

TEMA 1. MATRICES

Academia

1. Definición.
 - 1.1. Matrices iguales.
 - 1.2. Clasificación de las matrices.
 - 1.3. Matriz cuadrada. Tipos de matrices cuadradas.
2. Matriz Traspuesta.
3. Matrices simétricas y antisimétricas.
4. Otros tipos de matrices cuadradas.
5. Operaciones con matrices.
 - 5.1. Suma de matrices.
 - 5.2. Producto de un escalar por una matriz.
 - 5.3. Producto de matrices.
6. Rango de una matriz.
7. Potencia de matrices cuadradas.



ACADEMIA MAGÜIPREPARATORIA

TEMA 1. MATRICES.**1. DEFINICIÓN.**

Se denomina **matriz** a una tabla de números reales ordenados en **m** filas y **n** columnas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Cada uno de los números de que consta la **matriz** se denomina **elemento**. Un elemento se distingue de otro por la posición que ocupa, es decir, la **fila** y la **columna** a la que pertenece.

El número de filas y columnas de una matriz se denomina **dimensión** de una matriz. Así, una matriz será de dimensión: 2x4, 3x2, 2x5,...

El conjunto de **matrices** de **m** filas y **n** columnas se denota por $A_{m \times n}$ o (a_{ij}) , y un **elemento** cualquiera de la misma, que se encuentra en la fila *i* y en la columna *j*, por a_{ij} .

Sí la matriz tiene el mismo número de filas que de columna, se dice que es de **orden**: 2, 3, ...

Ejemplo: Determina la dimensión de la siguiente matriz e identifica los elementos

$$a_{23} \text{ y } a_{32}. A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -6 \\ 2 & 5 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}; \text{ dimensión} = 3 \times 4, a_{23} = 8, a_{32} = 7$$

Ejercicio 1

Hallar la dimensión de la matriz: $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 7 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 8 & 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

- a) 6x3
- b) 18
- c) 3x6
- d) No se puede calcular su dimensión porque no es cuadrada

Ejercicio 2

Hallar el elemento a_{34} de la matriz del ejemplo anterior.

Ejercicio 3

Hallar una matriz de dimensión 3x2 donde se cumpla que: $a_{ij} = \begin{cases} 3 & \text{si } i + j = 4 \\ 0 & \text{si } i + j \neq 4 \end{cases}$

Ejercicio 4

Hallar una matriz de dimensión 2x4 donde se cumpla que: $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i < j \\ 0 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } i > j \end{cases}$

1.1. Matrices iguales

Dos matrices son **iguales** cuando tienen la misma dimensión y los elementos que ocupan el mismo lugar en ambas, son iguales.

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 7 \\ -9 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 7 \\ -9 & 2 \end{pmatrix}$

Ejemplo: Hallar los valores de x, y y z para que las siguientes matrices sean

iguales: $\begin{pmatrix} -3 & 2 & x \\ 5 & 7 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 2 & 6 \\ 5 & 7 & z \end{pmatrix} \rightarrow x = 6, y = -3, z = -4$

Ejercicio 5

Hallar el valor de a y b para que las siguientes matrices sean iguales:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 3a & 0 & 5 \\ 7 & 2 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 6 & 0 & b \\ 7 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

- a) $a = 2, b = 5$
- b) $a = 5, b = 2$
- c) no tiene solución
- d) ninguna de las respuestas anteriores es correcta

Ejercicio 6

Hallar el valor de cada incógnita para que las dos matrices sean iguales:

$$A = \begin{pmatrix} x+1 & 3 & 0 \\ z+1 & x+2 & z-1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & y+1 & 0 \\ y+2 & 3 & y \end{pmatrix}$$

- a) No se pueden calcular
- b) $x = 1, y = 2, z = 3$
- c) $x = y = z$
- d) $x = -1, y = -2, z = -3$

1.2. Clasificación de matrices:

- **Matriz rectangular:** La **matriz rectangular** tiene distinto número de filas que de columnas, siendo su **dimensión** $m \times n$. Ej: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 5 & 4 \\ 1 & 9 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ matriz rectangular de dimensión: 2×5

Matriz fila: Una **matriz fila** está constituida por una sola fila y n columnas. Su dimensión es $1 \times n$. Ej: $(1 \ 4 \ -6)$

Matriz columna: La **matriz columna** tiene m filas y una sola columna. Su dimensión es $m \times 1$. Ej: $\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

- **Matriz nula:** En una **matriz nula** todos los elementos son ceros. Se

representa por **O**. Ej: $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

- **Matriz cuadrada:** La **matriz cuadrada** tiene el mismo número de filas que de columnas; n filas y n columnas. Su dimensión es $n \times n$, su **orden** es n .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ Los elementos de la forma } a_{ii}$$

$(a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn})$ constituyen la **diagonal principal**.

TIPOS DE MATRICES CUADRADAS:

- **Matriz triangular superior:** En una **matriz triangular superior** los elementos situados por debajo de la diagonal principal son ceros.

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- **Matriz triangular inferior:** En una **matriz triangular inferior** los elementos situados por encima de la diagonal principal son ceros.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

- **Matriz diagonal:** En una **matriz diagonal** todos los elementos situados por encima y por debajo de la diagonal principal son nulos.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

- **Matriz escalar:** Una **matriz escalar** es una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son iguales.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- **Matriz identidad o unidad:** Una **matriz identidad** es una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son iguales a 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. **MATRIZ TRASPUESTA:** Dada una matriz A de dimensión $m \times n$, se llama **matriz traspuesta** de A a la matriz A^t de dimensión $n \times m$, que se obtiene cambiando ordenadamente las filas por las columnas.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

- **Propiedades de la traspuesta:**

$$(A^t)^t = A$$

$$(A + B)^t = A^t + B^t$$

$$(\alpha \cdot A)^t = \alpha \cdot A^t$$

$$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

Ejercicio 7

Hallar la matriz traspuesta de $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 7 & -9 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

- a) $A^t = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -9 & 7 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
 b) $A^t = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -7 & 9 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
 c) $A^t = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 1 \\ 5 & -9 & -2 \end{pmatrix}$
 d) $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 \\ -2 & -9 & 5 \end{pmatrix}$

3. MATRIZ SIMÉTRICA Y ANTISIMÉTRICA:

Una **matriz simétrica** es una matriz cuadrada que verifica:

$A = A^t \rightarrow a_{ij} = a_{ji}$. En una matriz simétrica, los elementos simétricos respecto a la

diagonal principal son iguales. Ejemplo: $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 7 & 6 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Una **matriz antisimétrica o hemisimétrica** es una matriz cuadrada que verifica:

$A = -A^t \rightarrow -a_{ij} = a_{ji}$. En una matriz antisimétrica los elementos de la diagonal principal son ceros, y los elementos simétricos respecto de ella son opuestos.

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 7 \\ -5 & -7 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 8

Indique la opción correcta en relación a la siguiente matriz: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

- a) Si $m = n$ es una matriz rectangular
 b) Si $m = n$ y los elementos de la diagonal principal son 0 es una matriz nula
 c) Si $m = n$ y los elementos por encima de la diagonal principal son 0 es una matriz triangular inferior
 d) Si todos los elementos de la diagonal principal son iguales es una matriz identidad.

Ejercicio 9

Indica que tipo de matriz es: $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 3 \\ 4 & 10 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

- a) Matriz de doble fila
 b) Matriz bidimensional
 c) Matriz simétrica
 d) Matriz rectangular

Ejercicio 10

Clasifica la siguiente matriz: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- a) Matriz cuadrada de orden 2
- b) Matriz nula
- c) Matriz nula de dimensión 2x2
- d) Matriz nula de orden 2

Ejercicio 11

Clasifica la siguiente matriz : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- a) Matriz triangular superior
- b) Matriz diagonal
- c) Matriz fila
- d) Matriz cuadrada

4. OTROS TIPOS DE MATRICES CUADRADAS**➤ MATRIZ ORTOGONAL**

Una matriz es ortogonal si verifica que:

$$A \cdot A^t = I. \quad \text{o} \quad A^t = A^{-1}$$

(Ya veremos ejemplos de esto cuando tengamos los conocimientos necesarios, y veremos cómo lo han preguntado en la oposición)

➤ MATRIZ INVOLUTIVA

Una **matriz involutiva** es una matriz cuadrada que coincide con su inversa. $A = A^{-1}$

Es decir, la multiplicación por la matriz A es una involución si y sólo si $A^2 = I$.

Ejemplos:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad I^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

➤ MATRIZ IDEMPOTENTE

Una **matriz idempotente** es una matriz cuadrada, la cual es igual a su cuadrado, es decir:

$$A \text{ es idempotente si } A^2 = A$$

En general, la idempotencia hace referencia a una operación que, si se repite, produce el mismo resultado que si se llevara a cabo una sola vez. En el caso de la matriz idempotente se cumple que: $A^n = A^2 = A$ lo que es válido, para cualquier valor natural de n (valor entero, no negativo, ni nulo).

Ejemplos :

Ejemplos de matrices idempotentes son la matriz nula o la matriz unidad: O, I.

5. OPERACIONES CON MATRICES.

5.1. Suma de matrices: Dadas dos matrices de la misma dimensión, $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$, se define la matriz suma como: $A+B=(a_{ij}+b_{ij})$. Es decir, aquella matriz cuyos elementos se obtienen: sumando los elementos de las dos matrices que ocupan la misma misma posición.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 2+1 & 0+0 & 1+1 \\ 3+1 & 0+2 & 0+1 \\ 5+1 & 1+1 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A-B = \begin{pmatrix} 2-1 & 0-0 & 1-1 \\ 3-1 & 0-2 & 0-1 \\ 5-1 & 1-1 & 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Propiedades de la suma de matrices:**

Interna:

La suma de dos matrices de orden $m \times n$ es otra matriz dimensión $m \times n$.

Asociativa:

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

Elemento neutro:

$$A + O = A$$

Donde O es la matriz nula de la misma dimensión que la matriz A.

Elemento opuesto:

$$A + (-A) = O$$

La matriz opuesta es aquella en que todos los elementos están cambiados de signo.

Conmutativa:

$$A + B = B + A$$

Ejercicio 12

Hallar la opuesta de la matriz: $A = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 0 \\ 5 & -3 & 8 \end{pmatrix}$

a) No se puede calcular la matriz opuesta, pues no es una matriz cuadrada

b) $\begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 2 & -3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -2 & 3 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -5 & 3 & -8 \end{pmatrix}$

Ejercicio 13

Realiza las siguientes operaciones con matrices:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) $\begin{pmatrix} 0 & 8 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$
- b) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
- c) $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
- d) $\begin{pmatrix} 0 & 8 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Ejercicio 14

Indique el resultado correcto: $A = \begin{pmatrix} 7 & 9 & -5 \\ 3 & 5 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 6 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

- a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 8 & 0 \\ -7 & -1 \end{pmatrix}$
- b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -7 \\ 9 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
- c) $A = -33$
- d) $A = \begin{pmatrix} -21 & -9 & 10 \\ 18 & -25 & -6 \end{pmatrix}$

Ejercicio 15

Averiguar los elementos que faltan si $A + B = C$;

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & a & b \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & c & d \\ e & 3 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} f & 7 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) $a = -1, b = 2, c = -2, d = 0, e = 5$
- b) $a = -1, b = 2, c = -2, d = 0, e = -5$
- c) $a = 1, b = 3, c = 1, d = 0, e = 1$
- d) $a = -4, b = 1, c = 3, d = 1, e = -4$

5.2. Producto de un escalar por una matriz:

Dada una matriz $A = (a_{ij})$ y un número real $k \in \mathbb{R}$, se define el producto de un número real por una matriz: a la matriz del mismo orden que A, en la que cada elemento está multiplicado por k.

$$k \cdot A = (k a_{ij})$$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 10 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Propiedades:

$$a \cdot (b \cdot A) = (a \cdot b) \cdot A$$

$$A \in M_{m \times n}, a, b \in \mathbb{R}$$

$$a \cdot (A + B) = a \cdot A + a \cdot B$$

$$A, B \in M_{m \times n}, a \in \mathbb{R}$$

$$(a + b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot A$$

$$A \in M_{m \times n}, a, b \in \mathbb{R}$$

$$1 \cdot A = A$$

$$A \in M_{m \times n}$$

Ejercicio 16

Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ -2 & -7 \end{pmatrix}$, el resultado de la operación: $2A - 3B$, es:

a) $\begin{pmatrix} -7 & -32 \\ 5 & 25 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -7 & 32 \\ 6 & 24 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -7 & -32 \\ 6 & 25 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -7 & -32 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$

Ejercicio 17

Hallar x, y, z, w para que se satisfaga la siguiente igualdad:

$$2 \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x & 2 \\ 1 & 3w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & y-x \\ z+w & 4 \end{pmatrix}$$

a) $x = 1, y = -1, z = -3, w = -4$

b) $x = -1, y = 1, z = 3, w = -4$

c) $x = 1, y = 2, z = -3, w = -4$

d) $x = 1, y = 1, z = -3, w = -4$

5.3. Producto de matrices:

Dos matrices A y B se dicen multiplicables si el número de columnas de A coincide con el número de filas de B.

$$M_{m \times n} \times M_{n \times p} = M_{m \times p}$$

El elemento c_{ij} de la matriz producto se obtiene multiplicando cada elemento de la fila i de la matriz A por cada elemento de la columna j de la matriz B y sumándolos.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 3 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 5 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 5 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 5 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Propiedades del producto de matrices:**Asociativa:**

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

Elemento neutro:

$$A \cdot I = A$$

Donde **I** es la **matriz identidad** del mismo orden que la matriz **A**.

No es Conmutativa:

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Distributiva del producto respecto de la suma:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

- **Cuando el producto de dos matrices cumple la propiedad conmutativa; es decir $A \cdot B = B \cdot A$ se dice que son CONMUTABLES**

Ejercicio 18

Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcule la matriz $C = A \cdot B$

- a) No se puede realizar esa operación.
- b) $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}$
- c) $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$
- d) $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Ejercicio 19

Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcule la matriz $C = B \cdot A$

- a) No se puede realizar esa operación.
- b) $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}$
- c) $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$
- d) $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Ejercicio 20

Realiza, si es posible el siguiente producto de matrices: $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

- a) 2
- b) (2)
- c) $\begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$
- d) No se puede realizar esa operación.

Ejercicio 21

Efectúe la siguiente operación: $(A - B) \cdot C$ con las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$
- b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$
- c) $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$
- d) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$

Ejercicio 22

Hallar los valores de a y b para que las siguientes matrices sean conmutables

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & b \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

- a) $a = 1, b = 0$
- b) $a = 3, b = 5$
- c) $a = -1, b = 3$
- d) No depende del valor de a y b, esas matrices jamás serán conmutables

4. RANGO DE UNA MATRIZ:

Es el número de líneas de esa matriz (filas o columnas) que son linealmente independientes.

Una línea es **linealmente dependiente** de otra u otras cuando se puede establecer una combinación lineal entre ellas.

Una línea es **linealmente independiente** de otra u otras cuando no se puede establecer una combinación lineal entre ellas.

El rango de una matriz A se simboliza: **rang(A)** o **r(A)**.

Cálculo por el método de Gauss

Podemos descartar una línea si:

Todos sus coeficientes son ceros.

Hay dos líneas iguales.

Una línea es proporcional a otra.

Una línea es combinación lineal de otras.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_3 = 2F_1$$

$$F_4 \text{ es nula}$$

$$F_5 = 2F_2 + F_1$$

$$r(A) = 2.$$

En general consiste en hacer nulas el máximo número de líneas posible, y el rango será el número de filas no nulas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & -12 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$F_2 = F_2 - 3F_1$$

$$F_3 = F_3 - 2F_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto $r(A) = 3$.

Ejercicio 23

¿Cuál es el rango de la matriz A?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \\ -2 & 3 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$$

- a) $r(A) = 1$
- b) $r(A) = 2$
- c) $r(A) = 3$
- d) Ninguna de las anteriores es correcta

Ejercicio 24

Calcule el rango de: $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 7 \\ -1 & 1 & 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

- a) $\text{Rang}(A) = 3$
- b) $\text{Rang}(A) = 4$
- c) $\text{Rang}(A) = 2$
- d) $\text{Rang}(A) = 1$

Ejercicio 25

Obtener el valor de a para que el rango de la matriz A sea 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & a \end{pmatrix}$$

- a) $a = -3$
- b) $a = 3$
- c) $a = -1$
- d) $a = 1$

Ejercicio 26

Hallar el valor de K para que el rango de la matriz A sea 2:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & k & 5 \end{pmatrix}$$

- a) $K = 0$
- b) $K \neq 10$
- c) $K = 10$
- d) No depende de K

5. POTENCIAS DE MATRICES CUADRADAS.:

Se define la potencia n-ésima de una matriz cuadrada, al producto matricial de n matrices igual a A, esto es: $A^n = A \cdot A \cdot A \cdot \dots \cdot A$

1. Método de inducción

Sea la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calcular $A^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Solución.-

En cualquier problema de este tipo es conveniente empezar calculando las sucesivas potencias de la matriz cuadrada A. En este caso vamos a observar que estas potencias parecen obedecer a un cierto patrón, lo que nos permite la posibilidad de lanzar una hipótesis sobre el valor de A^n .

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 2^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^2 & 0 & 2^2 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 0 & 2^3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^3 & 0 & 2^3 \end{pmatrix}$$

Entonces: $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

2. Matriz periódica: Una matriz cuadrada A es periódica si existe $n \in \mathbb{N} / A^{n+1} = A$, al menor número natural n que le ocurre esto se le llama período.

Ejemplo: Calcular A^{100} , siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 14 \\ 1 & 3 & 8 \\ -1 & -2 & -6 \end{pmatrix}$ vamos calculando las sucesivas potencias de A:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 14 \\ 1 & 3 & 8 \\ -1 & -2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 14 \\ 1 & 3 & 8 \\ -1 & -2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -16 \\ -3 & -2 & -10 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -16 \\ -3 & -2 & -10 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 14 \\ 1 & 3 & 8 \\ -1 & -2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 14 \\ 1 & 3 & 8 \\ -1 & -2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 14 \\ 1 & 3 & 8 \\ -1 & -2 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow A^4 = A \rightarrow 4 = n + 1 \rightarrow$$

$n = 3$ periodo

Una vez que sabemos que el periodo es 3 tenemos que dividir el exponente de la matriz que nos han preguntado entre el periodo y lo que nos quede de resto es la potencia de A solución del problema. En este ejemplo si dividimos 100 entre 3 cabe a 33 y nos queda de resto 1, entonces la solución es $A^{100} =$

$$A^1 = A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 14 \\ 1 & 3 & 8 \\ -1 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

3. Matriz nilpotentes: Se dice que una matriz cuadrada A es nilpotente si se cumple que $A^n = 0$.

Ejemplo: Calcular A^{37} , siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Calculamos las sucesivas potencias de A: $A^2 = A \cdot$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ como } A^3=0 \text{ para cualquier } n \geq 3 \text{ se cumple}$$

que $A^n = 0 \rightarrow A^{37} = 0$

Ejercicio 27

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar la matriz A^n , siendo n un número natural

a) $A^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & na \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & na \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 1 \\ 0 & 1 & na \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $A^n = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & na \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



ACADEMIA MAGÜIPREPARATORIA