'(t) = x^3(t)$. Vérifier qu'elles ont le même portrait de phase, mais que les solutions de la première sont globales alors que les solutions de la seconde explosent, à l'exception de la solution nulle.

(b) Soit $(J, x(\cdot))$ la solution de (C). On suppose que $x(t) \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow \sup J$.

a) Redémontrer que pour tout t dans J , $\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{f(u)} du = t - t_0$

b) En déduire que :

$$\sup J < +\infty \Leftrightarrow \int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{f(u)} du < +\infty$$

c) Dans le cas $f(x) = x^\alpha / (1 + x^2)$, avec $\alpha \geq 1$, pour quelles valeurs de α la solution de (E) telle que $x(0) = 1$ explose-t-elle ?

Partie 5 (application).

Donner le portrait de phase de (E) dans les cas suivants, en précisant si les équilibres sont attractifs, répulsifs, ou ni l'un ni l'autre. Pour c) et f), dire si la solution telle que $x(0) = 2$ explose ou non.

- a) $f(x) = x(x - 1)$;
- b) $f(x) = x^2(x - 1)$;
- c) $f(x) = x^3 - 1$;
- d) $f(x) = 1 - x^3$;
- e) $f(x) = (x^3 - 1)^2$;
- f) $f(x) = (x^3 - 1) / (1 + x^2)$.

Chapitre 4

Applications des EDO à la modélisation

4.1 Introduction à la modélisation

4.1.1 Qu'est-ce que la modélisation ?

La modélisation mathématique est l'application des mathématiques pour décrire des problèmes du monde réel et étudier les questions importantes qui en découlent. À l'aide de méthodes mathématiques, le problème du monde réel est traduit en un problème mathématique qui simule le problème du monde réel. On obtient une solution au problème mathématique, qui est interprétée dans le langage des problèmes du monde réel pour faire des prédictions sur le monde réel.

Par problèmes du monde réel, nous sous-entendons les problèmes de biologie, de chimie, d'écologie, d'environnement, d'ingénierie, de physique, de sciences sociales, de statistiques, de gestion de la faune et de la flore, etc. La modélisation mathématique peut être décrite comme une activité qui permet à un mathématicien d'être biologiste, chimiste, écologiste ou économiste en fonction du problème auquel il s'attaque. L'objectif premier d'un modélisateur est d'entreprendre des expériences sur la représentation mathématique d'un problème du monde réel, au lieu d'entreprendre des expériences dans le monde réel.

Le défi de la modélisation mathématique n'est pas de produire le modèle le plus descriptif et complet possible, mais de produire le modèle le plus simple possible qui prend en compte les caractéristiques majeures du phénomène étudié. Howard Emmons, cité dans [3]

Un modèle mathématique est donc une simplification de la réalité.

Un modèle mathématique est une tentative systématique de traduire la compréhension conceptuelle d'un système réel en termes mathématiques. La qualité d'un modèle mathématique dépend de la compréhension conceptuelle des processus qui se produisent dans le système. Si le modèle conceptuel est bon, le modèle devrait reproduire les phénomènes pertinents. Si ce n'est pas le cas, nous savons que nous devons améliorer le modèle

conceptuel. Un modèle est donc un outil précieux pour tester notre compréhension du fonctionnement d'un système.

La construction et l'utilisation d'un modèle mathématique s'effectuent en six étapes.

1. Les variables et processus importants agissant dans le système sont identifiés. Ceci suppose un examen minutieux du système et une bonne compréhension théorique. Par exemple, si on souhaite modéliser la propagation du flétrissement des bananiers causé par le *Banana Xanthomonas Wit* (BXW) dans une bananeraie, il est important de comprendre d'abord comment il se propage d'un bananier à un autre et identifier les agents impliqués. On se demandera qui sont ces agents ? (le cultivateur ? les insectes ? la pluie ? les bananiers eux-mêmes). Parfois une schématisation peut être utile pour se rassurer de la compréhension holistique du problème, identifier les variables majeures et éventuellement celles qui peuvent être ignorées.
2. Les processus sont représentés par des expressions mathématiques. Pour reprendre l'exemple du BXW, la propagation est due à plusieurs facteurs tels que le cultivateur (utilisation des outils aratoires infectés), les insectes qui se déplacent des bourgeons infectés à ceux qui sont sains, la pluie qui peut causer l'écoulement des eaux faisant circuler la maladie de la plante malade à une plante saine.
3. Les expressions mathématiques sont combinées de manière appropriée dans des équations qui expriment les bilans de masse, d'énergie ou de quantité de mouvement, et dans le cas échéant, les différents compartiments qui sont impliqués. Encore une fois, pour le même exemple simple, on peut établir des compartiments comprenant les plantes saines, les plantes malades et contagieuses, les plantes malades mais non contagieuses, l'influence du cultivateur, le rôle de la pluie et des insectes, etc ;
4. Les paramètres impliqués dans les expressions mathématiques reçoivent des valeurs appropriées au système modélisé. Par exemple, l'infection d'une plante saine implique un taux d'infection qui peut être différent selon que la plante a été infectée par une autre plante, par un insecte, par le cultivateur, ou encore par la pluie.
5. Les équations sont résolues par une technique adaptée à leur complexité. Les systèmes très simples peuvent être résolus par des solutions purement analytiques, mais des techniques de résolution numérique sont nécessaires pour les systèmes plus compliqués. Ceci suppose une connaissance des méthodes numériques et leur implémentation dans des logiciels appropriés (Python, Matlab, Mathematica, etc.)
6. La solution du modèle produit des propriétés du système qui sont représentées par les variables du modèle. Par exemple, le modèle peut fournir le nombre prévu des bananiers qui seront infectés dans un an, quelques mois, etc.

Un modèle mathématique doit être aussi complexe que nécessaire et aussi simple que possible. International Water Association (IWA) Task Group, 2005.

4.1.2 Importance de la modélisation

Un modèle mathématique, comme indiqué, est une description mathématique d'une situation réelle. Ainsi, si un modèle mathématique peut refléter ou imiter le comportement d'une situation réelle, nous pouvons obtenir une meilleure compréhension du système grâce à une analyse correcte du modèle à l'aide d'outils mathématiques appropriés.

En outre, au cours du processus de construction du modèle, nous découvrons divers facteurs qui régissent le système et qui sont les plus importants. qui régissent le système, qui

sont les plus importants pour le système et qui révèlent comment les différents aspects du système sont liés.

L'importance de la modélisation mathématique en physique, en chimie, en biologie, en économie et même dans l'industrie ne peut être ignorée. La modélisation mathématique dans les sciences fondamentales gagne en popularité, principalement dans les sciences biologiques, l'économie et les problèmes industriels. Par exemple, si nous considérons la modélisation mathématique dans l'industrie sidérurgique, de nombreux aspects de la fabrication de l'acier, de l'extraction à la distribution, sont susceptibles de faire l'objet d'une modélisation mathématique. En fait, les entreprises sidérurgiques ont participé à plusieurs ateliers mathématiques-industrie, au cours desquels elles ont discuté de divers problèmes et obtenu des solutions grâce à la modélisation mathématique - des problèmes concernant le contrôle du refroidissement des lingots, le transfert de chaleur et de masse dans les hauts fourneaux, la mécanique du laminage à chaud, le soudage par friction, le refroidissement par pulvérisation et la contraction lors de la solidification des lingots, pour n'en citer que quelques-uns.

De même, la modélisation mathématique peut être utilisée

- (i) étudier la croissance des plantes cultivées dans un environnement dégradé ;
- (ii) étudier le transport de l'ARNm et son rôle dans l'apprentissage et la mémoire ;
- (iii) modéliser et prédire le changement climatique ;
- (iv) étudier la dynamique de l'interface pour deux films liquides dans le contexte des cellules solaires organiques ;
- (v) développer la modélisation multi-échelle dans la science des cristaux liquides et bien d'autres encore ;

Les techniques analytiques sont utilisées pour obtenir un aperçu physique. Cependant, pour traiter des problèmes plus complexes, les approches numériques sont très pratiques. Il est toujours conseillé et utile de formuler un système complexe à l'aide d'un modèle simple dont l'équation donne lieu à une solution analytique. Ensuite, le modèle peut être modifié en un modèle plus réaliste qui peut être résolu numériquement. Avec les résultats analytiques des modèles plus simples et la solution numérique des modèles plus réalistes, on peut obtenir une compréhension plus réaliste, on peut obtenir une compréhension maximale du problème.

4.1.3 Derniers développements dans la modélisation mathématique

La modélisation mathématique est un domaine de développement et de recherche important. Ces dernières années, les modèles mathématiques ont été utilisés pour valider les hypothèses formulées à partir de données expérimentales, et dans le même temps, la conception et le test de ces modèles ont conduit à des prédictions expérimentales vérifiables. Il existe des cas impressionnants dans lesquels les modèles mathématiques ont apporté un éclairage nouveau sur les systèmes biologiques, les systèmes physiques, les problèmes de prise de décision, les modèles spatiaux, les problèmes industriels, les problèmes économiques, etc.

Le développement de la modélisation mathématique est étroitement lié à d'importantes réalisations dans le domaine des mathématiques informatiques. Prenons l'exemple d'un

nouveau produit lancé par une entreprise. Au cours du processus de développement, des décisions cruciales sont prises pour son lancement, telles que le calendrier, la détermination du prix, la séquence de lancement. Les experts utilisent et développent des modèles mathématiques pour faciliter cette prise de décision. De même, pour survivre à la concurrence du marché, la réduction des coûts est l'une des principales stratégies d'une usine de fabrication, qui doit faire face à un grand nombre de coûts d'exploitation. Une bonne disposition des équipements peut entraîner une réduction considérable de ces coûts. Cela conduit à un problème d'agencement dynamique des installations pour trouver des sites d'équipement dans les environnements de fabrication, qui est l'un des domaines en développement dans le domaine de la modélisation mathématique.

La modélisation mathématique intensifie également l'étude des virus de la grippe potentiellement mortels ou Coronavirus (COVID-19) provenant de la nature et des bioterroristes. Des modèles mathématiques sont également développés dans le domaine des sciences optiques, à savoir, l'optique diffractive, les structures de bandes interdites photoniques et les guides d'ondes, la modélisation des nutriments, l'étude de la dynamique des hauts fourneaux, l'étude de l'érosion et la prédiction de l'affaissement de la surface.

En géosciences, des modèles mathématiques ont été développés pour les talus. Rapp et Fairbridge définissent le *talus* comme une accumulation de débris rocheux formés près des parois des montagnes, principalement par de nombreuses petites chutes de pierres. Hiroyuki et Yukinori ont construit un nouveau modèle mathématique pour le développement des talus et le recul des cliffs derrière le talus, qui a ensuite été appliqué aux résultats d'une expérience sur le terrain pour le développement des talus sur un cliff composé de craie. Ils ont développé le modèle qui était en accord avec les observations sur le terrain. Le domaine interdisciplinaire des mathématiques appliquées à la physiologie humaine a connu un développement considérable au cours de la dernière décennie, et ce développement se poursuit. L'une des principales raisons de ce développement est l'amélioration de la capacité des chercheurs à collecter des données, dont la visualisation a une bien meilleure résolution dans le temps et l'espace qu'il y a seulement quelques années. Dans le même temps, cette évolution constitue également une gigantesque collection de données obtenues grâce à des techniques de mesure avancées. Grâce à l'analyse statistique, il est possible de trouver des corrélations, mais cette analyse ne permet pas de comprendre les mécanismes responsables de ces corrélations. Cependant, lorsqu'elle est combinée à la modélisation mathématique, elle permet de mieux comprendre les mécanismes physiologiques.

Des modèles mathématiques sont développés dans le domaine de l'informatique en nuage pour faciliter l'infrastructure des ressources informatiques dans laquelle de vastes pools de systèmes (ou nuages) sont reliés entre eux via l'internet pour fournir des services informatiques (par exemple, la gestion sécurisée de milliards de transactions en ligne). Le développement de modèles mathématiques est également remarqué

- (i) dans l'étude de la variation du gaz de protection dans le soudage GTA,
- (ii) pour la prédiction du comportement de vieillissement des composites Al-Cu-Mg/Bagasse Ash,
- (iii) pour la prise de décision et les estimations en matière de santé publique,
- (iv) pour le développement de modèles de pliage du cortex cérébral qui ont fasciné les scientifiques par leur beauté et leur complexité pendant des siècles,
- (v) pour prédire l'expression de l'huile de tournesol,

- (vi) dans le développement d'un nouveau modèle mathématique tridimensionnel de l'ionosphère à l'Agence spatiale européenne/Centre européen des opérateurs spatiaux,
- (vii) dans la modélisation des batteries ou la description mathématique des batteries, qui joue un rôle important dans la conception et l'utilisation des batteries, l'estimation des processus des batteries et la conception des batteries. Il s'agit là de quelques domaines dans lesquels la modélisation mathématique joue un rôle important. Cependant, il existe de nombreux autres domaines d'application.

Parfois, bien que le modèle mathématique utilisé soit bien adapté à la situation considérée, il peut donner des résultats inattendus ou tout simplement échouer. Cela peut indiquer que nous avons atteint la limite du modèle mathématique actuel et que nous devons chercher un nouveau raffinement du monde réel ou une nouvelle percée théorique.

Dans la modélisation mathématique, il faut faire plus d'hypothèses, car les informations sur les systèmes du monde réel deviennent moins précises ou plus difficiles à mesurer. La modélisation devient une entreprise moins précise à mesure qu'elle s'éloigne des systèmes physiques pour se rapprocher des systèmes sociaux. Par exemple, la modélisation d'un circuit électrique est beaucoup plus simple que la modélisation de la prise de décision humaine ou de l'environnement. Étant donné que les systèmes physiques ne changent généralement pas, des informations passées raisonnables sur un système physique sont très utiles pour modéliser les performances futures. Cependant, les systèmes sociaux et les environnements changent souvent d'une manière qui n'appartient pas au passé, et même des informations correctes peuvent être moins utiles pour formuler des hypothèses. Ainsi, pour comprendre les limites d'un modèle, il est important de comprendre les hypothèses de base qui ont été utilisées pour le créer.

Les systèmes du monde réel sont complexes et comportent un certain nombre de composants interdépendants. Les modèles étant des abstractions de la réalité, un bon modèle doit essayer d'intégrer tous les éléments critiques et les composants interdépendants du système réel. Cela n'est pas toujours possible. Ainsi, une limitation inhérente importante d'un modèle est créée par ce qui n'est pas pris en compte. Les problèmes surviennent lorsque des aspects clés du système réel sont traités de manière inadéquate dans un modèle ou sont ignorés pour éviter les complications, ce qui peut conduire à des modèles incomplets. D'autres limites d'un modèle mathématique sont qu'il peut supposer que l'avenir sera comme le passé, que les données d'entrée peuvent être incertaines ou que l'utilité d'un modèle peut être limitée par son objectif initial. Cependant, malgré toutes ces limites et tous ces pièges, un bon modèle peut être formulé si le modélisateur se pose les questions suivantes à propos du modèle :

- (i) La structure du modèle ressemble-t-elle au système modélisé ?
- (ii) Pourquoi le modèle choisi est-il approprié pour une application donnée ?
- (iii) Quelles sont les performances du modèle ?
- (iv) Le modèle a-t-il été analysé par quelqu'un d'autre que les auteurs du modèle ?
- (v) Une documentation adéquate du modèle est-elle disponible pour tous ceux qui souhaitent l'étudier ?
- (vi) Quelles hypothèses et données ont été utilisées pour produire les résultats du modèle pour l'application spécifique ?
- (vii) Quelle est la précision des résultats du modèle ?

Il ne faut pas extrapoler le modèle au-delà de la zone d'ajustement. Un modèle ne doit pas être appliqué sans que l'on comprenne les hypothèses simplificatrices sur lesquelles il est basé et sans que l'on puisse tester leur applicabilité. Il est également important de comprendre que le modèle n'est pas la réalité et qu'il ne faut pas déformer la réalité pour l'adapter au modèle. Un modèle discrédité ne doit pas être retenu et il ne faut pas se limiter à un seul modèle, car plusieurs modèles peuvent être utiles pour comprendre des aspects différents d'un même phénomène. Il est impératif d'être conscient des limites inhérentes aux modèles. Il n'y a pas de meilleur modèle, seulement de meilleurs modèles.

4.1.4 Les unités

Une référence standard est nécessaire pour exprimer le résultat de la mesure d'une quantité, et cette norme est appelée l'unité de mesure de cette quantité. En d'autres termes, une unité est un étalon utilisé à des fins de comparaison dans les mesures. Par exemple, si nous disons qu'il y a un énorme stock de blé dans l'entrepôt (godown), cette affirmation est vague et ne donne pas d'idée claire. En revanche, si nous disons qu'il y a 3 000 kg de blé dans le magasin, cela donne une idée claire de la quantité de blé stockée. Ici, le poids est la quantité et son unité de mesure est le kilogramme.

Les systèmes d'unités couramment utilisés sont les suivants :

- (i) Système CGS : Il s'agit d'un système français développé en 1873 pour la science, dans lequel C signifie centimètre, G gramme et S seconde. Ce système ne comprend que trois grandeurs mécaniques, à savoir la masse, la longueur et le temps.
- (ii) Le système MKS : Le centimètre et le gramme étant jugés trop petits pour les besoins de la technologie, le système MKS (également d'origine française) a vu le jour en 1900. Ce système ne traite lui aussi que de trois grandeurs mécaniques : la masse, la longueur et le temps. Ici, M signifie mètre, K signifie kilogramme et S signifie seconde.
- (iii) le système SI (International System of Units ou Le Système International d'unités) : Le système SI, qui a vu le jour en 1960, est une version plus rationnelle du système MKS et représente la dernière variante de l'évolution des unités. Ce système a été préparé en ajoutant certaines unités standard à celles du système MKS. Les unités fondamentales du système SI sont le mètre (longueur), le kilogramme (masse), la seconde (temps), l'ampère (courant électrique), le kelvin (température), la candela (intensité lumineuse) et la mole (quantité de substance).

4.1.5 Dimensions et analyse dimensionnelle

4.1.5.1 Dimensions

Une grandeur physique peut être exprimée en termes de quantités fondamentales, à savoir la longueur, la masse et le temps, ou une combinaison de ces trois grandeurs. La combinaison particulière est appelée la dimension de cette grandeur physique. Ainsi, par dimension d'une grandeur physique, on entend la puissance à laquelle il faut élever l'unité ou les unités fondamentales pour obtenir des unités de cette grandeur. Par exemple, la dimension du volume, qui est le produit de trois unités de longueur, est représentée par $L \times L \times L$ ou L^3 , et la dimension de la vitesse, qui est la distance/le temps, est $L/T = LT^{-1}$.

Les dimensions sont indépendantes des unités utilisées ; par exemple, la vitesse a la dimension LT^{-1} mais peut être mesurée en km par heure ou en mètre par seconde ; les crochets $[.]$ sont utilisés pour indiquer « la dimension de... », de sorte que

$$[\text{accélération}] = \left[\frac{\text{vitesse}}{\text{temps}} \right] = \frac{[\text{vitesse}]}{[\text{temps}]} = \frac{LT^{-1}}{T} = LT^{-2}.$$

$$[\text{force}] = [\text{masse} \times \text{accélération}] = [\text{masse}] \times [\text{accélération}] = M \times LT^{-2} = MLT^{-2}.$$

$$[\text{travail}] = [\text{force} \times \text{distance}] = [\text{force}] \times [\text{distance}] = MLT^{-2} \times L = ML^2T^{-2}.$$

Toutefois, certaines quantités sont sans dimension ou purement numériques. Par exemple

$$[\text{angle}] = \frac{[\text{arc}]}{[\text{rayon}]} = \frac{L}{L} = LL^{-1} = \text{nombre purement numérique ;}$$

$$[\text{gravité spécifique}] = \frac{[\text{masse d'un corps}]}{[\text{masse d'un volume égal d'eau}]} = \frac{M}{M} = MM^{-1} = \text{nombre purement numérique.}$$

Dans la modélisation mathématique, les modèles sont exprimés sous la forme d'une équation, qui implique des variables, des paramètres et des constantes, qui représentent tous des quantités et peuvent, en principe, être mesurés. Par exemple, un temps de 19s, où s signifie secondes, est une grandeur physique, mesurée en écrivant un nombre suivi d'une unité de mesure. Une mesure sans unité est totalement dénuée de sens et, dans le processus de construction d'un modèle, il faut veiller à garder la trace des unités de mesure pour toutes les quantités impliquées à tous les stades. Pour commencer, il faut vérifier toutes les équations apparaissant dans un modèle, afin de s'assurer qu'elles sont ou non cohérentes sur le plan dimensionnel, ce qui signifie que

$$[\text{membre de gauche}] = [\text{membre de droite}]$$

En d'autres termes, ils doivent être dimensionnellement homogènes.

Par exemple, supposons qu'un corps se déplace en ligne droite avec une force proportionnelle au cube de sa vitesse. Si nous modélisons la force sur l'objet en mouvement, nous aurons un modèle de la forme

$$F = kv^3,$$

où k est la constante de proportionnalité. Nous allons maintenant vérifier la dimension de ces deux équations :

$$[F] = [kV^3] \Rightarrow MLT^{-2} = [k](LT^{-1})^3 \text{ d'où } [k] = ML^{-2}T$$

et donc k sera mesuré en $kgm^{-2}s$ en unités MKS ou SI.

Remarques :

- (i) Si le modèle contient $\cos(\alpha t)$ ou $e^{\alpha t}$, où t représente le temps, le paramètre α doit avoir une dimension T^{-1} , de sorte que αt est sans dimension. Ainsi, l'argument des fonctions ayant des développements en série de Taylor doit être sans dimension.

- (ii) Si une équation implique une dérivée, les dimensions de la dérivée sont données par le rapport des dimensions, car une dérivée est un rapport limite de deux quantités. Par exemple, si v est la vitesse d'une particule à un instant t , l'accélération est $\frac{dv}{dt}$ et

$$\left[\frac{dv}{dt} \right] = \frac{[v]}{[t]} = \frac{LT^{-1}}{T} = LT^{-2}.$$

De même, pour les dérivées partielles,

$$\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] = \frac{[v]}{[x^2]} = \frac{LT^{-1}}{L^2} = L^{-1}T^{-1}$$

- (iii) Si u est la température et x la distance, alors

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] = \frac{[u]}{[x]} = QL^{-1}$$

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] = \frac{[u]}{[x^2]} = QL^{-2}.$$

En général,

$$\left[\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial t^n} \right] = \frac{[u]}{[x^m t^n]} = QL^{-m}T^{-n}$$

- (iv) Deux quantités peuvent être additionnées si elles ont les mêmes dimensions. Des quantités de dimensions différentes peuvent être multipliées ou divisées.
(v) Loi des indices : si

$$[A] = M^{a_1} L^{b_1} T^{c_1} \text{ et } [B] = M^{a_2} L^{b_2} T^{c_2}$$

alors

$$[AB] = M^{a_1+a_2} L^{b_1+b_2} T^{c_1+c_2}.$$

- (vi) Les nombres purs sont sans dimension et la multiplication d'une quantité physique par un nombre pur ne modifie pas ses dimensions.
(vii) La dimension d'une intégrale

$$\int_a^b p dq$$

est donnée par $[p][q]$.

Exemple 4.1.1 La loi de Fourier, qui relie le flux de chaleur au gradient de température, est donnée par la formule suivante

$$J = -\alpha \frac{\partial u}{\partial x}$$

où J est le flux de chaleur, u la température, x la distance et k la conductivité. Déterminer la dimension de α , c'est-à-dire $[\alpha]$.

Solution : Le flux thermique J est l'énergie thermique par unité de surface et par unité de temps. Ainsi, le flux de chaleur J est l'énergie thermique par unité de surface et par unité de temps,

$$[J] = \frac{[energie]}{[aire] \times [temps]}.$$

On sait l'énergie a les dimensions du travail effectué, qui est la force $\times$ la distance, donc $[energie] = MLT^{-2} \times L$ et $[surface] = L^2$. Par conséquent,

$$J = \frac{ML^2T^{-2}}{L^2T} = MT^{-3}.$$

Puisque $[u] = Q$ et $[x] = L$, alors

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] = QL^{-1}.$$

De la relation de J on déduit que $\alpha = J \times \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^{-1} \Rightarrow [\alpha] = MT^{-3} \times (QL^{-1})^{-1} = MLT^{-3}Q^{-1}$; ce qui signifie que dans le SI, α s'exprime en kgm/s^3K .

4.1.5.2 Analyse dimensionnelle

Lorsque la dimension d'une quantité est trouvée et exprimée sous la forme d'une équation, cette équation est appelée équation dimensionnelle. L'analyse dimensionnelle est une méthode qui consiste à utiliser le fait que la dimension de chaque terme d'une équation doit être la même, pour suggérer une relation entre les quantités physiques concernées.

Supposons que nous essayons de développer un modèle permettant de prédire la fréquence (n) de vibration d'une corde tendue. Nous supposons que la fréquence dépend de la tension (t_s) de la corde tendue, de la longueur (l) et de la masse (m) par unité de longueur de la corde de sorte que

$$n = kt_s^a l^b m^c,$$

où a, b, c sont des nombres réels et k est une constante de proportionnalité (quantité sans dimension).

En considérant les dimensions, on a

$$[n] = [kt_s^a l^b m^c] = k[t_s^a][l^b][m^c],$$

où $[t_s^a] = \text{tension} = \text{force} = MLT^{-2}$, $[l] = L$, $[m] = \text{masse par unité de longueur} = \frac{\text{masse}}{\text{longueur}} \Rightarrow [m] = ML^{-1}$ et la fréquence n de la corde tendue = vibration par unité de temps, $\Rightarrow [n] = T^{-1}$. On en déduit que

$$T^{-1} = k(MLT^{-2})^a L^b (ML^{-1})^c \Leftrightarrow M^0 L^0 T^{-1} = k(MLT^{-2})^a L^b (ML^{-1})^c = kM^{c+a} L^{a+b-c} T^{-2a}.$$

D'où $a = 1/2$, $c = -1/2$, $b = -1$ ce qui signifie que

$$n = \frac{k}{l} \sqrt{\frac{t_s}{m}}.$$

Exemple : Soit $\frac{dp}{dr} - \frac{\rho v}{r^2} = 0$ où ρ est la densité, p est la pression et v est la vitesse. Vérifions que l'équation est dimensionnellement homogène (correcte).

Solution : Pression = $\frac{\text{Force}}{\text{Unité de surface}} \Rightarrow [\text{pression}] = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2}$,

Densité = $\frac{\text{masse}}{\text{unité de volume}} \Rightarrow [\text{densité}] = \frac{M}{L^3} = ML^{-3}$,

Vitesse = $\frac{\text{distance}}{\text{unité de temps}} \Rightarrow [\text{vitesse}] = \frac{L}{T} = LT^{-1}$.

Revenant à l'équation proposée, on doit avoir

$$\left[\frac{dp}{dr} \right] = \left[\frac{\rho v}{r^2} \right]. \text{ Puisque } r \text{ est la distance radiale, on a } \left[\frac{dp}{dr} \right] = \frac{ML^{-1}T^{-2}}{L} = ML^{-2}T^{-2}$$

d'une part, et d'autre part on a :

$$\left[\frac{\rho v}{r^2} \right] = \frac{[\rho][v]}{[r^2]} = \frac{ML^{-3} \times LT^{-1}}{L^2} = ML^{-4}T^{-1}.$$

On en déduit que l'équation n'est pas dimensionnellement homogène, et donc elle est fausse.

4.1.5.3 Réduction dimensionnelle (ou "mise à l'échelle" (scaling))

L'idée fondamentale de la réduction dimensionnelle est de rendre les variables indépendantes et dépendantes sans dimension. Il s'agit d'une technique extrêmement utile dans la modélisation mathématique et la simulation numérique. Elle réduit le nombre de paramètres physiques indépendants dans le modèle et rend la taille des variables indépendantes et dépendantes proche de l'unité.

Mathématiquement, pour toute variable z , nous introduirons une variable sans dimension correspondante

$$\bar{z} = \frac{z - z_0}{z_c}$$

où z_0 est la valeur de référence de z (généralement zéro) et z_c est une taille caractéristique de z , souvent appelée échelle. $\bar{z}$ est un nombre sans dimension car le numérateur et le dénominateur ont les mêmes dimensions. Il n'existe pas de règle absolue pour trouver z_c et cela peut parfois s'avérer assez difficile. Illustrons cela à l'aide d'un exemple.

Considérons le mode d'épidémie de la tordeuse des bourgeons de l'épicéa

$$\frac{dB}{dt} = rB \left(1 - \frac{B}{k} \right) - \frac{\beta B^2}{\alpha + B^2}, \quad B(0) = B_0. \quad (4.1)$$

où $B(t)$ est la densité de la tordeuse à tout moment t , r est le taux de croissance intrinsèque et k est la capacité de charge (taille maximale de la population qui peut être atteinte avec les ressources disponibles) de la densité de la tordeuse. Le terme de prédation $\frac{\beta B^2}{\alpha + B^2}$ a été choisi par Ludwig et al.[7], pour tenir compte des faits observés sur les tordeuses de bourgeons d'épicéa et leurs prédateurs (oiseaux), où β est le taux de prédation et α le facteur de saturation des tordeuses de bourgeons d'épicéa.

Il s'agit essentiellement d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre, avec la condition initiale $B(0) = B_0$. Nous donnons maintenant une approche étape par étape

pour "non-dimensionner" ce problème de valeur initiale.

Étape I : Nous commençons par identifier les variables, les paramètres et leurs dimensions et nous les présentons sous forme de tableau 4.1

Variables	Dimensions
t	T (time)
B	$ML^{-3} = \rho$ (densité)
Paramètres	Dimensions
r (taux de croissance intrinsèque)	T^{-1}
k (capacité de charge)	$\rho = ML^{-3}$
α (facteur de saturation)	$\rho = ML^{-3}$
β (facteur de prédation)	$ML^{-3}T^{-1} = \rho T^{-1}$
B_0 (densité initiale)	$\rho = ML^{-3}$

TABLE 4.1 – Tableau des variables, des paramètres et leurs dimensions

Étape II : Nous séparons maintenant les variables en deux parties distinctes : une nouvelle variable, qui n'a pas de dimension, et une quantité, qui représente les unités de mesure et comporte des dimensions physiques. Ainsi, nous obtenons,

$$B = uB^* \text{ and } t = zt^*.$$

Notez que nous avons choisi B^* et t^* de manière à ce que $u = \frac{B}{B^*}$ et $z = \frac{t}{t^*}$ soient des variables sans dimension.

Étape III : Nous utilisons maintenant la règle de la chaîne pour former une nouvelle équation différentielle :

$$\frac{dB}{dt} = \frac{dB}{du} \frac{du}{dz} \frac{dz}{dt} = B^* \frac{du}{dz} \frac{1}{t^*}.$$

En substituant $u = \frac{B}{B^*}$ et $z = \frac{t}{t^*}$, on obtient ,

$$\frac{B^*}{t^*} \frac{du}{dz} = ruB^* \left(1 - \frac{uB^*}{k} \right) - \frac{\beta u^2 B^{*2}}{\alpha^2 + u^2 B^{*2}}$$

$$\frac{du}{dz} = rut^* \left(1 - \frac{u}{k/B^*} \right) - \frac{\beta B^* t^* u^2}{\alpha^2 + u^2 B^{*2}}.$$

Si on choisit $B^* = \alpha$ et $t^* = \frac{\alpha}{\beta}$, alors $[u] = \frac{[B]}{[B^*]} = \frac{ML^{-3}}{[B]} = \frac{ML^{-3}}{ML^{-3}} = 1$ (nombre purement numérique) ;

$$[z] = \frac{[t]}{[t^*]} = \frac{T}{[\alpha/\beta]} = \frac{T[\beta]}{[\alpha]} = \frac{TML^{-3}T^{-1}}{ML^{-3}} = 1 \text{ (nombre purement numérique).}$$

Ainsi, u et z sont sans dimension. En substituant $B^* = \alpha$ et $t^* = \frac{\alpha}{\beta}$ on obtient

$$\frac{du}{dz} = r \frac{\alpha}{\beta} u \left(1 - \frac{u}{k/\alpha} \right) - \frac{\beta \alpha \frac{\alpha}{\beta} u^2}{\alpha^2 + \alpha^2 u^2}$$

$$\frac{du}{dz} = r \frac{\alpha}{\beta} u \left(1 - \frac{u}{k/\alpha} \right) - \frac{u^2}{1 + u^2}.$$

Nous introduisons maintenant deux paramètres sans dimension $a = r\frac{\alpha}{\beta}$ et $b = k/\alpha$, l'équation devient

$$\frac{du}{dz} = au \left(1 - \frac{u}{b}\right) - \frac{u^2}{1 + u^2}.$$

En effet, on a : $[a] = \left[\frac{r\alpha}{\beta}\right] = \frac{[r][\alpha]}{[\beta]} = \frac{TML^{-3}T^{-1}}{ML^{-3}} = 1$

$$\text{et } [b] = \left[\frac{k}{\alpha}\right] = \frac{[k]}{[\alpha]} = \frac{ML^{-3}}{ML^{-3}} = 1.$$

Ainsi, a et b sont des paramètres sans dimension.

Étape IV : Nous examinons maintenant la condition initiale : $B(0) = B_0$. Puisque $B = uB^*$, nous obtenons, $u(0)B^* = B_0$ ($B = uB^* \Rightarrow B(0) = u(0)B^* \Rightarrow u(0) = \frac{B_0}{B^*} = \frac{B_0}{\alpha} = \gamma$ (par exemple).

Notez que

$$[\gamma] = \left[\frac{B_0}{\alpha}\right] = \frac{[B_0]}{[\alpha]} = \frac{ML^{-3}}{ML^{-3}} = 1.$$

La condition initiale devient $u(0) = \gamma$ (une quantité sans dimension).

Après la non-dimensionnalisation, la forme simplifiée de l'équation est la suivante

$$\frac{du}{dz} = au \left(1 - \frac{u}{b}\right) - \frac{u^2}{1 + u^2}, \quad u(0) = \gamma; \quad (4.2)$$

où le nombre de paramètres a été réduit de 5 à 3 (y compris la condition initiale), ce qui simplifie l'analyse de l'équation.

Remarque : Il n'y a pas de méthode unique pour choisir B^* et t^* , une certaine expérimentation peut être nécessaire (méthode d'essai et d'erreur).

4.1.6 Comment construire un modèle mathématique ?

4.1.6.1 Étape 1 : le début

Avant de commencer à formuler un modèle, nous devons être clairs sur nos objectifs. Les objectifs déterminent la suite de la tâche de deux manières différentes :

- (i) Tout d'abord, la quantité de détails incorporés dans le modèle dépend de l'objectif pour lequel le modèle sera utilisé. Par exemple, pour modéliser la croissance du cancer de la peau (mélanome) afin d'aider les oncologues, un modèle empirique contenant des termes pour les déterminants les plus importants de la croissance du cancer de la peau peut être tout à fait adéquat et le modèle peut être considéré comme un résumé de la compréhension actuelle du mélanome (cancer de la peau). Cependant, un tel modèle est clairement d'une utilité limitée en tant qu'outil de recherche pour étudier la croissance des tumeurs exocrines (cancer du pancréas) ;
- (ii) Deuxièmement, il convient d'établir une distinction claire entre le système à modéliser et son environnement. Il faut veiller à ce que cette séparation soit bien faite, ce qui signifie que l'environnement peut affecter la dynamique du système, mais que le système n'a pas d'effet sur l'environnement.

4.1.6.2 Étape 2 : les hypothèses

Une fois que le système à modéliser est déterminé, il faut construire un cadre de base pour le modèle. Cela dépendra de l'hypothèse sous-jacente que nous faisons dans la construction du modèle. Il convient de noter que chaque fois que des hypothèses sont formulées, elles seront considérées comme vraies lors de l'analyse du système et les résultats d'une telle analyse ne sont valables que dans la mesure où les hypothèses le sont. Ainsi, l'une des différences fondamentales entre la mécanique classique et la théorie de la relativité est que Newton suppose que la masse est une constante universelle, alors qu'Einstein considère la masse comme une variable.

Considérons la croissance d'une population. Il est communément admis qu'une population croît à un rythme proportionnel à sa taille, en l'absence de facteurs limitants. En temps continu, une telle croissance de la population sera représentée par l'équation différentielle suivante

$$\frac{dx}{dt} = rx; \quad (4.3)$$

où $x(t)$ est la taille de la population à l'instant t et r le taux de croissance constant. En résolvant l'équation différentielle, on obtient

$$x(t) = x(0)e^{rt} \quad (4.4)$$

où $x(0)$ est la taille initiale de la population au temps $t = 0$. La solution nous permet de conclure que la population croît à un rythme exponentiel. Il est clair que ce n'est pas vrai, car toutes les populations ne croissent pas de manière exponentielle.

Où se trouve donc la faille ?

Notez que le cadre de base du modèle repose sur l'hypothèse que la croissance de la population a lieu en l'absence de facteur limitant. Cependant, dans la réalité, les populations sont soumises à des contraintes telles que l'approvisionnement en nourriture, l'espace ou l'habitat, qui restreignent la gamme des tailles de population durables. Ainsi, la pertinence du modèle dépend de toutes les hypothèses qui ont été formulées pour construire le cadre de base du modèle. Le modèle de croissance est représenté par une équation différentielle, ce qui implique que nous avons supposé que la croissance a lieu de manière continue. Supposons que la population se compose de générations discrètes, il conviendrait alors de représenter le modèle de croissance par l'équation aux différences suivante

$$x_{n+1}(t) = rx_n(t) \quad (4.5)$$

où $x_n(t)$ est la taille de la n -ième génération à tout moment t . La solution de l'équation de différence proposée est la suivante

$$x_n(t) = x_0 r^n \quad (4.6)$$

où x_0 est la population initiale.

Dans les deux cas (continu et discret), nous supposons que la population se comporte selon une loi déterministe. Cependant, si nous supposons que le modèle est aléatoire, nous pouvons intuitivement nous attendre à ce que la variabilité stochastique soit importante. Dans ce cas, le modèle serait représenté par une équation différentielle stochastique.

Une autre hypothèse que nous avons faite en formulant le modèle simple de croissance de la population est que la population est uniformément distribuée dans l'espace et n'a

pas de contact avec d'autres populations. Pour obtenir le cadre de base d'un tel modèle, nous devons introduire un modèle spatialement explicite avec des taux décrivant le mouvement des individus d'une zone à l'autre. En d'autres termes, si nous nous intéressons à la distribution spatiale de notre population, nous devons représenter le modèle par une équation différentielle partielle avec un terme de diffusion.

''' Ainsi, nous constatons que pour obtenir un modèle simple de croissance de la population, combien d'hypothèses différentes doivent être faites. C'est pourquoi nous devons procéder avec une extrême prudence lorsque nous formulons des modèles de systèmes complexes. Pour obtenir un résultat proche de la réalité, il est souvent conseillé d'examiner différentes versions (par exemple, déterministe, stochastique, spatiale) basées sur le même modèle de base et de comparer les résultats dérivés du modèle.

4.1.6.3 Étape 3 : chémas ou diagrammes de flux

Considérons un modèle Susceptibles-Infectés-Guériss-Susceptibles (SIRS), dans lequel une personne sensible à une maladie particulière est infectée à un taux α lorsqu'elle entre en contact avec une personne infectée. De la classe des personnes infectées, une personne est guérie à un taux β et passe à la classe des personnes guéries. La personne guérie est également sensible à la maladie à un taux δ . Le schéma de ce scénario est présenté à la figure 4.1.

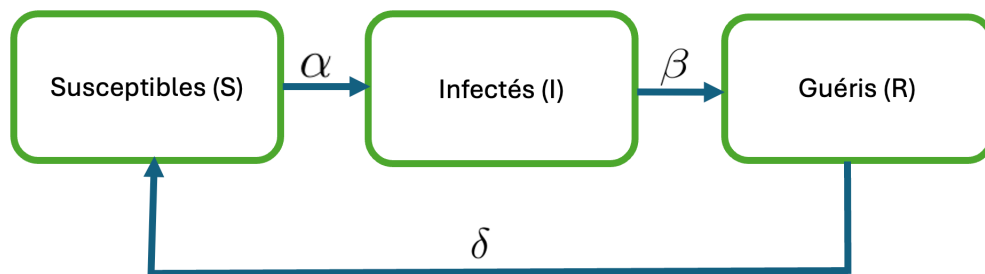


FIGURE 4.1 – Schéma du modèle Sensibles-Infectés-Guériss-Sensibles (SIRS).

4.1.6.4 Étape 4 : choix des équations mathématiques

Une fois que la structure du modèle a été décidée, il est possible de choisir les équations mathématiques appropriées. Un bon point de départ serait de rechercher des équations dans la littérature, où quelqu'un d'autre peut avoir publié une équation relative aux quantités qui vous intéressent. Mais il faut procéder avec prudence, car les équations de la littérature peuvent ne pas être exprimées exactement sous la forme requise pour le modèle.

4.1.6.5 Étape V : résolution d'équations)

En général, il est rare d'obtenir une solution analytique du modèle mathématique d'un problème réel. Si le modèle consiste en un système linéaire d'équations différentielles, ou si le modèle consiste en une seule équation différentielle (même non linéaire), il y a de *bonnes*

chances d'obtenir des solutions analytiques (mais pas toujours!). Cependant, lorsque les modèles contiennent un système d'équations différentielles non linéaires, il est difficile de les résoudre analytiquement. Nous utilisons alors des méthodes numériques pour obtenir des solutions approximatives, qui ne peuvent jamais avoir la même généralité que les solutions analytiques, mais les solutions numériques du modèle simulent généralement le processus décrit dans le modèle.

4.1.6.6 **tape VI : interprétation du résultat**

Au début, avant la formulation du modèle, vous avez posé une question sur la base de laquelle le modèle a été construit. En examinant la solution des variables du modèle, le comportement du modèle peut être décrit. En fait, vous devez reformuler les résultats de l'étape 5 en termes non techniques, c'est-à-dire en termes de question posée. Toute personne capable de comprendre l'énoncé de la question tel qu'il vous a été présenté à l'origine devrait être en mesure de comprendre votre réponse.

4.1.7 **Exemples élémentaires de modèles mathématiques et fonctions**

L'objectif de cette section est d'examiner les différents types de fonctions, leur comportement et la manière dont elles peuvent être utilisées pour représenter une situation réaliste. Lorsque nous écrivons une fonction pour représenter une situation et que nous utilisons une fonction pour déterminer les aspects clés d'une situation (par exemple, comment minimiser la surface d'une boîte ou minimiser son volume), nous nous engageons dans une modélisation mathématique.

4.1.7.1 **Modèles linéaires**

Considérons la situation suivante : une personne a emprunté 200 dollars à un ami et s'engage à les lui rendre à un taux constant de 25 dollars par mois. Nous pouvons considérer cette situation comme un modèle linéaire comme suit

$$y(t) = -25t + 200, \quad (4.7)$$

où t représente le nombre de mois nécessaires pour rembourser la dette et $y(t)$ est le montant restant après avoir remboursé chaque mois. La fonction est linéaire en raison du taux de variation constant, c'est-à-dire du rendement constant de 25\$ par mois. Il est clair que la totalité de la dette est remboursée en 8 mois ($y(t) = 0$). Ainsi, les fonctions linéaires sont utilisées pour modéliser une situation de changement constant, qu'il s'agisse d'une augmentation ou d'une diminution.

4.1.7.2 **Modèles quadratiques**

Considérons une situation dans laquelle une personne se tient sur une plate-forme à 10m du sol. Cette personne lance une balle en l'air avec une vitesse initiale de $2m/s$, de manière à ce qu'elle atterrisse sur le sol (et non sur la plate-forme). Les questions évidentes sont les suivantes : (i) quelle sera la hauteur de la balle ? (ii) quand atteindra-t-elle le sol ? et (iii) quand atteindra-t-elle sa hauteur maximale ? Nous pouvons modéliser

cette situation à l'aide d'une fonction de la forme

$$h(t) = -gt^2 + v_0t + h_0, \quad (4.8)$$

où v_0 est la vitesse initiale de la balle, h_0 est la hauteur initiale de la balle, g est la constante gravitationnelle, qui tire la balle vers le bas et est donc négative, la variable t représente le temps et $h(t)$ est la hauteur au-dessus du sol (voir figure ??).

Cela signifie que la balle atteindra la hauteur maximale de 10, 1m, 0, 1 seconde après avoir été lancée en l'air. Ainsi, une fonction quadratique dont le sommet est un maximum global peut être utilisée pour modéliser la chute d'un objet. De même, dans une situation où une quantité diminue puis augmente, une fonction quadratique dont le sommet est un minimum global peut être utilisée.

4.1.7.3 Modèles cubiques

Considérons une situation où une boîte rectangulaire est fabriquée en découpant des carrés dans les quatre coins d'un morceau de carton rectangulaire de dimensions 20 pouces par 12 centimètres. Soit x la longueur des carrés découpés dans les coins (figure 4.3). Le volume de la boîte est alors représenté par

$$V(x) = (20 - 2x)(12 - x)x = 4x^3 - 64x^2 + 240x = 4(x^3 - 16x^2 + 60x). \quad (4.9)$$

Si l'on veut découper un carré de 2cm de côté, le volume de la boîte sera $V(2) = 256cm^3$.

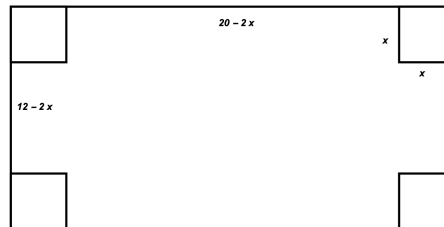


FIGURE 4.3 – La figure montre une boîte rectangulaire de 20 centimètres sur 12 centimètres, dont le coin a été coupé à x pouces de la longueur du carré.

Si l'on veut que le volume de la boîte soit de $100cm^3$, on met $V(x) = 100$, pour calculer x , ce qui implique $4x^3 - 64x^2 + 240x = 100 \Rightarrow x = 0,4751; 5; 10,5249$. Si nous prenons $x = 0,4751cm$ ou $5cm$, le volume sera d'environ $100cm^3$. Nous pouvons donc utiliser les fonctions cubiques pour modéliser des situations impliquant un volume. Elles peuvent également être utilisées pour modéliser des situations qui suivent des modèles de croissance particuliers.

4.2 Modèles en dynamique des populations

4.2.1 Dynamique d'une population

4.2.1.1 Fonction logistique et modèle de croissance logistique

Une fonction logistique ou une courbe logistique est donnée par

$$f(t) = \frac{k}{1 + e^{-r(t-t_0)}} \quad (4.10)$$

où k est la valeur maximale de la courbe, r est le taux de croissance logistique et t_0 est une valeur initiale. La courbe logistique a la forme d'un S et est également connue sous le nom de courbe sigmoïde.

Prenons le cas d'une population disposant de ressources abondantes et n'étant pas menacée par des prédateurs. Dans ce cas, le taux de croissance de la population est proportionnel à la population, c'est-à-dire,

$$\frac{dx}{dt} = rx; \quad (4.11)$$

où x est la densité de population à l'instant t et r la constante de proportionnalité (taux de croissance constant). La solution de l'équation différentielle est la suivante

$$x = x_0 e^{rt}$$

où x_0 est la densité de population à l'instant $t = 0$. La solution représente une croissance exponentielle (illimitée).

En réalité, la plupart des populations ont des ressources limitées. Pour mettre une contrainte sur la croissance illimitée (exponentielle), le terme de croissance (rx) doit être multiplié par un facteur $(1 - \frac{x}{k})$. Ce facteur est proche de 1 (pas d'effet) lorsque x est beaucoup plus petit que k et proche de zéro lorsque x est proche de k . Le modèle modifié est le suivant

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) \quad (4.12)$$

qui est connu sous le nom de modèle de croissance logistique ou modèle de Verhulst et dont la solution $x(t)$ est donnée par,

$$x(t) = \frac{kx_0}{x_0 + (k - x_0)e^{-rt}} \quad (4.13)$$

où x_0 est la densité de population à l'instant $t = 0$, r est le taux de croissance intrinsèque de la population et k est appelé capacité de charge (taille maximale de la population pouvant être atteinte avec les ressources disponibles) de la densité de population.

4.2.1.2 Fonction de Gompertz et modèle de croissance de Gompertz

La fonction de Gompertz ou courbe de Gompertz, nommée d'après Benjamin Gompertz, est une fonction sigmoïde. La fonction de Gompertz est représentée par l'équation différentielle du premier ordre suivante

$$\frac{dx}{dt} = rx \ln \left(\frac{k}{x} \right), \quad x(0) = x_0 \quad (4.14)$$

où $x(t)$ représente le nombre d'individus à chaque instant, x_0 est le nombre initial d'individus à l'instant $t = 0$, r est le taux de croissance intrinsèque de l'individu et k est la capacité de charge. La solution $x(t)$ est donnée par

$$x(t) = k \exp \left[\ln \left(\frac{x_0}{k} \right) e^{-rt} \right] \quad (4.15)$$

qui est la fonction de Gompertz ou la courbe de Gompertz. Elle a été dérivée pour estimer la mortalité humaine [6]. Cette fonction représente un modèle modifié pour une série temporelle, où la croissance est la plus lente au début et à la fin d'une période donnée. La figure 4.4 représente les courbes de la fonction logistique et celle de Gompertz solutions respectivement des équations 4.12 et 4.14.

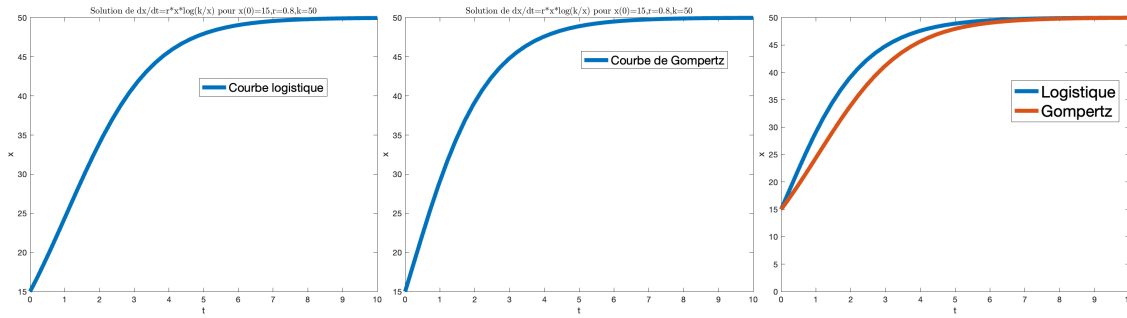


FIGURE 4.4 – Courbes logistique et de Gompertz pour $x_0 = 15$, $r = 0,8$ et $k = 50$ ainsi que leur comparaison.

4.2.1.3 Réponses fonctionnelles dans la dynamique des populations

Crawford Stanley Holling, un écologiste canadien, a introduit le terme de « réponse fonctionnelle » pour décrire le changement du taux de consommation des proies par un prédateur lorsque la densité des proies varie. Une façon simple de le constater est de tracer le nombre de proies consommées par unité de temps en fonction de la densité des proies.

7.6.1 Réponse fonctionnelle de type I de Holling

S'il existe une relation linéaire entre le nombre de proies consommées et la densité des proies, Holling a proposé une réponse fonctionnelle de type I. On suppose simplement que la probabilité qu'un prédateur donné rencontre une proie dans un intervalle de temps fixe T , dans une région spectrale fixe, dépend linéairement de la densité de la proie [6]. Si X est le nombre de proies consommées par un prédateur, alors

$$Y = aT_s X$$

où X est la densité des proies, T_s est le temps de recherche et a est la constante de proportionnalité ou le taux de découverte tel que défini par Holling.

Si nous négligeons le temps de manipulation (temps passé à manipuler la proie), alors tout le temps a été utilisé pour la recherche, ce qui implique $T_s = T$. Si P est la densité du prédateur agissant indépendamment, le nombre total de proies sera réduit d'une quantité

$$Y = (aT_s X)P$$

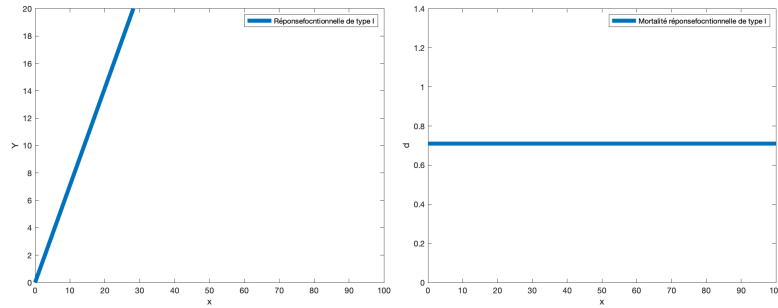


FIGURE 4.5 – La figure montre le tracé de (a) la réponse fonctionnelle de type I de Holling et (b) la mortalité des proies $d = Y/X$. Les valeurs des paramètres sont $a = 0,71$ et $T_s = T = 1$.

et on obtient la réponse fonctionnelle du type I.

7.6.2 Réponse fonctionnelle de type II de Holling

Nous supposons maintenant que chaque prédateur a besoin d'un temps de manipulation b (à partir du moment où le prédateur trouve sa proie jusqu'au moment où la proie est consommée par le prédateur, ce qui inclut la poursuite, la mise à mort, la consommation et la digestion) pour chaque proie consommée, alors le temps de recherche du prédateur est réduit, ce qui est donné par la formule suivante

$$T_s = T - bY$$

En utilisant la réponse fonctionnelle de type I, nous obtenons

$$Y = aT_sX = a(T - bY)X \Rightarrow Y = aTX - abXY \Rightarrow Y = \frac{aTX}{1 + abX}$$

Par conséquent, le nombre total de proies a diminué de la quantité $\frac{aTX}{1+abX}$ et nous avons une réponse fonctionnelle de type II.

Dans la réponse fonctionnelle de type II de Holling, le taux de recherche est constant et la mortalité des proies diminue avec leur densité (voir deuxième graphe de la figure 4.6). Les dommages maximaux de ce type de prédation se produisent lorsque la densité des proies est faible. Par exemple, lorsque la population de spongieuses est clairsemée, les oiseaux et les petits mammifères détruisent la plupart des chrysalides, alors qu'ils n'en tuent qu'une proportion négligeable lorsque la population de spongieuses est dense.

7.6.3 Réponse fonctionnelle de type III de Holling

La réponse fonctionnelle de type III est la généralisation de la réponse fonctionnelle de type II. Elle est donnée par

$$Y = \frac{aTX^k}{1 + abX^k}.$$

Cette forme fonctionnelle est généralement utilisée par les écologistes théoriques pour étudier l'effet de k sur la dynamique des communautés et des populations, en faisant varier son ampleur. Dans d'autres contextes, $k = 2$ est l'hypothèse générale (voir figure 4.7). De nombreux prédateurs réagissent aux substances chimiques émises par les proies et augmentent leur activité de recherche. La réponse fonctionnelle de type III est utilisée dans le cas de ces prédateurs, qui augmentent leur activité de recherche avec l'augmentation de la densité des proies. Dans ce type de réponse fonctionnelle, la mortalité augmente d'abord avec l'augmentation de la densité des proies, puis diminue (voir figure 4.7).

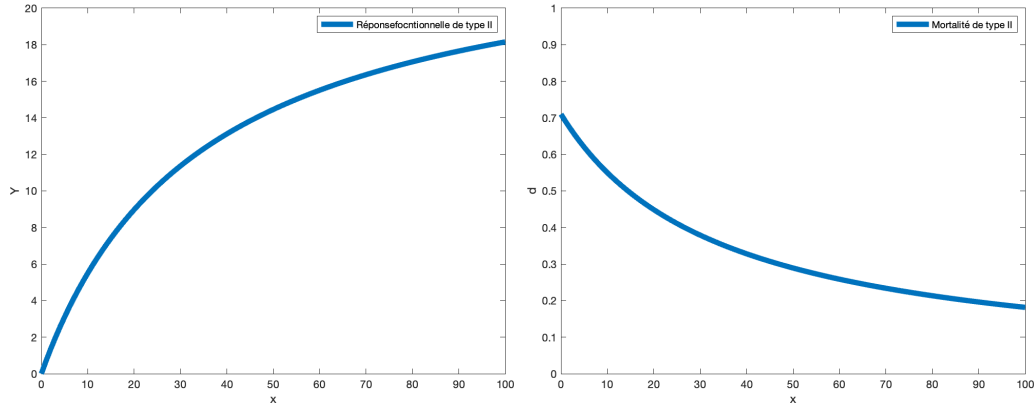


FIGURE 4.6 – La figure montre le tracé de (a) la réponse fonctionnelle de type II de Holling et (b) la mortalité des proies $d = Y/X$. Les valeurs des paramètres sont $a = 0,71$; $b = 0,041$ et $T = 1$.

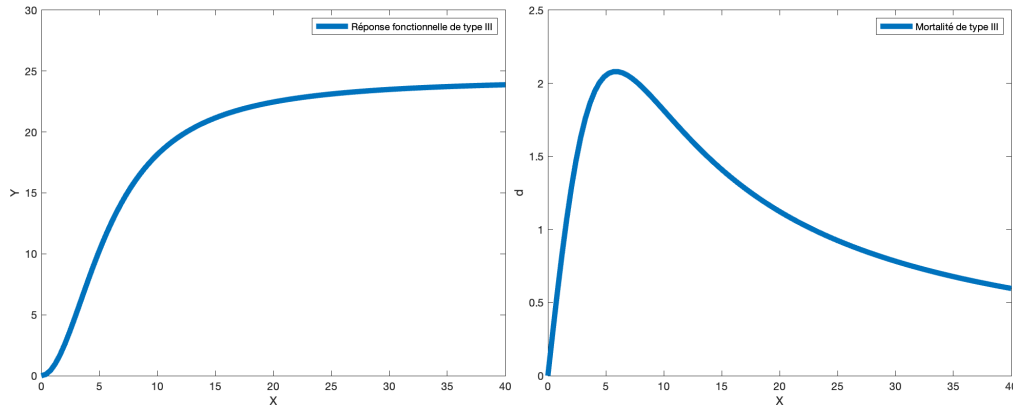


FIGURE 4.7 – La figure montre le tracé de (a) la réponse fonctionnelle de Holling Type III et (b) la mortalité des proies $d = Y/X$ pour $k = 2$. Les valeurs des paramètres sont $a = 0,7$; $b = 0,041$ et $T = 1$.

4.2.2 Modèle de croissance avec effet "Allee"

Le contenu de cette section et celle qui suit peut être consultée dans [2]. Soit l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dx}{dt} = rx(x - M)(K - x) = f(x)$$

avec $0 < M < K$.

Cette équation admet trois points d'équilibre, l'origine, M et K . La dérivée de la fonction $f(x)$ est la suivante :

$$\frac{df}{dx} = r(-3x^2 + 2(M + K)x - MK)$$

A l'origine, cette dérivée vaut $-rMK < 0$. Elle prend les valeurs $rM(K - M) > 0$ en M et $rK(M - K) < 0$ en K . En conséquence, l'origine et K sont stables alors que l'équilibre intermédiaire M est instable. La figure 4.8 montre le portrait de phase correspondant à cette équation.

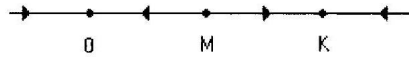


FIGURE 4.8 – Portrait de phase correspondant à l'effet Allee. L'origine et K sont stables. L'équilibre intermédiaire M est instable.

La figure 4.9 présente les chroniques de l'équation 4.2.2. On observe un effet seuil. Pour une condition initiale $0 < x_0 < M$ la population décroît et va à l'extinction, alors que pour une condition initiale au-dessus de ce seuil, $x_0 > M$, la population tend vers la capacité limite K . Cet effet est connu en dynamique de population sous le nom d'effet "Allee". Il correspond à des populations qui ne sont viables qu'à partir d'un certain seuil limite en effectif.

Exercice. Étudier la loi de croissance d'une population dont le taux de croissance est

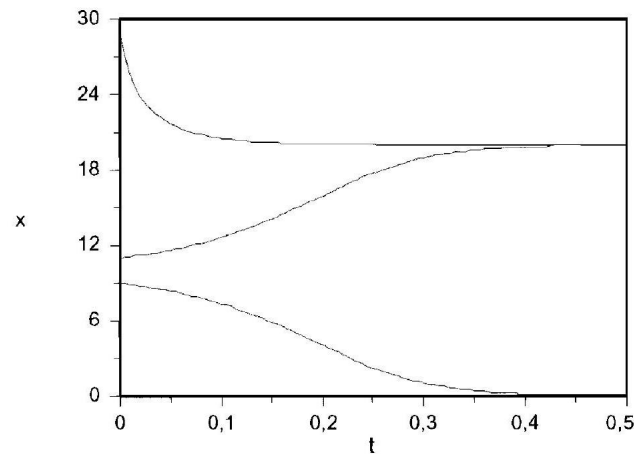


FIGURE 4.9 – Chroniques de l'équation de croissance d'une population avec effet Allee obtenues pour $r = 0.1$, $M = 10$ et $K = 20$.

supposé être proportionnel à la densité de la population :

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x^2$$

Dans ce cas, on fait l'hypothèse que la loi de croissance est proportionnelle au taux de rencontre entre les individus, ce qui correspond par exemple à une reproduction sexuée. Démontrer que la densité de la population tend vers l'infini au bout d'un temps fini.

→ Solution Soit $x(0)$ la condition initiale. Réécrivons l'équation en séparant les variables. Il vient :

$$\frac{dx}{x^2} = \alpha dt$$

Après intégration nous avons :

$$\frac{1}{x(0)} - \frac{1}{x(t)} = \alpha t$$

et finalement :

$$x(t) = \frac{x(0)}{1 - \alpha x(0)t}$$

On voit donc que la population tend vers l'infini au bout d'un temps fini T_∞ :

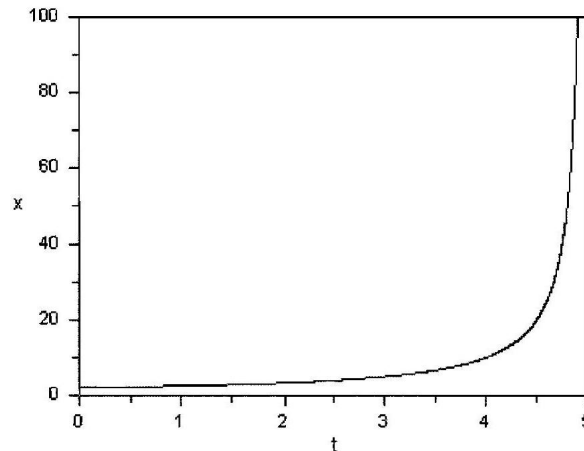


FIGURE 4.10 – Croissance d'une population avec reproduction sexuée, $\alpha = 0.1$, $x(0) = 2$. La population tend vers l'infini pour $T_\infty = 1/\alpha x(0) = 5$.

$$T_\infty = \frac{1}{\alpha x(0)}$$

La figure 4.10 présente la solution pour une condition initiale $x(0) = 2$ et avec $\alpha = 0.1$. On constate que la population tend vers l'infini pour $t \rightarrow T_\infty = 5$.

Exercice. Étudier la loi de croissance d'une population dont le taux de croissance est supposé être proportionnel à la densité de la population avec un taux de mortalité constant m selon l'équation suivante :

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x^2 - mx$$

Rechercher les équilibres et déterminez leur propriété de stabilité locale. Dessiner l'allure des solutions.

Solution. Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que l'allure des solutions est conforme à la figure 4.11.

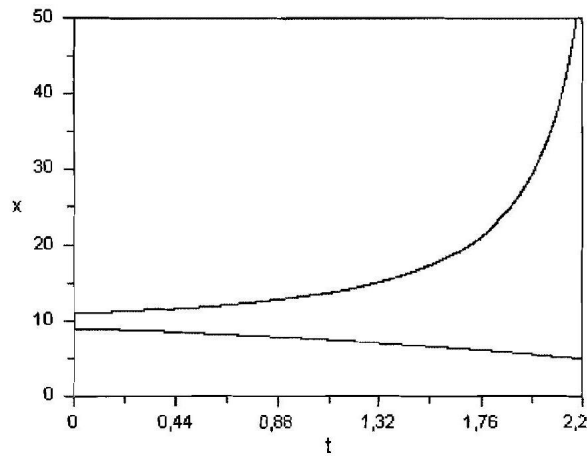


FIGURE 4.11 – Croissance d’une population avec reproduction sexuée et mortalité naturelle.

Exercice. Étudier la loi suivante de croissance d’une population :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha x}{N + x} - mx$$

Rechercher les équilibres et déterminez leur propriété de stabilité locale.

⇒ .

Solution. Les équilibres sont 0 et $x^* = \frac{\alpha}{m} - N$. Lorsque $\alpha > mN$ l’origine est instable et l’équilibre x^* positif et stable. L’effectif de la population tend dans ce cas vers une valeur constante. Au contraire, lorsque $\alpha < mN$ l’origine est stable et l’équilibre x^* est négatif : la population s’éteint.

4.2.2.1 Dynamique d’une population exploitée

Pour simplifier, nous allons supposer qu’en absence d’exploitation, la population obéit à l’équation logistique avec un taux de croissance r et une capacité limite K . L’exploitation de la population, par pêche ou par chasse par exemple, conduit à ajouter un terme négatif dans l’équation. Ce terme correspond à l’effectif prélevé par unité de temps par l’exploitation. Nous allons traiter deux cas possibles.

a) Exploitation à effort constant

La solution la plus simple consiste à ajouter un terme négatif proportionnel à l’effectif :

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - Ex$$

où $E > 0$ est l’effort d’exploitation, par exemple l’effort de pêche. Un calcul simple permet de réécrire l’équation sous la forme suivante :

$$\frac{dx}{dt} = \rho x \left(1 - \frac{x}{\Psi}\right)$$

avec $\rho = r - E$, et $\Psi = K \left(1 - \frac{E}{r}\right)$.

On retrouve donc un modèle de type logistique et deux cas sont possibles :

- $\rho < 0$, c'est-à-dire $E > r$. Le seul équilibre non négatif est l'origine, qui est stable. L'effort est supérieur au taux de croissance intrinsèque de la population. Tous les termes de l'équation sont négatifs. La population est surexploitée et disparaît.
- $\rho > 0$, c'est-à-dire $E < r$. Il y a deux équilibres, l'origine et $\Psi > 0$. L'origine est instable mais $\Psi < K$ est stable. Dans ce cas, l'équation est équivalente à une équation logistique dont l'équilibre Ψ est bien sûr inférieur à l'équilibre K obtenu en l'absence d'exploitation.

La figure 4.12 montre les solutions sans exploitation et avec un effort d'exploitation inférieur ou supérieur au taux de croissance de la population.

Il est usuel de rechercher la condition optimale d'exploitation, c'est-à-dire la valeur de E

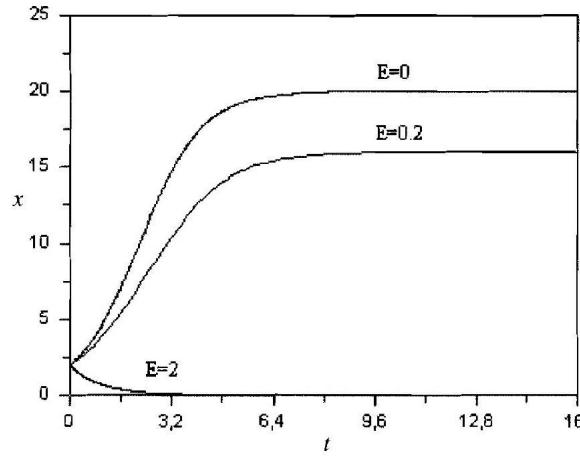


FIGURE 4.12 – Chronique d'une population exploitée avec effort constant $E.r = 1$, $K = 20$.

qui maximise la capture à l'équilibre $Y(E) = E\Psi = EK \left(1 - \frac{E}{r}\right)$. Cet effort d'exploitation optimal doit annuler la dérivée de $Y(E)$. Il est donc donné par l'expression suivante :

$$E_{opt} = \frac{r}{2}.$$

La capture optimale est alors donnée par la valeur suivante :

$$Y(E_{opt}) = \frac{rK}{4}.$$

b) Exploitation à prélèvement constant Une autre hypothèse consiste à effectuer un prélèvement constant par unité de temps, ce qui correspond à la notion de quota :

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - Q = f(x, Q)$$

où $Q > 0$, est le quota par unité de temps.

Les points d'équilibre sont solutions de l'équation du second degré suivante :

$$rx^2 - rKx + KQ = 0$$

L'existence et le nombre d'équilibres dépend du signe du discriminant de cette équation, $\Delta = r^2 K^2 - 4rKQ$. Deux cas peuvent se produire :

$-Q > \frac{rK}{4}$, le discriminant est négatif. Il n'y a aucun équilibre, $\frac{dx}{dt} < 0$ et donc la population est surexploitée et va à l'extinction.

$-Q < \frac{rK}{4}$, le discriminant est positif. Il est facile de voir que dans ce cas il apparaît deux points d'équilibre strictement positifs. Pour s'en assurer, on peut se souvenir que la fonction $f(x, 0)$ correspond à l'équation logistique, c'est-à-dire à une parabole tournée vers les x négatifs. L'exploitation de la population revient à retrancher un terme constant Q à cette fonction :

$$f(x, Q) = f(x, 0) - Q.$$

Il est clair qu'en augmentant progressivement la valeur de Q à partir de 0, l'origine se déplace vers les x positifs et K vers les x négatifs.

En conséquence, dans ce cas nous obtenons deux équilibres positifs $x_1^* < x_2^*$, dont le premier est instable et le second stable (figure 4.2.2.1). De cette manière, on voit que l'exploitation par quota induit un effet de type "Allee". En effet, pour toute condition initiale $0 < x(0) < x_1^*$ la population va tendre vers 0, c'est-à-dire aller à l'extinction.



FIGURE 4.13 – Portrait de phase correspondant à une population obéissant à une logistique et exploitée par quota. L'origine et K ne sont pas des équilibres. Les équilibres sont notés avec des cercles pleins.

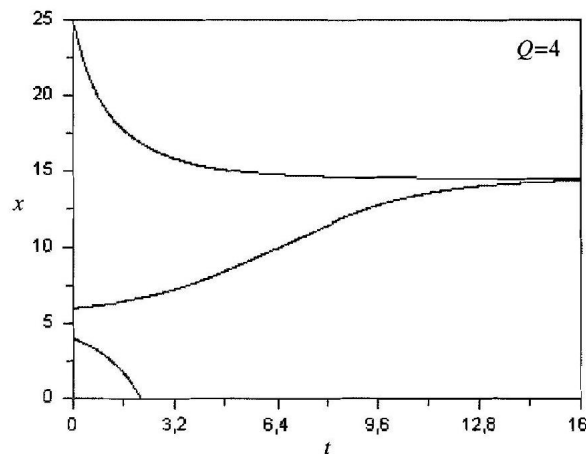


FIGURE 4.14 – Chroniques d'une population exploitée avec un quota constant. $r = 1$, $K = 20$.

Pour $x(0) > x_1^*$ la population va tendre vers sa capacité limite K . La figure 4.14 présente les chroniques obtenues avec une valeur du quota donnée mais différentes valeurs de l'effectif initial de la population $x(0)$. On voit qu'au-dessous d'un certain seuil la population tend vers 0 en un temps fini.

En conclusion, ces deux modèles très simples d'exploitation d'une population suggèrent qu'il serait préférable de procéder à un prélèvement par effort constant plutôt que par

quota pour éviter l'induction d'un effet de type «Allee» qui pourrait provoquer l'extinction de la population si celle-ci passe au-dessous d'un certain seuil. De nombreux modèles plus réalistes prenant par exemple en compte la structure en âge de la population ont été également développés mais que nous ne présenterons pas dans cette section.

4.2.3 Deux populations en interactions

Considérons maintenant le cas de deux populations d'effectifs respectifs $x(t)$ et $y(t)$ en interaction. Le modèle dynamique de deux populations en interaction est un système de deux équations différentielles ordinaires couplées. D'une manière assez générale, il est usuel de décomposer chaque équation en une somme de deux termes, le premier terme correspondant à la croissance de la population isolée et le second terme représentant les interactions entre les deux populations :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + h(x, y), \\ \dot{y} &= g(y) + k(x, y).\end{aligned}$$

Ainsi, les fonctions $f(x)$ et $g(y)$ représentent les croissances des populations isolées et ne dépendent que de l'effectif de cette population alors que les termes $h(x, y)$ et $k(x, y)$ correspondent aux interactions entre les populations et dépendent des effectifs des deux populations. Si la population d'effectif x vit dans un milieu avec une ressource limitée, on choisira par exemple une fonction de croissance de type logistique :

$$f(x) = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

où r et K sont respectivement le taux de croissance et la capacité limite du milieu. Si la population d'effectif y est caractérisée par une mortalité naturelle avec un taux constant m , on choisira :

$$g(y) = -my.$$

Le choix des fonctions $h(x, y)$ et $k(x, y)$ dépend de la nature de l'interaction entre les deux populations. On distingue des interactions positives (resp. négatives) qui favorisent (resp. défavorisent) la croissance d'une population. Les signes des fonctions $h(x, y)$ et $k(x, y)$ rendent compte de ce caractère favorable ou non à la croissance. Plusieurs cas sont possibles :

$(-, -)$: chaque population exerce un effet négatif sur la croissance de l'autre. C'est le cas de la compétition interspécifique.

$(+, -)$ ou $(-, +)$: une population a un effet positif sur la croissance de l'autre mais on a l'effet inverse dans l'autre sens. Il s'agit par exemple des relations proie-prédateur ou encore hôte-parasite.

$(+, +)$: chaque population favorise la croissance de l'autre population. C'est le cas du *mutualisme* ou encore de la *symbiose*.

Il existe aussi des cas du type $(0, +)$, $(+, 0)$ ou $(0, -)$, $(-, 0)$ habituellement appelés *commensalisme* et *amensalisme*. Dans le cas de la prédation, il est usuel de considérer que les proies et les prédateurs se déplacent en explorant leur milieu au hasard. Cela conduit à un modèle de type

”action de masse” où le nombre moyen de rencontres entre les deux populations est proportionnel au produit des effectifs. De ce fait, on doit avoir un terme négatif dans l’équation de la proie, puisqu’il y a disparition des proies mangées par les prédateurs, du type :

$$h(x, y) = -axy$$

où a est un paramètre constant et positif qui rend compte de l’efficacité des prédateurs dans leurs attaques.

Une telle fonction de prédation est appelée une fonction de Lotka-Volterra ou encore de type I. Dans l’équation du prédateur, on doit s’attendre à un terme positif de même forme car les proies tuées sont assimilées par les prédateurs et leur permettent de maintenir la croissance de leur population. Cela conduit par exemple à :

$$g(x, y) = -eh(x, y) = eaxy$$

qui signifie que la biomasse (ici l’effectif) des proies tuées se trouve transformée en biomasse (effectif) du prédateur avec une certaine efficacité dont rend compte le paramètre constant e , appelé couramment le rendement de conversion de la biomasse proie en biomasse prédateur.

Avec les hypothèses précédentes, on obtiendrait finalement le modèle suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - axy \\ \dot{y} &= -my + eaxy\end{aligned}$$

Ce modèle est un modèle classique proie-prédateur que nous allons étudier par la suite. Pour commencer, nous allons étudier le modèle proie-prédateur le plus simple : le modèle de Lotka-Volterra.

4.2.3.1 Modèle de Lotka-Volterra

Ce modèle fait l’hypothèse qu’en absence de prédateurs, la croissance des proies est illimitée, soit :

$$f(x) = rx$$

dont la solution est $x(t) = x(0) \exp rt$, avec $r > 0$ le taux de croissance des proies. Le modèle suppose une mortalité naturelle du prédateur qui ne peut donc pas survivre en absence de proie :

$$g(y) = -my,$$

dont la solution est $y(t) = y(0) \exp(-mt)$, où $m > 0$ est le taux de mortalité naturelle du prédateur. Ainsi, en l’absence du prédateur, les proies pulluleraient et leur effectif va donc pouvoir être régulé par les prédateurs. En absence de proies, les prédateurs disparaîtraient. Le couplage des deux populations par les termes de prédation peut avoir des effets stabilisateurs sur la dynamique globale du système des deux populations en interaction.

Dans ce modèle, il est aussi supposé que le terme d’interaction est un terme classique de Lotka-Volterra ou de type I que nous avons décrit précédemment. Avec ces hypothèses, le modèle de Lotka-Volterra s’écrit donc sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= rx - axy \\ \dot{y} &= -my + eaxy\end{aligned}$$

que nous pouvons réécrire, en factorisant, sous la forme :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(r - ay) \\ \dot{y} &= y(-m + bx)\end{aligned}$$

où nous posons $b = ea$. Le fait de pouvoir mettre x en facteur dans la première équation et y dans la seconde est important parce cela signifie que les axes sont isoclines zéros du système. En conséquence, aucune trajectoire ne peut couper ni l'axe des abscisses ni l'axe des ordonnées. Ainsi, toute trajectoire issue d'une condition initiale prise dans le cadran positif reste, pour tout $t > 0$, à l'intérieur de ce cadran. On dit que le cadran positif est positivement invariant. Ce résultat est important car les variables $x(t)$ et $y(t)$ sont des effectifs et doivent donc rester non négatives pour tout $t > 0$. Le modèle garantit donc qu'en choisissant une condition initiale acceptable, c'est-à-dire avec des effectifs initiaux positifs ($x(0) > 0, y(0) > 0$), les effectifs restent toujours par la suite positifs et ne puissent jamais devenir négatifs, ce qui n'aurait aucune signification du point de vue de la biologie.

Les isoclines zéro sont les suivantes :

$$\begin{aligned}\dot{x} = 0 &\Rightarrow x = 0 \text{ ou } y = \frac{r}{a} \\ \dot{y} = 0 &\Rightarrow y = 0 \text{ ou } x = \frac{m}{b}\end{aligned}$$

La figure 4.15 présente le graphe des isoclines du modèle de Lotka-Volterra avec le sens de la composante horizontale ou verticale du vecteur vitesse sur celles-ci. Il est très facile de voir que sur l'axe $x = 0$, on a pour $y > 0, \dot{y} = -my < 0$, ce qui veut dire que la composante verticale de la vitesse est négative. De la même manière, sur l'axe $y = 0$ on a, pour $x > 0, \dot{x} = rx > 0$, ce qui veut dire que la composante horizontale de la vitesse est positive. Ensuite, en appliquant les règles de continuité de la direction du vecteur vitesse aux intersections des isoclines de même nature et de changement de direction aux intersections des isoclines de nature différente, il est facile de déterminer le sens du vecteur vitesse partout sur les isoclines. La figure 4.16 présente les deux composantes du vecteur

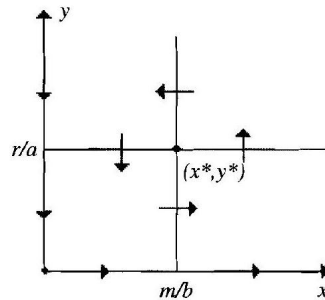


FIGURE 4.15 – Isoclines zéros du modèle classique de Lotka-Volterra.

vitesse (horizontale et verticale) dans chaque partie du plan définie par les isoclines. Cela permet de connaître la tendance globale dans chaque compartiment du plan, déplacement

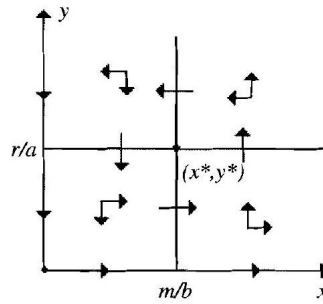


FIGURE 4.16 – Composantes du vecteur vitesse dans le cadran positif.

vers le haut ou le bas et à droite ou à gauche. La figure 4.17 présente le champ des vecteurs vitesse, plus précisément la direction des vecteurs vitesse dans le plan (x, y) . Les trajectoires sont tangentes à ces vecteurs en chaque point et on voit que les directions de la vitesse sont conformes à la figure 4.16. Le modèle de Lotka-Volterra admet deux

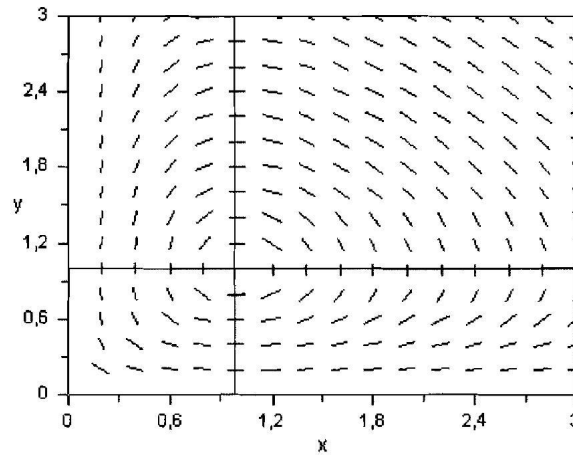


FIGURE 4.17 – Direction des vecteurs vitesse pour le modèle de Lotka-Volterra.

points d'équilibre, l'origine $(0, 0)$ correspondant à l'absence de proie et de prédateur, et un point (x^*, y^*) non trivial et appartenant au cadran positif tel que :

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{m}{b} \\ y^* &= \frac{r}{a} \end{aligned}$$

Pour connaître les propriétés de stabilité locale des équilibres, il faut calculer la matrice Jacobienne :

$$A = \begin{pmatrix} r - ay & -ax \\ by & -m + bx \end{pmatrix}.$$

En ce qui concerne l'origine, il vient :

$$A(0, 0) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix}$$

qui est une matrice diagonale et admet donc deux valeurs propres réelles distinctes $\lambda_1 = r > 0$ et $\lambda_2 = -m < 0$, de signes contraires. Il s'agit donc d'un point selle instable.

Pour le second équilibre, (x^*, y^*) , nous avons :

$$A(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} r - ay^* & -ax^* \\ by^* & -m + bx^* \end{pmatrix}$$

En substituant à x^* et y^* leurs valeurs en fonction des paramètres, nous obtenons :

$$A(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{ma}{b} \\ \frac{rb}{a} & 0 \end{pmatrix}$$

dont la trace est nulle et le déterminant $\det A = mr > 0$. Il s'agit donc d'un centre. Cependant, d'après le théorème de linéarisation, nous ne pouvons pas être certain qu'il existe réellement des trajectoires fermées entourant le point d'équilibre (x^*, y^*) . Pour démontrer que les trajectoires centrales existent bien, il est nécessaire de rechercher une intégrale première possédant un extremum au point (x^*, y^*) . Pour cela, éliminons le temps entre les deux équations du modèle, ce qui conduit à l'équation suivante :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x(r - ay)}{y(-m + bx)}.$$

Il s'agit d'une équation à variables séparées :

$$-m \frac{dx}{x} + bdx = r \frac{dy}{y} - ady$$

qui s'intègre facilement :

$$-m \ln x + bx = r \ln y - ay + \gamma$$

où γ est une constante d'intégration. On peut prendre comme intégrale première la fonction suivante :

$$H(x, y) = -m \ln x - r \ln y + bx + ay.$$

Il est clair que cette fonction admet un extremum en (x^*, y^*) . En effet, les dérivées partielles du premier ordre de la fonction H :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} &= -\frac{m}{x} + b \\ \frac{\partial H}{\partial y} &= -\frac{r}{y} + a \end{aligned}$$

s'annulent bien au point (x^*, y^*) . Les dérivées secondes sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} &= -\frac{m}{x^2} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} &= -\frac{r}{y^2} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} &= 0 \end{aligned}$$

et sont donc de même signe positif calculées au point d'équilibre. En conséquence, le développement limité au second ordre de la fonction $H(x, y)$ au voisinage de l'équilibre s'écrit sous la forme suivante :

$$H(x, y) = H(x^*, y^*) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right) (x - x^*)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) (y - y^*)^2.$$

Ainsi, le signe de $H(x, y) - H(x^*, y^*)$ est constant et positif au voisinage de l'équilibre (x^*, y^*) , ce qui veut dire que la fonction $H(x, y)$ présente un minimum local en ce point. Les trajectoires autour de cet équilibre sont les courbes de niveau de l'intégrale première et par conséquent se referment au voisinage de ce point. Nous pouvons donc maintenant affirmer que les trajectoires centrales sont bien conservées dans le modèle de Lotka-Volterra. La figure 4.18 présente le portrait de phase du modèle de Lotka-Volterra avec des trajectoires fermées autour de l'équilibre non trivial. La figure 4.19 présente les solutions $x(t)$ et $y(t)$ montrant un pic de pullulation des proies suivi d'un pic des prédateurs et ainsi de suite. Les solutions sont donc périodiques avec une période T qui est déterminée par la partie imaginaire des valeurs propres de la Jacobienne calculée à l'équilibre non trivial. La période vérifie donc la relation suivante :

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{mb}.$$

Les données concernant les effectifs des lynx et des lièvres recensés par la Compagnie de la baie d'Hudson sur une période assez longue confirment ce type de comportement dynamique. Le lynx est le prédateur des lièvres et se nourrit presque exclusivement de celui-ci. Des variations cycliques des effectifs de lièvres suivis d'un pic de l'effectif des lynx sont observées. Le modèle est donc capable de reproduire une dynamique analogue aux variations observées des effectifs des lièvres et des lynx.

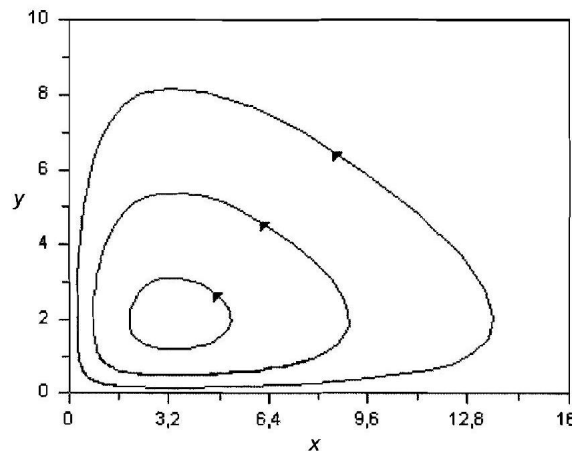


FIGURE 4.18 – Portrait de phase du modèle de Lotka-Volterra présentant des trajectoires fermées (centres) autour de l'équilibre (x^*, y^*) .

4.2.3.2 Modèle de Lotka-Volterra et croissance logistique

Nous avons vu que le modèle de Lotka-Volterra prévoit des centres, qui sont structuellement instables. Cela veut dire que les solutions périodiques que nous avons obtenues pour les effectifs des proies et des prédateurs ne sont pas conservées en général pour de petites perturbations de ce modèle. Pour cette raison, ce modèle n'est pas très satisfaisant. De plus, en absence de prédateur, la croissance des proies est illimitée ce qui est irréaliste.

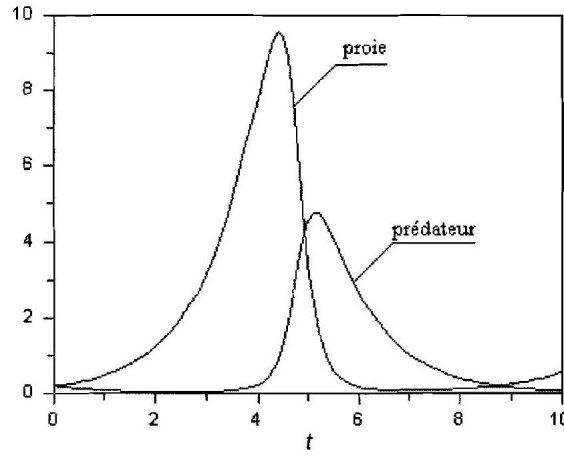


FIGURE 4.19 – Chroniques du modèle de Lotka-Volterra montrant un pic dans l'effectif des proies suivi d'un pic dans l'effectif des prédateurs.

On doit plutôt imaginer qu'en absence de prédateur, la population des proies doit atteindre un équilibre qui dépend des ressources disponibles dans le milieu. Par conséquent, une modification du modèle consiste à choisir une loi de croissance de type logistique pour la population des proies, ce qui conduit au modèle suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - axy \\ \dot{y} &= -my + bxy\end{aligned}$$

avec $K > 0$ la capacité limite du milieu. Nous constatons que le modèle peut à nouveau s'écrire en factorisant les variables x et y dans chacune des équations :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x \left(r \left(1 - \frac{x}{K}\right) - ay \right) \\ \dot{y} &= y(-m + bx)\end{aligned}$$

ce qui veut dire que comme dans le cas précédent, le cadran positif est positivement invariant. Les isoclines zéros sont les suivantes :

$$\begin{aligned}\dot{x} = 0 &\Rightarrow y = \frac{r}{a} \left(1 - \frac{x}{K}\right) \text{ ou } x = 0, \\ \dot{y} = 0 &\Rightarrow x = \frac{m}{b} \text{ ou } y = 0.\end{aligned}$$

Le sens des vecteurs vitesses sur les isoclines est très facile à obtenir puisqu'en absence de prédateur (soit sur l'isocline $y = 0$), l'effectif des proies augmente jusqu'à la capacité limite K et en absence de proie (soit sur l'isocline $x = 0$), l'effectif des prédateurs diminue. En conséquence, deux cas sont possibles et sont montrés sur la figure 2.16, les équilibres possibles se trouvant à l'intersection des isoclines horizontales et verticales :

1. $\frac{m}{b} < K$, il y a trois points d'équilibre $(0, 0)$, $(K, 0)$ et $(x^* = \frac{m}{b}, y^* = \frac{r}{a} (1 - \frac{m}{bK}))$ ce dernier point se trouvant dans le cadran positif.
2. $\frac{m}{b} > K$, il n'y a que deux points d'équilibre $(0, 0)$, $(K, 0)$. Il existe dans ce cas un troisième équilibre mais avec une composante négative n'ayant pas de sens biologique que nous oublions.

Pour connaître la stabilité des équilibres calculons la matrice Jacobienne associée au système :

$$A = \begin{pmatrix} r - \frac{2rx}{K} - ay & -ax \\ by & -m + bx \end{pmatrix}$$

Évaluons la partie linéaire du modèle à l'origine. Il vient :

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix}.$$

qui est un point selle instable.

En ce qui concerne, le point $(K, 0)$, la Jacobienne s'écrit :

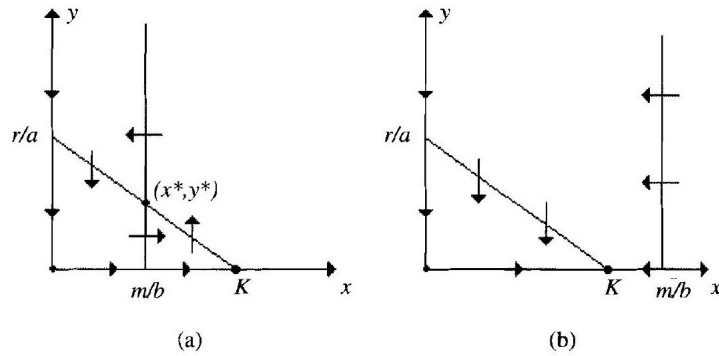


FIGURE 4.20 – Isoclines zéros du modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra avec croissance logistique des proies. (a) $Kb > m$. (b) $Kb < m$.

$$A(K,0) = \begin{pmatrix} -r & -aK \\ 0 & -m + bK \end{pmatrix}$$

qui admet deux valeurs propres :

$$\lambda_1 = -r < 0$$

$$\text{et } \lambda_2 = -m + bK$$

dont le signe dépend des valeurs des paramètres :

1. $\frac{m}{b} < K \Rightarrow \lambda_2 > 0$, les deux valeurs propres sont de signes contraires et l'équilibre $(K, 0)$ est point selle instable.
2. $\frac{m}{b} > K \Rightarrow \lambda_2 < 0$, les deux valeurs propres sont négatives et l'équilibre $(K, 0)$ est un nœud stable.

En ce qui concerne le point (x^*, y^*) , nous avons :

$$A(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} r - \frac{2rx^*}{K} - ay^* & -ax^* \\ by^* & -m + bx^* \end{pmatrix}.$$

Une première solution consisterait à remplacer les coordonnées de l'équilibre dans les équations. Cependant il est plus simple de revenir aux équations qui définissent cet équilibre :

$$\begin{aligned} r - \frac{rx^*}{K} - ay^* &= 0 \\ -m + bx^* &= 0 \end{aligned}$$

que nous pouvons injecter dans la matrice Jacobienne, ce qui conduit à une simplification :

$$A(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} -\frac{rx^*}{K} & -ax^* \\ by^* & 0 \end{pmatrix}$$

il vient alors de manière évidente :

$$\begin{aligned} \text{tr } A &= -\frac{rx^*}{K} \\ \det A &= abx^*y^*. \end{aligned}$$

Par conséquent, lorsque le point d'équilibre (x^*, y^*) se trouve dans le cadran positif, $x^* > 0$ et $y^* > 0$, et nous avons le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \text{tr } A &= -\frac{rx^*}{K} < 0 \\ \det A &= abx^*y^* > 0 \end{aligned}$$

ce qui assure la stabilité de cet équilibre.

La figure 4.21 montre le portrait de phase avec les trajectoires obtenues par simulation numérique dans le cas $\frac{m}{b} < K$, où les proies et les prédateurs coexistent à terme avec des effectifs constants (x^*, y^*) . La figure 4.22 fait de même dans le cas $\frac{m}{b} > K$, où les prédateurs sont éliminés et l'effectif des proies tend vers sa capacité limite K . L'introduction d'une loi de croissance logistique pour les proies à la place d'une croissance exponentielle a donc une conséquence importante sur la dynamique du système proie-prédateur en prévoyant la possibilité de l'extinction des prédateurs.

4.2.3.3 Modèle proie-prédateur de Holling

La forme assez générale, disons standard ou générique, d'un modèle proie-prédateur est la suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) - h(x, y) \\ \dot{y} &= g(y) + eh(x, y) \end{aligned}$$

où le signe négatif devant la fonction $h(x, y)$ indique que l'interaction avec les prédateurs a un effet négatif sur la croissance des proies. Le paramètre $e > 0$ est le taux de conversion de la biomasse des proies en biomasse des prédateurs. Il est usuel de considérer le nombre de proies tuées par un seul prédateur par unité de temps qui est aussi appelé la fonction réponse du modèle proie-prédateur. Dans le modèle ci-dessus, la fonction réponse $\Phi(x, y)$ est la suivante :

$$\Phi(x, y) = \frac{h(x, y)}{y}.$$

Dans le cas particulier du modèle de Lotka-Volterra, la fonction $h(x, y) = axy$ et il vient donc :

$$\Phi(x, y) = ax.$$

Cependant, il est évident que cette fonction réponse est irréaliste. En effet, Φ est proportionnelle à x , cela veut dire que le nombre de proies ingurgitées par un seul prédateur peut être très grand si x est grand. On doit plutôt s'attendre à une limitation du nombre de proies tuées et ingurgitées par un prédateur même-si la densité des proies est grande.

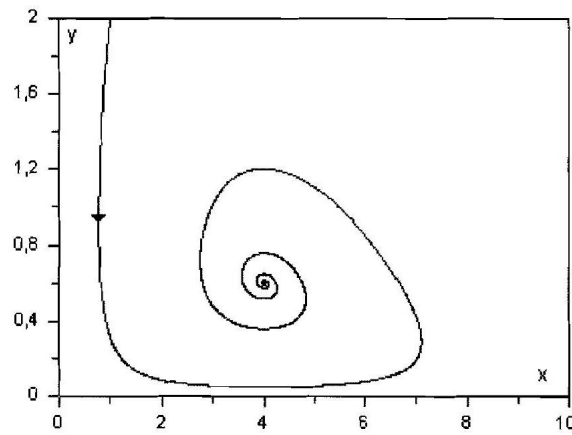


FIGURE 4.21 – Portrait de phase du modèle de Lotka-Volterra avec croissance logistique des proies. Cas où il y a coexistence des proies et des prédateurs, $r = 0.1$, $K = 10$, $a = 0.1$, $m = 0.2$, $b = 0.05$.

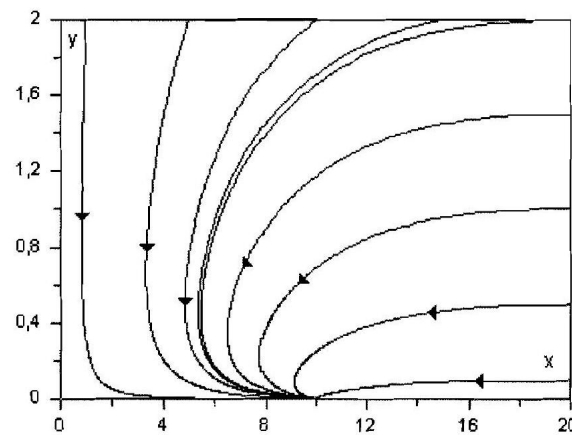


FIGURE 4.22 – Portrait de phase du modèle de Lotka-Volterra avec croissance logistique des proies. Cas où il y a exclusion des prédateurs, $r = 0.1$, $K = 10$, $a = 0.1$, $m = 0.2$, $b = 0.01$.

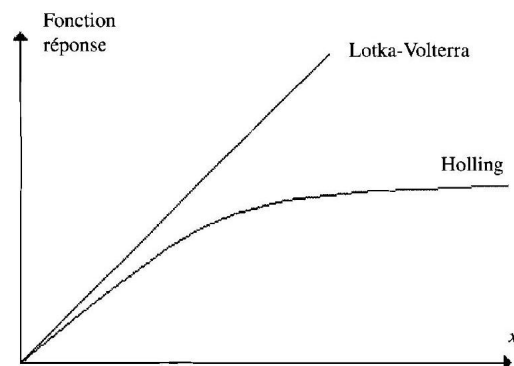


FIGURE 4.23 – Fonctions réponse de Lotka-Volterra et de Holling, cette dernière présentant un effet de saturation.

Les capacités physiologiques d'absorption de proies par un prédateur sont limitées, et

même si un grand nombre de proies est disponible, un prédateur ne pourra pas absorber un nombre de proies supérieur à cette limite. Il est donc plus réaliste de concevoir une fonction réponse présentant un effet de saturation avec la densité des proies, comme le montre la figure 4.23.

Une telle fonction réponse présentant un plateau pour les grandes densités de proies est dite fonction réponse de type II, en opposition à la fonction réponse de Lotka-Volterra appelée de type I. La fonction de type II dite de Holling est la suivante :

$$\Phi(x, y) = \frac{ax}{x + D}$$

où D est une constante positive. Avec une telle fonction réponse, et en conservant les hypothèses du modèle étudié dans la section précédente, nous obtenons le modèle prédateur-proie de Holling suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{axy}{x + D}, \\ \dot{y} &= -my + e \frac{axy}{x + D}.\end{aligned}$$

Posons à nouveau $b = ea$. Il vient :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{axy}{x + D} \\ \dot{y} &= -my + \frac{bxy}{x + D}.\end{aligned}$$

Dans ce modèle, le cadran positif est de nouveau positivement invariant. Afin de trouver les équilibres du modèle de Holling, recherchons les isoclines zéros :

$$\begin{aligned}\dot{x} = 0 &\Rightarrow y = \frac{r}{a} \left(1 - \frac{x}{K}\right) (x + D) \text{ ou } x = 0, \\ \dot{y} = 0 &\Rightarrow x = \frac{mD}{(b - m)} \text{ ou } y = 0.\end{aligned}$$

On supposera que $b > m$. Les deux axes sont à nouveau isoclines. L'isocline verticale suivante :

$$y = \frac{r}{a} \left(1 - \frac{x}{K}\right) (x + D)$$

est une parabole dont les branches sont dirigées vers le bas et coupant l'axe des x en deux points $(K, 0)$ et $(-D, 0)$, le second n'ayant pas de signification biologique. Il est bon de noter que le sommet de cette parabole qui annule la dérivée de l'équation de la parabole se trouve à la position $\hat{x}$:

$$\hat{x} = \frac{K - D}{2}.$$

Nous ferons l'hypothèse réaliste que $K > D$.

Deux cas de figures sont possibles (figure 4.24) :

1. $\frac{mD}{(b-m)} < K$, dans ce cas il y a trois points d'équilibres biologiques $(0, 0)$, $(K, 0)$ et (x^*, y^*) , ce dernier se trouvant dans le cadran positif.
2. $\frac{mD}{(b-m)} > K$, il y a deux points d'équilibres, $(0, 0)$ et $(K, 0)$, d'intérêt pour le modèle.

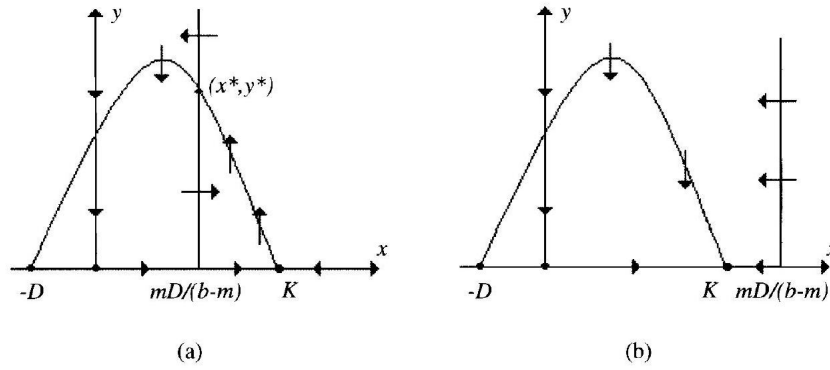


FIGURE 4.24 – Isoclines zéros du modèle de Holling. (a) $\frac{mD}{(b-m)} < K$, il existe un équilibre non trivial positif. (b) $\frac{mD}{(b-m)} > K$.

Pour connaître la stabilité des équilibres, il faut calculer la partie linéaire du système :

$$A = \begin{pmatrix} r - \frac{2rx}{K} - \frac{aDy}{(x+D)^2} & -\frac{ax}{x+D} \\ \frac{bDy}{(x+D)^2} & -m + \frac{bx}{x+D} \end{pmatrix}.$$

À l'origine, nous avons :

$$A(0, 0) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix}$$

qui est point selle.

Pour le point d'exclusion du prédateur, il vient :

$$A(K, 0) = \begin{pmatrix} -r & -\frac{aK}{K+D} \\ 0 & -m + \frac{bK}{K+D} \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont $\lambda_1 = -r < 0$, qui est toujours négative, et $\lambda_2 = -m + \frac{bK}{K+D}$, dont le signe dépend des valeurs des paramètres. Selon les cas précédents :

1. $\frac{mD}{(b-m)} < K$, alors $\lambda_2 > 0$ et l'équilibre $(K, 0)$ est point selle.
2. $\frac{mD}{(b-m)} > K$, alors $\lambda_2 < 0$ et l'équilibre $(K, 0)$ est un nœud stable.

Enfin, pour le dernier équilibre, nous avons :

$$A(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} r - \frac{2rx^*}{K} - \frac{aDy^*}{(x^*+D)^2} & -\frac{ax^*}{x^*+D} \\ \frac{bDy^*}{(x^*+D)^2} & -m + \frac{bx^*}{x^*+D} \end{pmatrix}.$$

Pour simplifier cette matrice, il est utile de se rappeler des conditions qui définissent cet équilibre :

$$\begin{aligned} r - \frac{rx^*}{K} - \frac{ay^*}{x^*+D} &= 0 \\ -m + \frac{bx^*}{x^*+D} &= 0 \end{aligned}$$

ce qui permet de simplifier la matrice comme suit :

$$A(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} r - \frac{2rx^*}{K} - \frac{aDy^*}{(x^*+D)^2} & -\frac{ax^*}{x^*+D} \\ \frac{bDy^*}{(x^*+D)^2} & 0 \end{pmatrix}$$

Sous cette forme, il est clair que le déterminant est toujours positif si le point appartient au cadran positif, car nous avons :

$$\det A = \frac{abDx^*y^*}{(x^*+D)^3} > 0$$

si $x^* > 0$ et $y^* > 0$.

La trace de la matrice s'écrit :

$$\text{tr } A = r - \frac{2rx^*}{K} - \frac{aDy^*}{(x^*+D)^2}$$

En injectant la valeur de y^* , il vient :

$$\text{tr } A = r - \frac{2rx^*}{K} - \frac{rD}{x^*+D} + \frac{rDx^*}{K(x^*+D)},$$

qui s'écrit après quelques calculs :

$$\text{tr } A = \frac{rx^*}{K} \frac{K - D - 2x^*}{x^* + D}.$$

Pour avoir stabilité de l'équilibre (x^*, y^*) il faut que cette trace soit négative, ce qui s'écrit :

$$\text{tr } A < 0 \Leftrightarrow x^* > \frac{K - D}{2}.$$

Rappelons que $\hat{x} = \frac{K-D}{2}$ est le sommet de la parabole qui est isocline verticale. En conséquence, si $x^* > \hat{x}$, c'est-à-dire le point d'équilibre se trouve après le sommet de la parabole, alors le point (x^*, y^*) est stable. Dans le cas contraire, il est instable (figure 4.25).

Lorsque le point (x^*, y^*) est instable, il est possible de choisir une boîte de PoincaréBen-

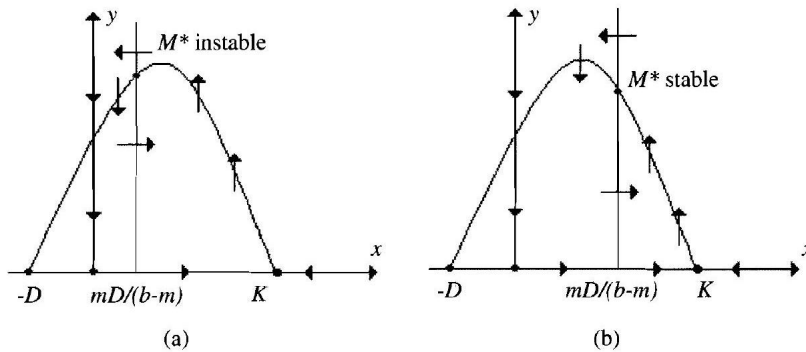


FIGURE 4.25 – Isoclines zéros du modèle de Holling. (a) Le point $M^* = (x^*, y^*)$ est instable. (b) Le point M^* est stable.

dixon (figure 4.26) permettant de conclure à l'existence d'un cycle limite stable. À partir d'une condition initiale A , avec une abscisse supérieure à K , on suit une trajectoire qui

va nécessairement venir intercepter la parabole en un point B en la coupant à la verticale vers le haut. On ferme la boîte en joignant B à A . Il est clair que la trajectoire pénètre dans la boîte au point B . De plus, sur le segment BA , il est évident que les deux composantes de la vitesse sont entrantes. En conséquence, nous avons fabriqué une boîte telle que toutes les trajectoires sont entrantes à sa frontière. Le point M^* étant le seul équilibre intérieur à la boîte et étant de plus instable, nous pouvons conclure par le théorème de Poincaré-Bendixson qu'il existe au moins un cycle limite totalement à l'intérieur de la boîte.

Il est également clair que ce système présente une bifurcation de Hopf puisque pour le point d'équilibre (x^*, y^*) nous avons le déterminant qui est positif, $\det A = \frac{abDx^*y^*}{(x^*+D)^3} > 0$, alors que la trace change de signe lorsque la droite verticale $x = \frac{mD}{(b-m)}$ qui est isocline horizontale traverse le sommet de la parabole $y = \frac{r}{a} \left(1 - \frac{x}{K}\right) (x + D)$ qui est isocline verticale. Lorsque le point (x^*, y^*) devient instable, il s'entoure donc d'un cycle limite stable. Finalement, trois portraits de phase sont possibles :

1. La figure 4.27 présente le cas où $x^* < \hat{x}$, il existe alors un cycle limite C stable. Après un temps permettant à la trajectoire de tendre vers le cycle limite, les effectifs des proies et des prédateurs varient périodiquement. Contrairement aux centres de Lotka-Volterra, l'amplitude du cycle limite est indépendante de la condition initiale. De plus, le cycle limite est structurellement stable.
2. Dans le cas où $K > x^* > \hat{x}$, les effectifs des prédateurs et des proies tendent vers des effectifs constants car le point (x^*, y^*) est asymptotiquement stable.
3. Enfin, dans le dernier cas où $x^* > K$, il y a extinction des prédateurs et l'effectif des proies tend vers sa capacité limite K .

Une variante du modèle de Holling est le modèle de Holling-Tanner :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{axy}{x + D}, \\ \dot{y} &= sy \left(1 - \frac{by}{x}\right).\end{aligned}$$

où s est une constante positive.

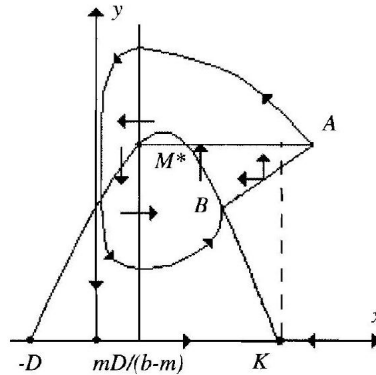


FIGURE 4.26 – "Boîte" de Poincaré-Bendixson entourant l'équilibre M^* instable.

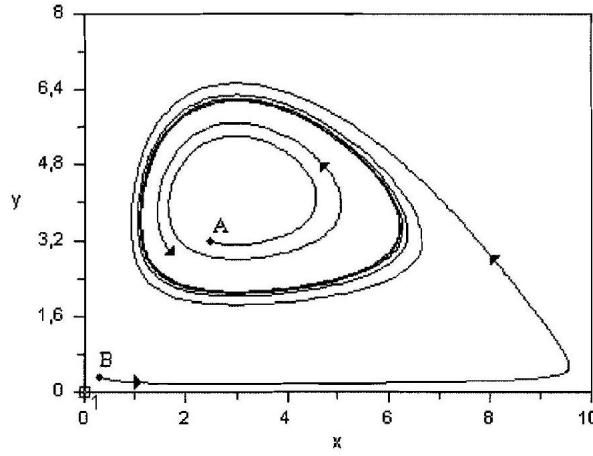


FIGURE 4.27 – Cas du cycle limite. $r = 0.1, K = 10, D = 3, a = b = 1, m = 1/2$. La trajectoire intérieure issue de A ainsi que la trajectoire extérieure issue de B spiralent vers le cycle limite.

Ce modèle fait l'hypothèse que l'effectif des prédateurs obéit à une équation de type logistique dont la capacité limite serait en quelque sorte proportionnelle à l'effectif de la proie. L'étude de ce modèle met en évidence un résultat très similaire au modèle de Holling étudié dans cette section.

4.2.3.4 Modèle proie-prédateur de Beddington

Dans le cas du modèle de Beddington, la fonction réponse s'écrit :

$$\Phi(x, y) = \frac{ax}{1 + bx + cy}$$

où a, b et c sont des constantes positives. Cette fonction réponse suppose une influence de la densité du prédateur sur le nombre de proies capturées par prédateur et par unité de temps. Il s'agit d'un effet négatif car la fonction réponse est une fonction décroissante de la densité de prédateurs. En utilisant cette fonction réponse et en supposant une croissance linéaire des proies en absence de prédateur et une mortalité naturelle des prédateurs en absence de proie, le modèle proie-prédateur de Beddington s'écrit :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= rx - \frac{axy}{1 + bx + cy}, \\ \dot{y} &= -my + e \frac{axy}{1 + bx + cy}.\end{aligned}$$

où r est le taux de croissance des proies et m le taux de mortalité des prédateurs. Les isoclines zéros verticales sont les suivantes :

$$\dot{x} = 0 \Rightarrow y = \frac{r}{a - rc}(1 + bx) \text{ ou } x = 0. \quad (4.16)$$

La première équation correspond à une droite coupant les axes en $(-\frac{1}{b}, 0)$ et en $(0, \frac{r}{a - rc})$. Les isoclines zéros horizontales sont données par les équations :

$$\dot{y} = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{mc}((ea - mb)x - m) \text{ ou } y = 0 \quad (4.17)$$

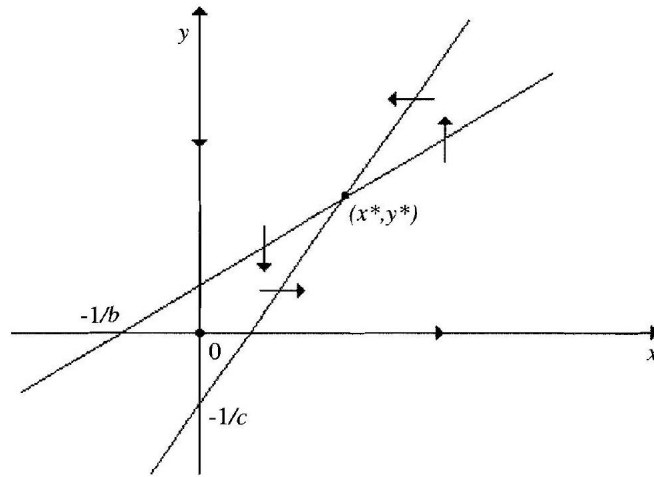


FIGURE 4.28 – Isoclines zéro du modèle de Beddington dans le cas où il existe un équilibre non trivial positif.

dont la première équation est encore une droite coupant les axes en $(\frac{m}{ea-mb}, 0)$ et en $(0, -\frac{1}{c})$.

Le cas que nous allons étudier correspond à l'existence d'un équilibre non trivial (x^*, y^*) dans le cadran positif. Les conditions sur les paramètres sont les suivantes :

$$a > rc \text{ et } \frac{ea}{mc} > \frac{rb}{a-rc} + \frac{b}{c}.$$

La seconde des deux inégalités précédentes revient à imposer une pente plus grande à l'isocline horizontale (4.17) que celle de l'isocline verticale 4.16. La figure 4.28 présente le schéma des isoclines du modèle de Beddington dans ces conditions. Il est trivial de vérifier que l'origine est point selle car la matrice Jacobienne à l'origine s'écrit :

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix}.$$

En ce qui concerne le point (x^*, y^*) , il vient après quelques calculs :

$$A(x^*, y^*) = \frac{1}{(1 + bx^* + cy^*)^2} \begin{pmatrix} aby^*x^* & -ax^*(1 + bx^*) \\ eay^*(1 + cy^*) & -eacy^*x^* \end{pmatrix},$$

dont le déterminant est strictement positif et la trace peut changer de signe :

$$\text{tr } A(x^*, y^*) = \frac{ay^*x^*(b - ec)}{(1 + bx^* + cy^*)^2}$$

En effet, nous avons :

1. Si $b > ec$, la trace est positive et l'équilibre est instable.
2. Si $b < ec$, la trace est négative et le point est stable.
3. Si $b = ec$, la trace s'annule et la partie linéaire correspond à un centre.

En conséquence, dans le modèle de Beddington, le déterminant est positif et la trace peut changer de signe lorsque b traverse la valeur ec . Il s'agit encore d'une bifurcation de Hopf. Cependant, dans ce cas, il s'agit en fait d'une bifurcation de Hopf dégénérée, c'est-à-dire sans apparition de cycle limite et avec conservation des centres à la bifurcation.

Pour démontrer l'existence des centres à la bifurcation, soit lorsque $b = ec$, il est possible de fabriquer une intégrale première $H(x, y)$ qui présente un extremum au point d'équilibre (x^*, y^*) . Cette intégrale première est donnée par l'expression suivante :

$$H(x, y) = eax - m \ln(x) + ay - r \ln(y) - bx - cy + \ln(bx + cy)$$

définie à une constante près.

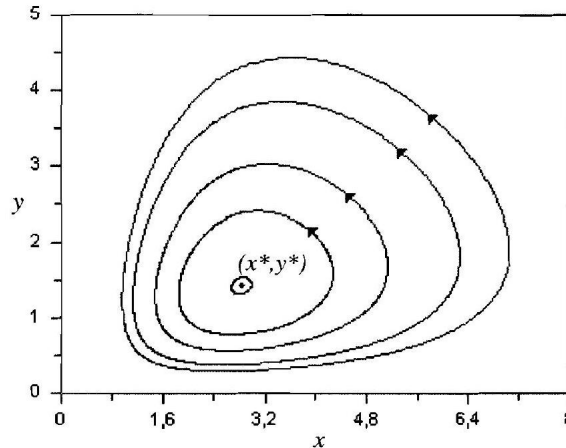


FIGURE 4.29 – Portrait de phase du modèle de Beddington lorsqu'il existe un équilibre non trivial positif, à la bifurcation. Les trajectoires sont des centres. $e = 1, r = a = b = c = 0.1$ et $m = 0.2$.

4.3 Applications en Épidémiologie

4.3.1 Introduction

Il y a longtemps que les scientifiques appliquent les mathématiques à la biologie, mais ce n'est que récemment qu'il y a eu un tel essor, pour différentes raisons [1, 5] :

- L'explosion de la masse de données dues à la révolution de la génomique, qui est difficile à exploiter sans l'utilisation d'outils analytiques,
- Le récent développement d'outils comme la théorie du chaos pour aider à comprendre les mécanismes complexes et non-linéaires en biologie,
- L'énorme croissance des capacités de calcul, donc de simulation, des nouveaux ordinateurs,
- Un intérêt croissant des expériences in silico sur la recherche humaine et animale.

Définition 4.3.1 *L'épidémiologie peut être considérée comme la science qui étudie les mécanismes conduisant à la propagation de maladies infectieuses dans des populations, et les méthodes de lutte contre cette propagation [1].*

Initialement centrée sur l'étude des maladies infectieuses, et en particulier sur celle des épidémies, l'épidémiologie s'est intéressée à partir des années 1950 à d'autres domaines, en particulier celui des cancers ou encore des maladies cardio-vasculaires et elle est l'étude de la distribution des problèmes de santé (maladies, accidents, . . .) et de leurs déterminants dans les populations humaines.

L'épidémiologie consiste en l'étude des rapports existant entre les maladies ou tout autre phénomène biologique, et divers facteurs (mode de vie, milieu ambiant ou social, particularités individuelles) susceptibles d'exercer une influence sur leur fréquence, leur distribution, leur évolution. Autrement dit, elle est une discipline qui s'intéresse aux facteurs influençant la santé des populations et qui cherche à développer des moyens d'atténuer leur impact lorsque celui-ci est jugé négatif.

Dans le cas des maladies infectieuses, elle cherche à identifier les agents pathogènes et à comprendre leur mode de propagation. Ainsi, les épidémiologistes cherchent à répondre à des questions telles que : quelles sont les populations à risque ? Par quels moyens et dans quelles circonstances la maladie est-elle transmise ? Quels sont les facteurs favorisant cette transmission ?.

Ces informations permettent une meilleure compréhension de la dynamique de la propagation, ce qui en retour permet d'orienter les moyens de prévention et d'intervention dans le meilleur intérêt de la santé publique.

Elle cherche, entre autre, à comprendre la dynamique régissant la propagation de maladies infectieuses afin d'établir des stratégies de prévention et d'intervention permettant de diminuer leur impact sur la santé publique.

L'épidémiologie s'occupe aussi bien des facteurs comme les agents infectieux, le mode de transmission, la période de latence, la période infectieuse, la susceptibilité, la vaccination et la résistance que des facteurs sociaux, culturels, démographiques, économiques et géographiques.

4.3.2 La modélisation mathématique

La modélisation mathématique en épidémiologie connaît depuis quelques années un développement important dans la littérature, grâce aux nombreux avantages qu'elle apporte, elle peut traiter une variété de problèmes liés au domaine d'épidémiologie, tels que : la prédiction de l'évolution de la maladie à partir des données réelles, l'étude de la dynamique de l'épidémie afin d'identifier les solutions de contrôle les plus efficaces, ainsi, qu'elle permettra un suivi et une surveillance de l'épidémie, l'estimation des paramètres caractérisant la maladie, etc.

Elle repose principalement sur les modèles dits à compartiments. Il s'agit de diviser la population en plusieurs classes, selon leur rapport à la maladie. Les modèles mathématiques en épidémiologie peuvent être classés en quatre principales catégories : les modèles discrets ou continus, les modèles d'équations différentielles ordinaires (EDO), les modèles d'équations aux dérivées partielles (EDP) et les modèles déterministes et stochastiques.

La transmission d'une maladie infectieuse passe par plusieurs étapes, ces dernières peuvent être organisées sous forme d'un processus nommé : le processus de contagion ou d'infection. Dans ce qui suivra, nous introduirons le processus de l'infection suivi par une présentation de quelques modèles mathématiques de la propagation d'épidémies.

Rappelons ici qu'une maladie est dite endémique si elle subsiste dans une population. Elle est dite épidémique si elle se manifeste pendant une période relativement courte dans une

population (moins d'une année par exemple).

Ainsi, lorsque vient le temps de se préparer à une pandémie ou de planifier l'utilisation d'un tout nouveau vaccin, les études épidémiologiques classiques sont dans l'impossibilité de répondre clairement aux questions soulevées par ce genre de problématiques et se voient dans l'obligation d'extrapoler à partir des connaissances sur des maladies similaires.

En effet, en permettant la simulation de scénarios épidémiologiques avant même qu'une épidémie ne se produise, elle permet d'évaluer les risques associés à une telle épidémie en plus de quantifier l'impact et l'efficacité de différentes méthodes de prévention et d'intervention. Il existe une multitude d'approches pour modéliser la propagation de maladies. Celles-ci vont des simulations numériques massives, à des modèles déterministes, en passant par des modèles stochastiques.

Ainsi donc, une modélisation commence par la description du problème à étudier, sa mise en équation différentielle sous différentes hypothèses; son étude par des techniques mathématiques ou de simulation et à la fin l'interprétation de son comportement par rapport aux paramètres identifiés et estimés.

4.3.3 Le processus dynamique de l'infection

La dynamique de la maladie et les conditions environnantes ont un impact important sur la diffusion de la maladie à large échelle. Il est évident qu'un individu est atteint d'une maladie infectieuse lorsqu'il est mis en contact avec un foyer (appelé aussi agent pathogène) qui peut être de diverses natures (un individu infecté, un moustique, un puits, etc.). Le processus de contagion fait référence à un événement de transfert de l'infection d'un agent pathogène à un autre.

Ce n'est qu'après un temps de latence que le caractère contagieux d'un individu est acquis. L'individu infecté reste contagieux un certain temps : il est alors prêt, soit à contracter à nouveau la maladie, soit à résister à une nouvelle infection, soit à mourir. Cette dimension temporelle des mécanismes de contagion, s'exprime dans la modélisation des systèmes dynamiques.

Le théorème ci-après parle d'un paramètre très important dans la modélisation d'une épidémie.

Le théorème du seuil [15] La première des questions que l'épidémiologiste se pose est de savoir s'il y aura présence d'une épidémie ou non. En examinant le système d'équations différentielles, nous pouvons répondre à cette question de façon très simple. La première étape consiste à traduire notre question sous forme mathématique. Dans le cadre d'une transmission des maladies infectieuses, la condition pour qu'il y ait une épidémie est due à R_0 qui est le nombre de reproduction de base. On a donc une épidémie si $R_0 > 1$. Dans le cas contraire, si $R_0 < 1$, il n'y a pas épidémie.

Nombre de reproduction de base R_0 Le nombre de reproduction de base R_0 est utilisé pour la première fois en démographie et en écologie, il est nouvellement utilisé en épidémiologie. Il est connu comme : «un concept clé en épidémiologie».

En épidémiologie la première note qui anticipe la notion de R_0 est due à Theophil Lotz (1980) (Nichiura, Dietz, Eichner 2006). Une maladie peut proliférer dans une population si en moyenne un individu infectieux en infecte plus qu'un 13. Ceci nous permet de le définir comme suit.

Il joue un rôle très important pour la prédiction, car il est relié par les trois paramètres qui peuvent diminuer l'évolution d'épidémie : la transmission, le nombre de contact d'un indi-

vidu et la période d'inféctiosité (contagiosité). L'utilisation des modèles d'épidémie permet de comprendre la dynamique de maladies infectieuses. Nous présentons ci-bas quelques modèles.

4.3.4 Quelques modèles mathématiques de la dynamique des maladies infectieuses

La naissance de l'épidémiologie est attribuée à Daniel Bernoulli, qui présenta en 1760 un modèle dont le principal objectif était de savoir si la variolisation (l'inoculation du pus d'une personne atteinte de variole) était plus avantageuse ou plus risquée pour les personnes ayant contracté cette maladie. Près de deux siècles plus tard, Kermack et McKendrick ont formalisé le concept des modèles à compartiments (ou modèles compartimentaux) en utilisant un ensemble d'équations différentielles ordinaires pour décrire le déroulement d'une épidémie. Cette approche est devenue extrêmement populaire et puissante dans les années 80/90 avec les travaux de Bob May et Roy Anderson, qui ont permis de jeter les principes de la modélisation moderne de l'épidémiologie 12 .

Dans ce travail, nous nous intéressons à quelque type de modèles à compartiments, en plus, d'autres modèles qui sont très largement utilisés et permettant d'appréhender à travers leur ajustement aux données disponibles les facteurs d'hétérogénéité responsables de la propagation observée dans les populations hôtes. Ceci permet de définir les priorités qui doivent prévaloir dans la récolte des données afin d'affiner le paramétrage des modèles qui sont de divers types dont nous nous intéressons à deux d'eux qui sont ceux déterministes et stochastiques.

Dans ce qui suit, nous présentons le tout premier modèle mathématique déterministe de la dynamique des maladies infectieuses.

4.3.4.1 Le modèle SI

Le modèle SI est le premier modèle dynamique déterministe simple, il a été développé par W. H. Hamer en 1906. Il consiste à scinder la population en deux compartiments (ou groupes) dont le groupe S rassemblant tous les individus pouvant s'infecter s'ils sont en contact avec ceux du groupe I des individus qui sont infectés et capables de transmettre la maladie.

Le diagramme de ce modèle se présente comme suit :

$$S \xrightarrow{\lambda} I.$$

Dans ce modèle, l'infection se propage lorsque les individus entrent en contact les uns les autres. Ici, les individus infectés demeurent avec la maladie alors qu'ils se contaminent au jour les jours.

On conclut donc qu'à la fin tous les individus susceptibles deviennent infectés. En effet, plus il y aura d'individus infectés, plus les individus sains auront de risque d'être contaminés à leur tour, et inversement.

On considère en outre que la probabilité pour qu'un individu sain soit infecté est proportionnelle au nombre d'individus déjà infectés.

En modulant cette proportionnalité par un coefficient λ positif ou nul, ce modèle déterministe peut alors s'écrire sous la forme d'un système de deux équations différentielles ci

après :

$$\begin{cases} S'(t) = -\lambda S(t)I(t) \\ I'(t) = \lambda S(t)I(t) \end{cases} \quad (4.18)$$

N.B : Cette modélisation est la plus simple imaginable. Elle suggère seulement le fait qu'un individu sain puisse être contaminé.

Avec $S(t) + I(t) = N$.

A cause de l'infection on remarque que quand $S(t)$ décroît, $I(t)$ croît ; et on voit aussi que $(S'(t) + I'(t) = 0)$, ce qui implique que $\forall t \geq 0, S(t) + I(t) = \text{constante} = N$.

Ci-bas, nous présentons la notion du point d'équilibre de façon générale.

Calcul du point d'équilibre

En posant : $S'(t) = 0$ et $I'(t) = 0$, on obtient le point d'équilibre. c'est un point où il n'y a ni augmentation ni diminution (i.e pas de variation au cours du temps), si on part de ce point le système reste dans cet état.

La recherche des points d'équilibres est très importante, car dans tous les cas les trajectoires (ensemble des couples $(S(t); I(t), t > 0)$ du système vont tendre (asymptotiquement, $t \rightarrow \infty$) vers l'un des points d'équilibres, et celui-ci sera dit *asymptotiquement stable*.

En posant $I'(t) = 0$, on en déduit deux points d'équilibres ($S_1^* = S_0 + I_0, I_1^* = 0$) et ($S_2^* = 0, I_2^* = S_0 + I_0$)

Le point (S_1^*, I_1^*) est appelé «point de non endémie» car il n'y a pas de propagation de l'épidémie, s'il n'y a pas au moins un individu infectieux ; quant au deuxième point (S_2^*, I_2^*) c'est le point vers lequel la trajectoire va tendre ; donc c'est un équilibre dit *asymptotique*.

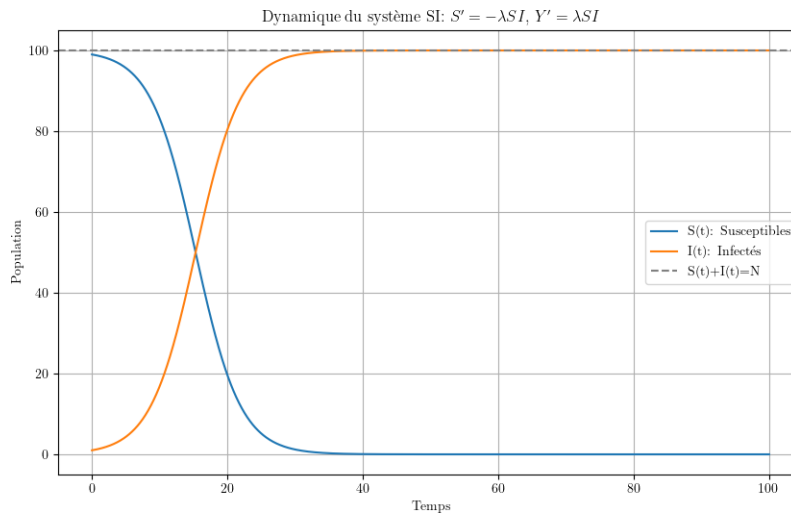


FIGURE 4.30 – Graphique du modèle SI pour $\lambda = 0.003$, $N = 100$ et la population initiale de susceptibles est de 99 contre 1 infecté

Remarque 4.3.2 En pratique on ne recueille pas le nombre de personnes infectées, mais le nombre de nouveaux cas d'infectieux (taux d'incidence) par unité de temps (jours, mois, années,...).

Vu l'insuffisance du modèle ci-haut, cela nous a permis de présenter un deuxième déterministe dans ce qui suit.

4.3.4.2 Le modèle *SIS*

Le modèle *SIS* est le deuxième modèle dynamique déterministe extension du précédent.

Il consiste également à scinder la population en deux groupes dont les groupes *S* des susceptibles et *I* des infectés et infectieux.

Dans ce modèle, contrairement au modèle précédent, les individus infectés redeviennent susceptibles (car le modèle ne procure pas d'immunité) c'est-à-dire que les individus après traitement guérissent de la maladie mais à la longue ils peuvent encore la rattraper et être à nouveau infecté (et infectieux). Ce modèle est endémique parce qu'à la longue, la maladie persiste.

Son diagramme est de cette forme :

$$S \xrightarrow{\lambda} I \xrightarrow{\mu} S$$

Dans ce modèle :

(1) un individu susceptible devient infecté et infectieux après un contact positif avec un individu infectieux mais ne développe pas d'immunité à la maladie :

(2) Les naissances se font et les nouveau-nés ne sont pas infectés.

(3) les morts se font aussi, ce qui permet de supposer que la population reste constante.

Un état d'équilibre peut se former après un certain temps et que le nombre d'individus infectés au temps 0 ne modifie pas cet état dès lors que les autres paramètres sont fixés. Nous sommes donc en présence d'un modèle «bouclé » : un individu peut passer d'un groupe à l'autre puis revenir dans le groupe précédent. Ce modèle correspond à certaines maladies comme la tuberculose.

Le premier modèle étant très limité, il est naturel de l'améliorer notamment en prenant en compte des paramètres réels. Le plus direct est de considérer que, selon les maladies, les individus peuvent ou non en guérir. On inclut donc ce paramètre à notre système à l'aide d'une constance dite «taux de guérison » et notée μ . Le modèle *SIS* déterministe modélise l'évolution d'une épidémie dans une population de grande taille à l'aide du système différentiel suivant :

$$\begin{cases} S'(t) = -\lambda S(t)I(t) + \mu I(t) \\ I'(t) = \lambda S(t)I(t) - \mu I(t) \end{cases} \quad (4.19)$$

Avec $S(0) + I(0) = N$. De la même manière en posant, $I'(t) = 0$, on obtient deux points d'équilibres : $(S_1^* = N, I_1^* = 0)$ et $(S_2^* = \frac{\mu}{\lambda}, I_2^* = N - S_2^*)$. Le point (S_1^*, I_1^*) est appelé point de non endémie (car il n'y a pas de propagation de l'épidémie s'il n'y a pas au moins un individu infectieux). Et le point (S_2^*, I_2^*) c'est le point vers lequel la trajectoire.

4.3.4.3 Le modèle *SIR*

Ce modèle fut proposé en 1927 par Kermack et Mckendrick.

Il est donc le premier modèle déterministe complet pour modéliser une épidémie.

Étant donné que les modèles précédent ne procurent pas de l'immunité aux individus, il ne sont donc pas complet. Il était donc important d'élaborer un modèle un peu plus complet

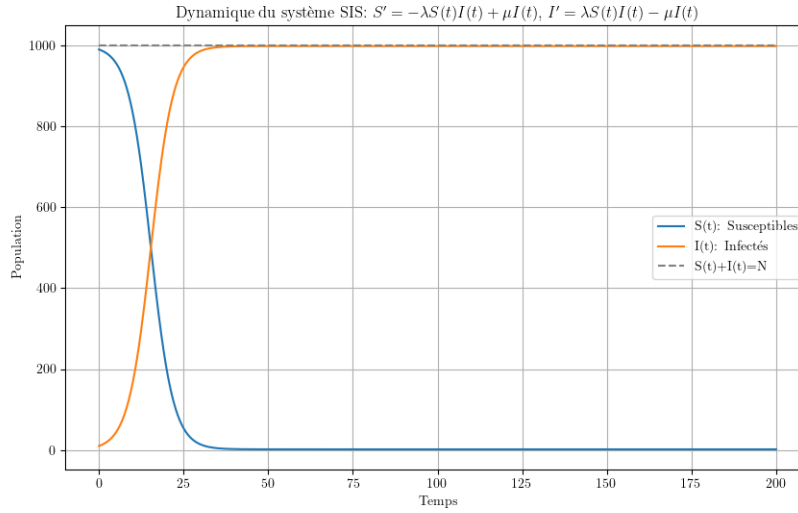


FIGURE 4.31 – Graphique du modèle SIS pour $\lambda = 0.003$, $\mu = 0.005$, $N = 1000$ et la population initiale de susceptibles est de 990 contre 10 infectés.

qui, lui va procuré de l'immunité permanente contre la ré-infection. C'est le modèle *SIR* qui est bien entendu le modèle de base pour modéliser la dynamique d'une épidémie. En effet, ce modèle consiste à scinder la population en trois groupes dont le groupe *S* des susceptibles, celui *I* des infectés (et infectieux) et enfin celui *R* des individus ayant eu la maladie et ne pouvant plus la transmettre ni la contracter. C'est le groupe des retirés (ou rétablis).

Contrairement au modèle ci-haut, ici, les individus susceptibles après avoir été infectés peuvent soit être isoler (c'est-à-dire guéris ou non et ne pouvant plus attraper la maladie, ni la propager car ils sont immunisés) ou soit mourir. Ces individus sont donc classés dans le groupe *R*.

Le diagramme de ce modèle est le suivant :

$$S \xrightarrow{\lambda} I \xrightarrow{\mu} R$$

Ce modèle suppose que la population est constante (pas des naissances) et les groupes sont tous homogènes, c'est-à-dire que dans le groupe *S*, tous les individus ont la même susceptibilité à la maladie. De la même façon, tous les individus infectieux ont la même probabilité de transmettre la maladie lors de la rencontre d'un susceptible et ont le même taux de guérison.

L'idée principale vient du fait qu'en temps discret, le nombre de nouvelles infections est proportionnel au produit du nombre d'infectés et de susceptibles. Ce modèle déterministe peut alors s'écrire sous la forme d'un système de trois équations différentielles ci-après :

$$\begin{cases} S'(t) &= -\lambda S(t)I(t) \\ I'(t) &= \lambda S(t)I(t) - \mu I(t) \\ R'(t) &= \mu I(t) \end{cases} \quad (4.20)$$

A l'initiale, nous avons $S(0) + I(0) + R(0) = S_0 + I_0 + R_0 = N = cst$

Avec $0 \leq S(t) + I(t) \leq N, \forall t \geq 0, S(0) + I(0) + R(0) = S_0 + I_0 + R_0 = N$, là aussi, la

taille de la population N est constante.

On a : $N(t) = S(t) + I(t) + R(t) = \text{constante}$.

Ainsi les fonctions positives S, I et R sont majorés par N .

Recherche des points d'équilibre Soit $S'(t) = 0$ et $I'(t) = 0$. La première ($S'(t)$) nous donne soit $S(t) = 0$, soit $I(t) = 0$.

En reportant ces expressions dans la seconde ($I'(t) = 0$), on obtient $I(t) = 0$ et $S(t) \in [0, N]$, d'où les points d'équilibres P^* du système sont de la forme $(S^*, 0)$ avec $S^* \in [0, N]$.

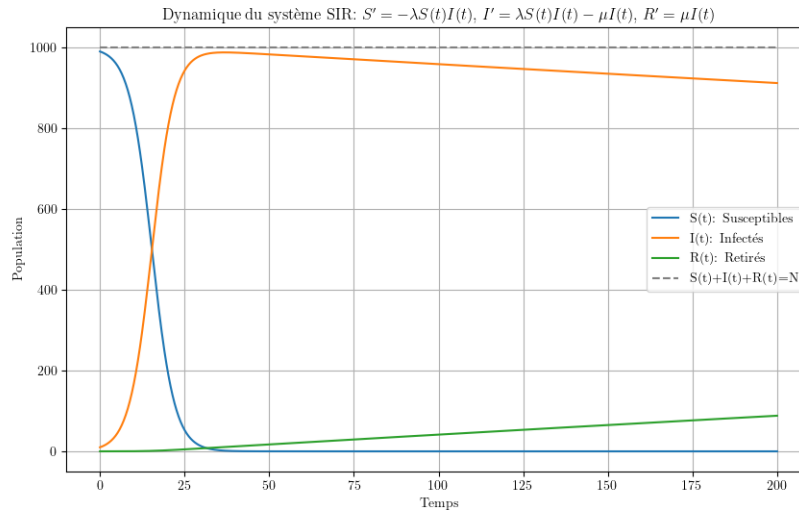


FIGURE 4.32 – Graphique du modèle SIR pour $\lambda = 0.0003$, $\mu = 0.0005$, $N = 1000$ et la population initiale de susceptibles est de 990 contre 10 infectés.

De ce modèle, il en découle d'autres dont nous présentons brièvement ci-bas deux d'eux :

4.3.4.4 Le modèle $SIRS$

Le modèle $SIRS$ est un modèle déterministe extension du modèle SIR .

Il consiste également à scinder la population en trois groupes comme au précédent. Ici, après que les individus soient guéris de la maladie, ils peuvent la rattraper et redevenir susceptibles au cas où ils perdaient leur immunité. Ils peuvent donc être de nouveau infectés et infectieux.

On ajoute de ce fait un taux de perte d'immunité qui décrit la vitesse à laquelle les individus sortent de la classe des retirés pour la classe des susceptibles.

Son diagramme est le suivant :

$$S \xrightarrow{\lambda} I \xrightarrow{\mu} R \xrightarrow{\gamma} S$$

Ce modèle déterministe peut s'écrire sous la forme d'un système de trois équations différentielles cidessous :

$$\begin{cases} S'(t) &= -\lambda S(t)I(t) + \gamma R(t) \\ I'(t) &= \lambda S(t)I(t) - \mu I(t) \\ R'(t) &= \mu I(t) - \gamma R(t) \end{cases} \quad (4.21)$$

A l'initiale, $S(0) + I(0) + R(0) = S_0 + I_0 + R_0 = S_0 + I_0 = N$

$S'(t) + I'(t) + R'(t) = 0, \forall t \geq 0,$

$S(t) + I(t) + R(t) = N = S_0 + I_0 + R_0 (= 0) = S_0 + I_0.$

Recherche des points d'équilibres du modèle

$$\left(I' = 0 \Leftrightarrow I^* = 0, \text{ ou } S^* = \frac{\mu}{\lambda} \right) \text{ et } (S' = 0) \Leftrightarrow I^*(X^*) = \frac{\gamma(N - S^*)}{\lambda S^* + \gamma}$$

Soit $Y_1^* = 0$ et $c = N$, qui donne le point $P_1^* = (X_1^*, Y_1^*)$ et $X_2^* = \frac{\mu}{\lambda}$; et $Y_2^* = \frac{\gamma}{\mu} \frac{\lambda N - \mu}{\mu}$, qui donne le point $P_2^* = (X_2^*, Y_2^*)$

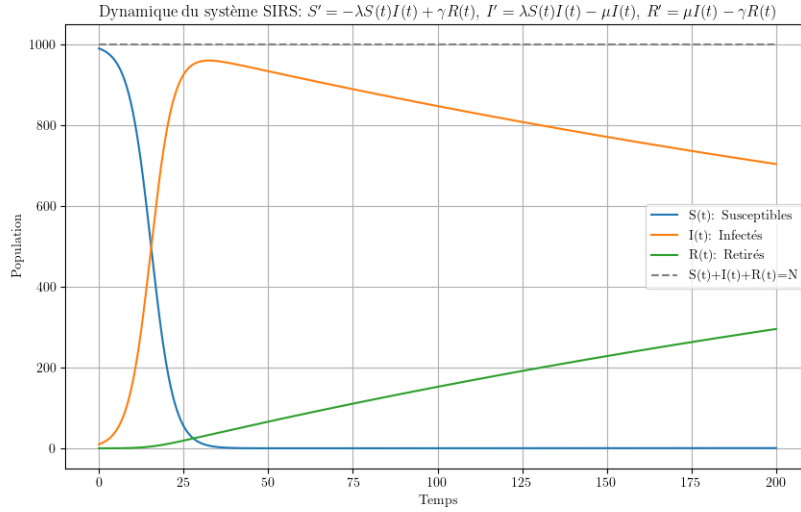


FIGURE 4.33 – Graphique du modèle SIRS pour $\lambda = 0.003$, $\mu = 0.002$, $\gamma = 0.0005$, $N = 1000$ et la population initiale de susceptibles est de 990 contre 10 infectés.

4.3.4.5 Modèle SEIR

Le modèle *SEIR* est un modèle déterministe extension du modèle *SIR*.

Il consiste à scinder la population en quatre groupes dont le groupe *S* des susceptibles, le groupe *E* des individus qui sont infectés mais ne pouvant pas transmettre la maladie, le groupe *I* des infectés (et infectieux) et enfin le groupe *R* des retirés.

Voici comment se présente le diagramme de ce modèle :

$$S \xrightarrow{\lambda} E \xrightarrow{\beta} I \xrightarrow{\mu} R.$$

Ce modèle instaure la possibilité que les personnes contaminées ne soient pas directement contagieuses, en ajoutant une classe de personnes dites exposées et notée *E* dans laquelle nous plaçons tous les individus qui ont une probabilité éventuelle d'être infectés. [2]

Ici, lorsque l'infection touche un individu susceptible, un intervalle de temps est indispensable avant que les signes et les symptômes s'installent et installant avec eux le terme contagion entre les individus susceptibles.

Il y a donc une période dite de latence (pendant laquelle le développement des pathogènes responsables de l'infection est potentiel) avant que les individus ne soient infectieux.

Durant ce laps de temps les infectés sont dit latents ou exposés c'est-à-dire les symptômes ne sont pas apparents, donc ne peuvent pas transmettre la maladie à d'autres individus.

En ajoutant un paramètre exprimant le taux de latence, ce modèle déterministe peut alors s'écrire sous la forme d'un système de quatre équations différentielles ci-dessous :

$$\begin{cases} S'(t) &= -\lambda S(t)I(t) \\ E'(t) &= \lambda S(t)I(t) - \beta E(t) \\ I'(t) &= \beta E(t) - \mu I(t) \\ R'(t) &= \mu I(t) \end{cases} \quad (4.22)$$

La population totale vérifie l'équation suivante, $N = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$.

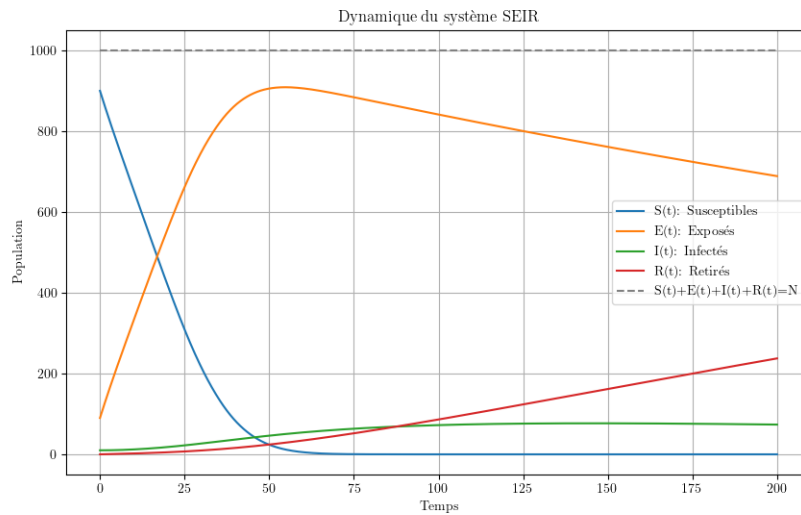


FIGURE 4.34 – Graphique du modèle SEIR pour $\lambda = 0.003$, $\mu = 0.002$, $\gamma = 0.0005$, $\beta = 0.002$, $N = 1000$ et la population initiale de susceptibles est de 900 contre 10 infectés et 80 exposés.

4.4 Exercices

Exercice 1. Compétition interspécifique avec migration

Considérez deux espèces $N_1(t)$ et $N_2(t)$ en compétition dans deux régions connectées par une migration. Modélisez cette dynamique en introduisant des termes de migration proportionnels à la différence de densité. Étudiez les équilibres et leur stabilité.

Exercice 2. Épidémie avec vaccination adaptative

Modélisez la propagation d'une maladie infectieuse avec vaccination dont le taux

dépend du nombre d'infectés. Utilisez un modèle SIR avec vaccination adaptative $v(I) = v_0 + \alpha I$. Étudiez les effets de la sensibilité α sur le seuil épidémique.

Exercice 3. Théorie des jeux évolutive

Modélisez l'évolution des proportions $x(t)$ et $1 - x(t)$ de deux stratégies A et B en utilisant l'équation de réplicateur :

$$\frac{dx}{dt} = x(f_A - \bar{f}),$$

où f_A et f_B dépendent d'une matrice de jeu donnée. Analysez les points d'équilibre selon les paramètres du jeu.

Exercice 4. Pollution d'un lac avec renouvellement

Considérez un lac dans lequel entre un flux constant d'eau polluée. Modélisez la concentration $C(t)$ de polluant avec une EDO tenant compte de l'entrée, de la dilution et de la biodégradation naturelle. Étudiez les effets d'un changement dans le taux d'entrée.

Exercice 5. Dynamique prédateur-proie avec effet Allee

Ajoutez un effet Allee au modèle classique de Lotka-Volterra en modifiant la croissance de la proie par un terme $(N_1 - A)$, où A est un seuil. Étudiez la bifurcation du système selon la valeur de A .

Exercice 6. Jeu éco-épidémiologique

Modélisez une population d'agents qui choisissent entre deux comportements : prudent (non infecté, faible gain) et risqué (fort gain mais susceptible d'infection). Coupler la dynamique de choix comportemental (type jeu évolutif) avec un modèle SI. Étudiez les équilibres.

Exercice 7. Modèle de récolte optimale dans un environnement changeant

Considérez une population $N(t)$ soumise à une récolte $H(t)$ dans un environnement saisonnier ($r(t) = r_0 + r_1 \cos(\omega t)$). Trouvez la stratégie de récolte $H(t)$ qui maximise la récolte cumulée sur un intervalle donné sous contrainte de durabilité.

Exercice 8. Épidémie avec immunité temporaire

Étendez le modèle SIR pour inclure une immunité temporaire : les individus guéris retournent dans la classe des susceptibles après un délai moyen $1/\sigma$. Analysez les cycles possibles du système et les conditions de récurrence des épidémies.

Exercice 9. Modélisation d'un écosystème trophique à trois niveaux

Modélisez les interactions entre un producteur primaire (P), un herbivore (H), et un carnivore (C) à l'aide d'un système de trois EDO. Utilisez des fonctions de réponse de type Holling pour les prédateurs. Étudiez les cycles limites.

Exercice 10. Stratégies de vaccination dans une population mobile

Dans un modèle SIR sur deux régions avec mobilité entre régions et ressources limitées pour la vaccination, proposez un système d'EDO modélisant la dynamique.

Étudiez les stratégies de vaccination optimale pour minimiser le nombre total d'infections.

Bibliographie

- [1] Elena Angulo and Franck Courchamp. Rare species are valued big time. *PloS one*, 4(4) :e5215, 2009.
- [2] Pierre Auger, Christophe Lett, Jean-Christophe Poggiale, et al. *Modélisation mathématique en écologie : cours et exercices corrigés*. Dunod Paris, 2010.
- [3] Sandip Banerjee. *Mathematical modeling : models, analysis and applications*. Chapman and Hall/CRC, 2021.
- [4] Sylvie Benzoni-Gavage. *Calcul différentiel et équations différentielles-2e éd. : Cours et exercices corrigés*. Dunod, 2021.
- [5] Justin Buhendwa Nyenyezi. Cours de modélisation des systèmes écologiques. *Inédit*, 2021.
- [6] JHP Dawes and M Souza. A derivation of holling’s type i, ii and iii functional responses in predator–prey systems. *Journal of theoretical biology*, 327 :11–22, 2013.
- [7] Donald Ludwig, Dixon D Jones, Crawford S Holling, et al. Qualitative analysis of insect outbreak systems : the spruce budworm and forest. *Journal of animal ecology*, 47(1) :315–332, 1978.
- [8] R Kent Nagle, Edward B Saff, and Arthur David Snider. *Fundamentals of differential equations*. Pearson, 2014.
- [9] N. Piskounov. *Calcul différentiel. Tome 2*. Mir, 1980.
- [10] Claude Zuily and Hervé Queffélec. *Éléments d’analyse pour l’agrégation*. Masson, 1996.