

¿Qué es un Gran Cardinal?

Édgar

UAM/The New Centre
RIIMAT

Introducción

La idea de gran cardinal está íntimamente relacionada a los fundamentos de la matemática y es parte del corazón del los teoremas de Gödel.

La idea de gran cardinal está íntimamente relacionada a los fundamentos de la matemática y es parte del corazón de los teoremas de Gödel. Aunque Gödel mismo no trató esta parte, la teoría de grandes cardinales está íntimamente relacionada a sus teoremas.

La idea de gran cardinal está íntimamente relacionada a los fundamentos de la matemática y es parte del corazón de los teoremas de Gödel. Aunque Gödel mismo no trató esta parte, la teoría de grandes cardinales está íntimamente relacionada a sus teoremas.

Teorema (1ero de incompletud)

Si una teoría T es lo suficientemente fuerte como para desarrollar aritmética, entonces la teoría es incompleta o es inconsistente.

La idea de gran cardinal está íntimamente relacionada a los fundamentos de la matemática y es parte del corazón de los teoremas de Gödel. Aunque Gödel mismo no trató esta parte, la teoría de grandes cardinales está íntimamente relacionada a sus teoremas.

Teorema (1ero de incompletud)

Si una teoría T es lo suficientemente fuerte como para desarrollar aritmética, entonces la teoría es incompleta o es inconsistente.

Teorema (2do de incompletud)

Si una teoría T es lo suficientemente fuerte como para desarrollar aritmética, la teoría no puede probar su propia consistencia.

La idea de gran cardinal está íntimamente relacionada a los fundamentos de la matemática y es parte del corazón de los teoremas de Gödel. Aunque Gödel mismo no trató esta parte, la teoría de grandes cardinales está íntimamente relacionada a sus teoremas.

Teorema (1ero de incompletud)

Si una teoría T es lo suficientemente fuerte como para desarrollar aritmética, entonces la teoría es incompleta o es inconsistente.

Teorema (2do de incompletud)

Si una teoría T es lo suficientemente fuerte como para desarrollar aritmética, la teoría no puede probar su propia consistencia.

Una de dichas teorías es la teoría de conjuntos ZFE.

Recordamos que la teoría ZFE está conformada por la siguiente colección de axiomas

Recordamos que la teoría ZFE está conformada por la siguiente colección de axiomas

- Existe al menos un conjunto, y dicho conjunto es vacío, \emptyset .

Recordamos que la teoría ZFE está conformada por la siguiente colección de axiomas

- Existe al menos un conjunto, y dicho conjunto es vacío, \emptyset .
- Si x, y son conjuntos, entonces $\{x, y\}$ es un conjunto.

Recordamos que la teoría ZFE está conformada por la siguiente colección de axiomas

- Existe al menos un conjunto, y dicho conjunto es vacío, \emptyset .
- Si x, y son conjuntos, entonces $\{x, y\}$ es un conjunto.
- Si x es un conjunto, entonces su unión

$$\bigcup x = \bigcup \{y : y \in x\}$$

también es un conjunto.

Recordamos que la teoría ZFE está conformada por la siguiente colección de axiomas

- Existe al menos un conjunto, y dicho conjunto es vacío, \emptyset .
- Si x, y son conjuntos, entonces $\{x, y\}$ es un conjunto.
- Si x es un conjunto, entonces su unión

$$\bigcup x = \bigcup \{y : y \in x\}$$

también es un conjunto.

- Dos conjuntos x, y son iguales siempre que sus elementos sean los mismos.

Recordamos que la teoría ZFE está conformada por la siguiente colección de axiomas

- Existe al menos un conjunto, y dicho conjunto es vacío, \emptyset .
- Si x, y son conjuntos, entonces $\{x, y\}$ es un conjunto.
- Si x es un conjunto, entonces su unión

$$\bigcup x = \bigcup \{y : y \in x\}$$

también es un conjunto.

- Dos conjuntos x, y son iguales siempre que sus elementos sean los mismos.
- Si x es un conjunto, entonces la colección de todos sus subconjuntos, *el conjunto potencia* $\mathcal{P}(x) = \{y : y \subset x\}$, es un conjunto.

Recordamos que la teoría ZFE está conformada por la siguiente colección de axiomas

Recordamos que la teoría ZFE está conformada por la siguiente colección de axiomas

- Existe un conjunto infinito ω .

Recordamos que la teoría ZFE está conformada por la siguiente colección de axiomas

- Existe un conjunto infinito ω .
- Si f es una función de conjuntos y x es un conjunto, la imagen directa de x respecto a f , $f[x]$, es de nuevo un conjunto .

Recordamos que la teoría ZFE está conformada por la siguiente colección de axiomas

- Existe un conjunto infinito ω .
- Si f es una función de conjuntos y x es un conjunto, la imagen directa de x respecto a f , $f[x]$, es de nuevo un conjunto .
- Para todo conjunto x existe un $y \in x$ tal que $y \cap x = \emptyset$.

Recordamos que la teoría ZFE está conformada por la siguiente colección de axiomas

- Existe un conjunto infinito ω .
- Si f es una función de conjuntos y x es un conjunto, la imagen directa de x respecto a f , $f[x]$, es de nuevo un conjunto .
- Para todo conjunto x existe un $y \in x$ tal que $y \cap x = \emptyset$.
- Si x es un conjunto y P es una propiedad de conjuntos, entonces

$$x \cap P = \{y \in x : P(y)\}$$

también es un conjunto.

Recordamos que la teoría ZFE está conformada por la siguiente colección de axiomas

- Existe un conjunto infinito ω .
- Si f es una función de conjuntos y x es un conjunto, la imagen directa de x respecto a f , $f[x]$, es de nuevo un conjunto .
- Para todo conjunto x existe un $y \in x$ tal que $y \cap x = \emptyset$.
- Si x es un conjunto y P es una propiedad de conjuntos, entonces

$$x \cap P = \{y \in x : P(y)\}$$

también es un conjunto.

- Sea x un conjunto tal que $\emptyset \notin x$, entonces el producto cartesiano

$$\prod x = \prod \{y : y \in x\}$$

está bien definido.

Recordamos que la teoría ZFE está conformada por la siguiente colección de axiomas

- Existe un conjunto infinito ω .
- Si f es una función de conjuntos y x es un conjunto, la imagen directa de x respecto a f , $f[x]$, es de nuevo un conjunto .
- Para todo conjunto x existe un $y \in x$ tal que $y \cap x = \emptyset$.
- Si x es un conjunto y P es una propiedad de conjuntos, entonces

$$x \cap P = \{y \in x : P(y)\}$$

también es un conjunto.

- Sea x un conjunto tal que $\emptyset \notin x$, entonces el producto cartesiano

$$\prod x = \prod \{y : y \in x\}$$

está bien definido.

Que ZFE sea incompleta significa que existen enunciados φ que son independientes de ella.

Que ZFE sea incompleta significa que existen enunciados φ que son independientes de ella. Dada una teoría T y un enunciado φ .

Que ZFE sea incompleta significa que existen enunciados φ que son independientes de ella. Dada una teoría T y un enunciado φ . Decimos que φ es independiente si $T + \varphi$ y $T + \neg\varphi$ tiene modelos.

Que ZFE sea incompleta significa que existen enunciados φ que son independientes de ella. Dada una teoría T y un enunciado φ . Decimos que φ es independiente si $T + \varphi$ y $T + \neg\varphi$ tiene modelos. Esto es existen dos estructuras $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ tales que

Que ZFE sea incompleta significa que existen enunciados φ que son independientes de ella. Dada una teoría T y un enunciado φ . Decimos que φ es independiente si $T + \varphi$ y $T + \neg\varphi$ tiene modelos. Esto es existen dos estructuras $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ tales que

$$\mathfrak{M} \models T + \varphi \quad \text{“}T + \varphi \text{ es verdadera en } \mathfrak{M}\text{”}$$

Que ZFE sea incompleta significa que existen enunciados φ que son independientes de ella. Dada una teoría T y un enunciado φ . Decimos que φ es independiente si $T + \varphi$ y $T + \neg\varphi$ tiene modelos. Esto es existen dos estructuras $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ tales que

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{M} \models T + \varphi & \text{“}T + \varphi \text{ es verdadera en } \mathfrak{M}\text{”} \\ \mathfrak{N} \models T + \neg\varphi & \text{“}T + \neg\varphi \text{ es verdadera en } \mathfrak{N}\text{”} \end{array}$$

Teoría de Conjuntos

ZFC

El «modelo» canónico de ZFE es $V = \{x : x = x\}$,

El «modelo» canónico de ZFE es $V = \{x : x = x\}$, que también podemos definir por *recursión ordinal*:

$$V_0 = \emptyset$$

El «modelo» canónico de ZFE es $V = \{x : x = x\}$, que también podemos definir por *recursión ordinal*:

$$\begin{aligned}V_0 &= \emptyset \\V_{\alpha+1} &= \mathcal{P}(V_\alpha)\end{aligned}$$

El «modelo» canónico de ZFE es $V = \{x : x = x\}$, que también podemos definir por *recursión ordinal*:

$$\begin{aligned}V_0 &= \emptyset \\V_{\alpha+1} &= \mathcal{P}(V_\alpha) \\V_\lambda &= \bigcup_{\xi < \lambda} V_\xi\end{aligned}$$

El «modelo» canónico de ZFE es $V = \{x : x = x\}$, que también podemos definir por *recursión ordinal*:

$$\begin{aligned}V_0 &= \emptyset \\V_{\alpha+1} &= \mathcal{P}(V_\alpha) \\V_\lambda &= \bigcup_{\xi < \lambda} V_\xi \\V &= \bigcup_{\alpha \in Or} V_\alpha\end{aligned}$$

El «modelo» canónico de ZFE es $V = \{x : x = x\}$, que también podemos definir por *recursión ordinal*:

$$\begin{aligned}V_0 &= \emptyset \\V_{\alpha+1} &= \mathcal{P}(V_\alpha) \\V_\lambda &= \bigcup_{\xi < \lambda} V_\xi \\V &= \bigcup_{\alpha \in Or} V_\alpha\end{aligned}$$

V es lo que llamamos *una clase propia*.

El «modelo» canónico de ZFE es $V = \{x : x = x\}$, que también podemos definir por *recursión ordinal*:

$$\begin{aligned}V_0 &= \emptyset \\V_{\alpha+1} &= \mathcal{P}(V_\alpha) \\V_\lambda &= \bigcup_{\xi < \lambda} V_\xi \\V &= \bigcup_{\alpha \in Or} V_\alpha\end{aligned}$$

V es lo que llamamos *una clase propia*. Es decir una colección de conjuntos que es tan grande que no se puede considerar un conjunto.

El «modelo» canónico de ZFE es $V = \{x : x = x\}$, que también podemos definir por *recursión ordinal*:

$$\begin{aligned}V_0 &= \emptyset \\V_{\alpha+1} &= \mathcal{P}(V_\alpha) \\V_\lambda &= \bigcup_{\xi < \lambda} V_\xi \\V &= \bigcup_{\alpha \in Or} V_\alpha\end{aligned}$$

V es lo que llamamos *una clase propia*. Es decir una colección de conjuntos que es tan grande que no se puede considerar un conjunto. Por los teoremas de Gödel,

El «modelo» canónico de ZFE es $V = \{x : x = x\}$, que también podemos definir por *recursión ordinal*:

$$\begin{aligned}V_0 &= \emptyset \\V_{\alpha+1} &= \mathcal{P}(V_\alpha) \\V_\lambda &= \bigcup_{\xi < \lambda} V_\xi \\V &= \bigcup_{\alpha \in Or} V_\alpha\end{aligned}$$

V es lo que llamamos *una clase propia*. Es decir una colección de conjuntos que es tan grande que no se puede considerar un conjunto. Por los teoremas de Gödel, no podemos asegurar que ZFE tenga un modelo (*conjunto*)

El «modelo» canónico de ZFE es $V = \{x : x = x\}$, que también podemos definir por *recursión ordinal*:

$$\begin{aligned} V_0 &= \emptyset \\ V_{\alpha+1} &= \mathcal{P}(V_\alpha) \\ V_\lambda &= \bigcup_{\xi < \lambda} V_\xi \\ V &= \bigcup_{\alpha \in Or} V_\alpha \end{aligned}$$

V es lo que llamamos *una clase propia*. Es decir una colección de conjuntos que es tan grande que no se puede considerar un conjunto. Por los teoremas de Gödel, no podemos asegurar que ZFE tenga un modelo (*conjunto*) pero sí podemos *suponer* que existe un modelo de ZFE.

Regresando a la idea de gran cardinal, un gran cardinal κ , propicia que algún estrato V_α de hecho sea modelo de ZFE.

Regresando a la idea de gran cardinal, un gran cardinal κ , propicia que algún estrato V_α de hecho sea modelo de ZFE. En la mayor parte de los casos $\alpha = \kappa$.

Regresando a la idea de gran cardinal, un gran cardinal κ , propicia que algún estrato V_α de hecho sea modelo de ZFE. En la mayor parte de los casos $\alpha = \kappa$. Si tal gran cardinal existe y se demuestra en ZFE, entonces $V_\alpha \models \text{ZFE}$ es consistente, cosa que se contrapone al segundo teorema de incompletud de Gödel.

Regresando a la idea de gran cardinal, un gran cardinal κ , propicia que algún estrato V_α de hecho sea modelo de ZFE. En la mayor parte de los casos $\alpha = \kappa$. Si tal gran cardinal existe y se demuestra en ZFE, entonces $V_\alpha \models \text{ZFE}$ es consistente, cosa que se contrapone al segundo teorema de incompletud de Gödel. Así que la existencia de un gran cardinal no se puede deducir de ZFE.

Regresando a la idea de gran cardinal, un gran cardinal κ , propicia que algún estrato V_α de hecho sea modelo de ZFE. En la mayor parte de los casos $\alpha = \kappa$. Si tal gran cardinal existe y se demuestra en ZFE, entonces $V_\alpha \models \text{ZFE}$ es consistente, cosa que se contrapone al segundo teorema de incompletud de Gödel. Así que la existencia de un gran cardinal no se puede deducir de ZFE. Pero se puede suponer perfectamente.

Regresando a la idea de gran cardinal, un gran cardinal κ , propicia que algún estrato V_α de hecho sea modelo de ZFE. En la mayor parte de los casos $\alpha = \kappa$. Si tal gran cardinal existe y se demuestra en ZFE, entonces $V_\alpha \models \text{ZFE}$ es consistente, cosa que se contrapone al segundo teorema de incompletud de Gödel. Así que la existencia de un gran cardinal no se puede deducir de ZFE. Pero se puede suponer perfectamente.

Una propiedad fundamental de un gran cardinal es que «no se puede alcanzar con cardinales más pequeños».

Regresando a la idea de gran cardinal, un gran cardinal κ , propicia que algún estrato V_α de hecho sea modelo de ZFE. En la mayor parte de los casos $\alpha = \kappa$. Si tal gran cardinal existe y se demuestra en ZFE, entonces $V_\alpha \models \text{ZFE}$ es consistente, cosa que se contrapone al segundo teorema de incompletud de Gödel. Así que la existencia de un gran cardinal no se puede deducir de ZFE. Pero se puede suponer perfectamente.

Una propiedad fundamental de un gran cardinal es que «no se puede alcanzar con cardinales más pequeños». Más adelante puntualizaremos esto.

Diremos que un modelo \mathfrak{M} de ZFC o de algún fragmento es *transitivo* si $x \in y$, $y \in \mathfrak{M}$ implican $x \in \mathfrak{M}$.

Diremos que un modelo \mathfrak{M} de *ZFC* o de algún fragmento es *transitivo* si $x \in y, y \in \mathfrak{M}$ implican $x \in \mathfrak{M}$. O lo que es lo mismo $x \in \mathfrak{M} \rightarrow x \subset \mathfrak{M}$.

Diremos que un modelo \mathfrak{M} de *ZFC* o de algún fragmento es *transitivo* si $x \in y, y \in \mathfrak{M}$ implican $x \in \mathfrak{M}$. O lo que es lo mismo $x \in \mathfrak{M} \rightarrow x \subset \mathfrak{M}$. La transitividad por sí sola implica Fundación, Extensionalidad

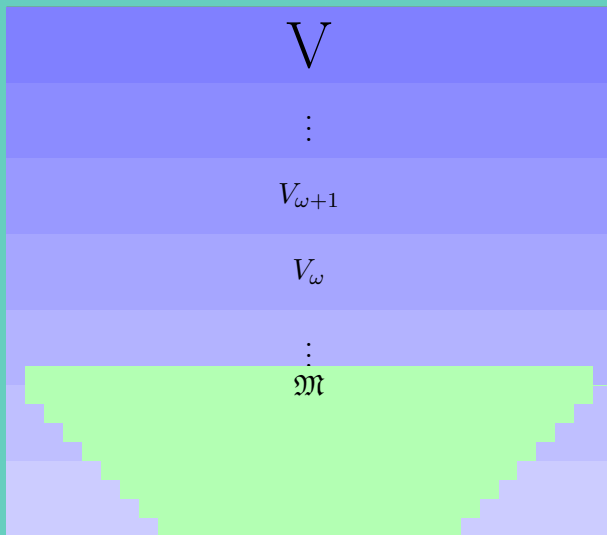
Diremos que un modelo \mathfrak{M} de ZFC o de algún fragmento es *transitivo* si $x \in y$, $y \in \mathfrak{M}$ implican $x \in \mathfrak{M}$. O lo que es lo mismo $x \in \mathfrak{M} \rightarrow x \subset \mathfrak{M}$. La transitividad por sí sola implica Fundación, Extensionalidad y si \mathfrak{M} satisface estos axiomas podemos encontrar \mathfrak{N} que sea transitivo e isomorfo a \mathfrak{M} .

Diremos que un modelo \mathfrak{M} de *ZFC* o de algún fragmento es *transitivo* si $x \in y$, $y \in \mathfrak{M}$ implican $x \in \mathfrak{M}$. O lo que es lo mismo $x \in \mathfrak{M} \rightarrow x \subset \mathfrak{M}$. La transitividad por sí sola implica Fundación, Extensionalidad y si \mathfrak{M} satisface estos axiomas podemos encontrar \mathfrak{N} que sea transitivo e isomorfo a \mathfrak{M} . La intuición es que si \mathfrak{M} es transitivo entonces la relación $\in^{\mathfrak{M}}$ (la pertenencia en \mathfrak{M}) es la pertenencia *de verdad*,

Diremos que un modelo \mathfrak{M} de *ZFC* o de algún fragmento es *transitivo* si $x \in y$, $y \in \mathfrak{M}$ implican $x \in \mathfrak{M}$. O lo que es lo mismo $x \in \mathfrak{M} \rightarrow x \subset \mathfrak{M}$. La transitividad por sí sola implica Fundación, Extensionalidad y si \mathfrak{M} satisface estos axiomas podemos encontrar \mathfrak{N} que sea transitivo e isomorfo a \mathfrak{M} . La intuición es que si \mathfrak{M} es transitivo entonces la relación $\in^{\mathfrak{M}}$ (la pertenencia en \mathfrak{M}) es la pertenencia *de verdad*, es decir que \mathfrak{M} está contenido en un segmento inicial de la clase canónica V .

ZFC

 V \vdots $V_{\omega+1}$ V_{ω} \vdots V_1 V_0



Ordinales y Cardinales

Ordinales y Cardinales

Un *ordinal* es un conjunto transitivo y bien ordenado.

Ordinales y Cardinales

Un *ordinal* es un conjunto transitivo y bien ordenado.

$Or = \{\alpha : \alpha \text{ es un ordinal}\}$ es una clase propia:

Ordinales y Cardinales

Un *ordinal* es un conjunto transitivo y bien ordenado.

$Or = \{\alpha : \alpha \text{ es un ordinal}\}$ es una clase propia: si fuera un conjunto entonces $Or \cup \{Or\} = Or + 1$ es un ordinal

Es transitivo porque si $x \in \alpha \in Or$ entonces x es un ordinal

Ordinales y Cardinales

Un *ordinal* es un conjunto transitivo y bien ordenado.

$Or = \{\alpha : \alpha \text{ es un ordinal}\}$ es una clase propia: si fuera un conjunto entonces $Or \cup \{Or\} = Or + 1$ es un ordinal

Es transitivo porque si $x \in \alpha \in Or$ entonces x es un ordinal está bien ordenado porque si $X \subset Or$ es un conjunto de ordinales entonces $\text{mín } X = \bigcap X \in X$ es un ordinal.

Ordinales y Cardinales

Un *ordinal* es un conjunto transitivo y bien ordenado.

$Or = \{\alpha : \alpha \text{ es un ordinal}\}$ es una clase propia: si fuera un conjunto entonces $Or \cup \{Or\} = Or + 1$ es un ordinal

Es transitivo porque si $x \in \alpha \in Or$ entonces x es un ordinal está bien ordenado porque si $X \subset Or$ es un conjunto de ordinales entonces $\text{mín } X = \bigcap X \in X$ es un ordinal.

y por definición $Or + 1 \in Or$, lo cual es una contradicción al axioma de fundación.

Ordinales y Cardinales

Un *cardinal* κ se define como el primer ordinal con tamaño κ .

Ordinales y Cardinales

Un *cardinal* κ se define como el primer ordinal con tamaño κ . Por ejemplo $\omega + 1$ tiene tamaño ω ,

Ordinales y Cardinales

Un *cardinal* κ se define como el primer ordinal con tamaño κ . Por ejemplo $\omega + 1$ tiene tamaño ω , $\omega + \omega$ tiene tamaño ω

Ordinales y Cardinales

Un *cardinal* κ se define como el primer ordinal con tamaño κ . Por ejemplo $\omega + 1$ tiene tamaño ω , $\omega + \omega$ tiene tamaño ω y de hecho

$$\bigcup \{ \omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \dots \}$$

tiene tamaño ω . **AQUÍ ESTAMOS CONSIDERANDO EXPONENCIACIÓN ORDINAL \neq EXPONENCIACIÓN CARDINAL.**

Ordinales y Cardinales

Un *cardinal* κ se define como el primer ordinal con tamaño κ . Por ejemplo $\omega + 1$ tiene tamaño ω , $\omega + \omega$ tiene tamaño ω y de hecho

$$\bigcup \{ \omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \dots \}$$

tiene tamaño ω . **AQUÍ ESTAMOS CONSIDERANDO EXPONENCIACIÓN ORDINAL \neq EXPONENCIACIÓN CARDINAL.** Las operaciones ordinales podemos pensarlas como adjuntar órdenes lineales: por ejemplo $(\omega + 1) \cdot \omega = (\omega + 1) + (\omega + 1) + (\omega + 1) + \dots$ es

Ordinales y Cardinales

Un *cardinal* κ se define como el primer ordinal con tamaño κ . Por ejemplo $\omega + 1$ tiene tamaño ω , $\omega + \omega$ tiene tamaño ω y de hecho

$$\bigcup \{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \dots\}$$

tiene tamaño ω . **AQUÍ ESTAMOS CONSIDERANDO EXPONENCIACIÓN ORDINAL \neq EXPONENCIACIÓN CARDINAL.** Las operaciones ordinales podemos pensarlas como adjuntar órdenes lineales: por ejemplo $(\omega + 1) \cdot \omega = (\omega + 1) + (\omega + 1) + (\omega + 1) + \dots$ es

$$\underbrace{\mathbb{N}}_{\infty} \infty$$

Ordinales y Cardinales

Un *cardinal* κ se define como el primer ordinal con tamaño κ . Por ejemplo $\omega + 1$ tiene tamaño ω , $\omega + \omega$ tiene tamaño ω y de hecho

$$\bigcup \{ \omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \dots \}$$

tiene tamaño ω . **AQUÍ ESTAMOS CONSIDERANDO EXPONENCIACIÓN ORDINAL \neq EXPONENCIACIÓN CARDINAL.** Las operaciones ordinales podemos pensarlas como adjuntar órdenes lineales: por ejemplo $(\omega + 1) \cdot \omega = (\omega + 1) + (\omega + 1) + (\omega + 1) + \dots$ es

$$\underbrace{\quad \mathbb{N} \quad}_{\infty} \underbrace{\quad \mathbb{N} \quad}_{\infty}$$

Ordinales y Cardinales

Un *cardinal* κ se define como el primer ordinal con tamaño κ . Por ejemplo $\omega + 1$ tiene tamaño ω , $\omega + \omega$ tiene tamaño ω y de hecho

$$\bigcup \{ \omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \dots \}$$

tiene tamaño ω . **AQUÍ ESTAMOS CONSIDERANDO EXPONENCIACIÓN ORDINAL \neq EXPONENCIACIÓN CARDINAL.** Las operaciones ordinales podemos pensarlas como adjuntar órdenes lineales: por ejemplo $(\omega + 1) \cdot \omega = (\omega + 1) + (\omega + 1) + (\omega + 1) + \dots$ es

$$\underbrace{\quad}_{\mathbb{N}} \quad \infty \quad \underbrace{\quad}_{\mathbb{N}} \quad \infty \quad \underbrace{\quad}_{\mathbb{N}} \quad \infty$$

Ordinales y Cardinales

Un *cardinal* κ se define como el primer ordinal con tamaño κ . Por ejemplo $\omega + 1$ tiene tamaño ω , $\omega + \omega$ tiene tamaño ω y de hecho

$$\bigcup \{ \omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \dots \}$$

tiene tamaño ω . **AQUÍ ESTAMOS CONSIDERANDO EXPONENCIACIÓN ORDINAL \neq EXPONENCIACIÓN CARDINAL.** Las operaciones ordinales podemos pensarlas como adjuntar órdenes lineales: por ejemplo $(\omega + 1) \cdot \omega = (\omega + 1) + (\omega + 1) + (\omega + 1) + \dots$ es

$$\underbrace{\quad}_{\mathbb{N}} \quad \infty \quad \underbrace{\quad}_{\mathbb{N}} \quad \infty \quad \underbrace{\quad}_{\mathbb{N}} \quad \infty \quad \dots$$

Ordinales y Cardinales

Propiedades y definiciones básicas.

- Si κ es un cardinal entonces hay κ ordinales debajo de κ .

Ordinales y Cardinales

Propiedades y definiciones básicas.

- Si κ es un cardinal entonces hay κ ordinales debajo de κ .
- κ^+ es el primer cardinal mayor que κ . κ^+ es llamado el cardinal sucesor de κ .

Ordinales y Cardinales

Propiedades y definiciones básicas.

- Si κ es un cardinal entonces hay κ ordinales debajo de κ .
- κ^+ es el primer cardinal mayor que κ . κ^+ es llamado el cardinal sucesor de κ .
- Existe una enumeración natural: $\aleph_0 = \omega$, $\aleph_1 = \omega^+$, $\aleph_2 = \omega^{++}$, \dots

Ordinales y Cardinales

Propiedades y definiciones básicas.

- Si κ es un cardinal entonces hay κ ordinales debajo de κ .
- κ^+ es el primer cardinal mayor que κ . κ^+ es llamado el cardinal sucesor de κ .
- Existe una enumeración natural: $\aleph_0 = \omega$, $\aleph_1 = \omega^+$, $\aleph_2 = \omega^{++}$, \dots
 $\aleph_\omega = \bigcup_{n < \omega} \aleph_n$, $\aleph_{\omega+1} = (\aleph_\omega)^+$, \dots

Ordinales y Cardinales

Propiedades y definiciones básicas.

- Si κ es un cardinal entonces hay κ ordinales debajo de κ .
- κ^+ es el primer cardinal mayor que κ . κ^+ es llamado el cardinal sucesor de κ .
- Existe una enumeración natural: $\aleph_0 = \omega$, $\aleph_1 = \omega^+$, $\aleph_2 = \omega^{++}$, \dots
 $\aleph_\omega = \bigcup_{n < \omega} \aleph_n$, $\aleph_{\omega+1} = (\aleph_\omega)^+$, \dots
- κ es *límite* ssi

Ordinales y Cardinales

Propiedades y definiciones básicas.

- Si κ es un cardinal entonces hay κ ordinales debajo de κ .
- κ^+ es el primer cardinal mayor que κ . κ^+ es llamado el cardinal sucesor de κ .
- Existe una enumeración natural: $\aleph_0 = \omega$, $\aleph_1 = \omega^+$, $\aleph_2 = \omega^{++}$, \dots
 $\aleph_\omega = \bigcup_{n < \omega} \aleph_n$, $\aleph_{\omega+1} = (\aleph_\omega)^+$, \dots
- κ es *límite* ssi $\rho < \kappa$ implica $\rho^+ < \kappa$.

Ordinales y Cardinales

Esto nos lleva a nuestra primer aproximación de gran cardinal, notemos que un cardinal límite κ no puede ser alcanzado con la operación sucesor $\rho \mapsto \rho^+$.

Ordinales y Cardinales

Esto nos lleva a nuestra primer aproximación de gran cardinal, notemos que un cardinal límite κ no puede ser alcanzado con la operación sucesor $\rho \mapsto \rho^+$.

Retomando el axioma del conjunto potencia, Cantor demuestra que $\kappa < 2^\kappa = |\mathcal{P}(\kappa)|$, es decir

$$\kappa^+ \leq 2^\kappa.$$

Ordinales y Cardinales

Esto nos lleva a nuestra primer aproximación de gran cardinal, notemos que un cardinal límite κ no puede ser alcanzado con la operación sucesor $\rho \mapsto \rho^+$.

Retomando el axioma del conjunto potencia, Cantor demuestra que $\kappa < 2^\kappa = |\mathcal{P}(\kappa)|$, es decir

$$\kappa^+ \leq 2^\kappa.$$

Ahora, un cardinal se dice ser *límite fuerte* si para cualquier $\rho < \kappa$ tenemos $2^\rho < \kappa$.

Ordinales y Cardinales

Esto nos lleva a nuestra primer aproximación de gran cardinal, notemos que un cardinal límite κ no puede ser alcanzado con la operación sucesor $\rho \mapsto \rho^+$.

Retomando el axioma del conjunto potencia, Cantor demuestra que $\kappa < 2^\kappa = |\mathcal{P}(\kappa)|$, es decir

$$\kappa^+ \leq 2^\kappa.$$

Ahora, un cardinal se dice ser *límite fuerte* si para cualquier $\rho < \kappa$ tenemos $2^\rho < \kappa$. Esto nos da otra pauta para definir un gran cardinal, ya que un cardinal límite fuerte no puede ser alcanzado con aritmética cardinal (sumas/sucesores/potencias), pero ZFE sí puede demostrar la existencia de cardinales límites fuertes:

Ordinales y Cardinales

Esto nos lleva a nuestra primer aproximación de gran cardinal, notemos que un cardinal límite κ no puede ser alcanzado con la operación sucesor $\rho \mapsto \rho^+$.

Retomando el axioma del conjunto potencia, Cantor demuestra que $\kappa < 2^\kappa = |\mathcal{P}(\kappa)|$, es decir

$$\kappa^+ \leq 2^\kappa.$$

Ahora, un cardinal se dice ser *límite fuerte* si para cualquier $\rho < \kappa$ tenemos $2^\rho < \kappa$. Esto nos da otra pauta para definir un gran cardinal, ya que un cardinal límite fuerte no puede ser alcanzado con aritmética cardinal (sumas/sucesores/potencias), pero ZFE sí puede demostrar la existencia de cardinales límites fuertes:

$$\kappa + 2^\kappa + 2^{2^\kappa} + 2^{2^{2^\kappa}} + \dots$$

Ordinales y Cardinales

Definición

α es cofinal en β

Ordinales y Cardinales

Definición

α es cofinal en β si existe una función creciente $f : \alpha \rightarrow \beta$ tal que para cada $\xi < \beta$, $\xi \leq f(\zeta)$ para alguna $\zeta < \alpha$.

Ordinales y Cardinales

Definición

α es cofinal en β si existe una función creciente $f : \alpha \rightarrow \beta$ tal que para cada $\xi < \beta$, $\xi \leq f(\zeta)$ para alguna $\zeta < \alpha$. Es decir si existe una función o sucesión de ordinales con $\bigcup f[\alpha] = \beta$.

Ordinales y Cardinales

Definición

α es cofinal en β si existe una función creciente $f : \alpha \rightarrow \beta$ tal que para cada $\xi < \beta$, $\xi \leq f(\zeta)$ para alguna $\zeta < \alpha$. Es decir si existe una función o sucesión de ordinales con $\bigcup f[\alpha] = \beta$.



Ordinales y Cardinales

Definición

α es cofinal en β si existe una función creciente $f : \alpha \rightarrow \beta$ tal que para cada $\xi < \beta$, $\xi \leq f(\zeta)$ para alguna $\zeta < \alpha$. Es decir si existe una función o sucesión de ordinales con $\bigcup f[\alpha] = \beta$.



Ordinales y Cardinales

Definición

α es cofinal en β si existe una función creciente $f : \alpha \rightarrow \beta$ tal que para cada $\xi < \beta$, $\xi \leq f(\zeta)$ para alguna $\zeta < \alpha$. Es decir si existe una función o sucesión de ordinales con $\bigcup f[\alpha] = \beta$.



Ordinales y Cardinales

Definición

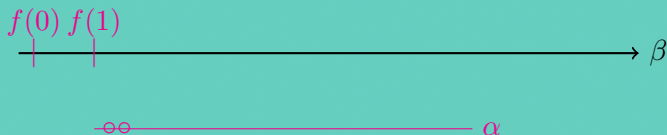
α es cofinal en β si existe una función creciente $f : \alpha \rightarrow \beta$ tal que para cada $\xi < \beta$, $\xi \leq f(\zeta)$ para alguna $\zeta < \alpha$. Es decir si existe una función o sucesión de ordinales con $\bigcup f[\alpha] = \beta$.



Ordinales y Cardinales

Definición

α es cofinal en β si existe una función creciente $f : \alpha \rightarrow \beta$ tal que para cada $\xi < \beta$, $\xi \leq f(\zeta)$ para alguna $\zeta < \alpha$. Es decir si existe una función o sucesión de ordinales con $\bigcup f[\alpha] = \beta$.



Ordinales y Cardinales

Definición

α es cofinal en β si existe una función creciente $f : \alpha \rightarrow \beta$ tal que para cada $\xi < \beta$, $\xi \leq f(\zeta)$ para alguna $\zeta < \alpha$. Es decir si existe una función o sucesión de ordinales con $\bigcup f[\alpha] = \beta$.



Ordinales y Cardinales

Definición

α es cofinal en β si existe una función creciente $f : \alpha \rightarrow \beta$ tal que para cada $\xi < \beta$, $\xi \leq f(\zeta)$ para alguna $\zeta < \alpha$. Es decir si existe una función o sucesión de ordinales con $\bigcup f[\alpha] = \beta$.



Ordinales y Cardinales

Definición

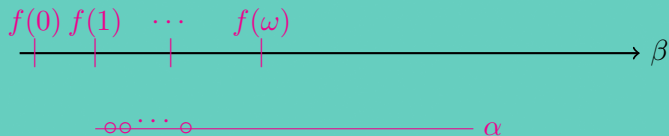
α es cofinal en β si existe una función creciente $f : \alpha \rightarrow \beta$ tal que para cada $\xi < \beta$, $\xi \leq f(\zeta)$ para alguna $\zeta < \alpha$. Es decir si existe una función o sucesión de ordinales con $\bigcup f[\alpha] = \beta$.



Ordinales y Cardinales

Definición

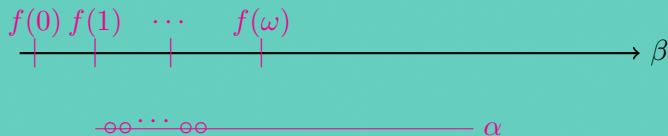
α es cofinal en β si existe una función creciente $f : \alpha \rightarrow \beta$ tal que para cada $\xi < \beta$, $\xi \leq f(\zeta)$ para alguna $\zeta < \alpha$. Es decir si existe una función o sucesión de ordinales con $\bigcup f[\alpha] = \beta$.



Ordinales y Cardinales

Definición

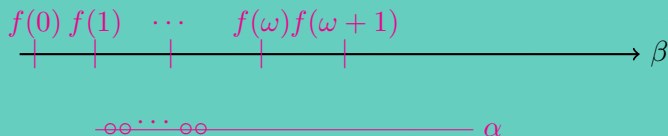
α es cofinal en β si existe una función creciente $f : \alpha \rightarrow \beta$ tal que para cada $\xi < \beta$, $\xi \leq f(\zeta)$ para alguna $\zeta < \alpha$. Es decir si existe una función o sucesión de ordinales con $\bigcup f[\alpha] = \beta$.



Ordinales y Cardinales

Definición

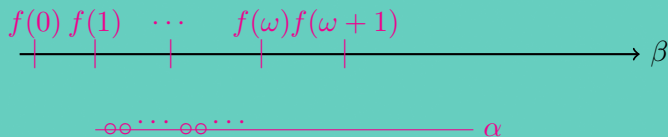
α es cofinal en β si existe una función creciente $f : \alpha \rightarrow \beta$ tal que para cada $\xi < \beta$, $\xi \leq f(\zeta)$ para alguna $\zeta < \alpha$. Es decir si existe una función o sucesión de ordinales con $\bigcup f[\alpha] = \beta$.



Ordinales y Cardinales

Definición

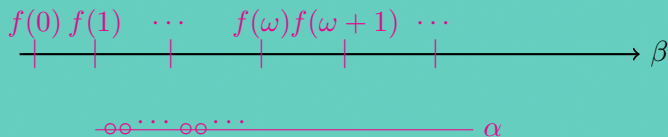
α es cofinal en β si existe una función creciente $f : \alpha \rightarrow \beta$ tal que para cada $\xi < \beta$, $\xi \leq f(\zeta)$ para alguna $\zeta < \alpha$. Es decir si existe una función o sucesión de ordinales con $\bigcup f[\alpha] = \beta$.



Ordinales y Cardinales

Definición

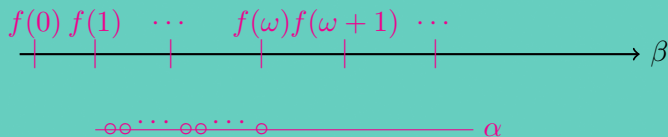
α es cofinal en β si existe una función creciente $f : \alpha \rightarrow \beta$ tal que para cada $\xi < \beta$, $\xi \leq f(\zeta)$ para alguna $\zeta < \alpha$. Es decir si existe una función o sucesión de ordinales con $\bigcup f[\alpha] = \beta$.



Ordinales y Cardinales

Definición

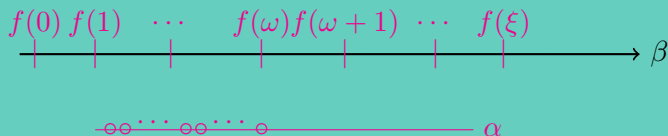
α es cofinal en β si existe una función creciente $f : \alpha \rightarrow \beta$ tal que para cada $\xi < \beta$, $\xi \leq f(\zeta)$ para alguna $\zeta < \alpha$. Es decir si existe una función o sucesión de ordinales con $\bigcup f[\alpha] = \beta$.



Ordinales y Cardinales

Definición

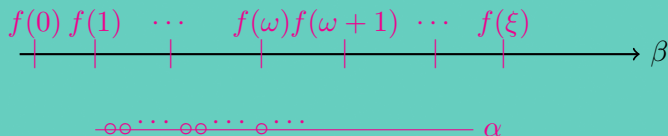
α es cofinal en β si existe una función creciente $f : \alpha \rightarrow \beta$ tal que para cada $\xi < \beta$, $\xi \leq f(\zeta)$ para alguna $\zeta < \alpha$. Es decir si existe una función o sucesión de ordinales con $\bigcup f[\alpha] = \beta$.



Ordinales y Cardinales

Definición

α es cofinal en β si existe una función creciente $f : \alpha \rightarrow \beta$ tal que para cada $\xi < \beta$, $\xi \leq f(\zeta)$ para alguna $\zeta < \alpha$. Es decir si existe una función o sucesión de ordinales con $\bigcup f[\alpha] = \beta$.



Ordinales y Cardinales

La idea tras la cofinalidad es que con α podemos *agotar* a β .

Ordinales y Cardinales

La idea tras la cofinalidad es que con α podemos *agotar* a β .

Definición

La función $cf : Or \rightarrow Car$ es la que aplica a α en el menor $\xi \leq \alpha$ tal que ξ es cofinal en α .

Ordinales y Cardinales

La idea tras la cofinalidad es que con α podemos *agotar* a β .

Definición

La función $cf : Or \rightarrow Car$ es la que aplica a α en el menor $\xi \leq \alpha$ tal que ξ es cofinal en α .

Por ejemplo, $\xi + 1$ tiene cofinalidad 1, $cf(\xi + 1) = 1$,

Ordinales y Cardinales

La idea tras la cofinalidad es que con α podemos *agotar* a β .

Definición

La función $cf : Or \rightarrow Car$ es la que aplica a α en el menor $\xi \leq \alpha$ tal que ξ es cofinal en α .

Por ejemplo, $\xi + 1$ tiene cofinalidad 1, $cf(\xi + 1) = 1$, porque al definir $f : 1 \rightarrow \xi + 1$ como $cf(0) = \xi$

Ordinales y Cardinales

La idea tras la cofinalidad es que con α podemos *agotar* a β .

Definición

La función $cf : Or \rightarrow Car$ es la que aplica a α en el menor $\xi \leq \alpha$ tal que ξ es cofinal en α .

Por ejemplo, $\xi + 1$ tiene cofinalidad 1, $cf(\xi + 1) = 1$, porque al definir $f : 1 \rightarrow \xi + 1$ como $cf(0) = \xi$ si tomamos cualquier ordinal $\zeta < \xi + 1$, satisface $\zeta \leq \xi$.

Ordinales y Cardinales

La idea tras la cofinalidad es que con α podemos *agotar* a β .

Definición

La función $cf : Or \rightarrow Car$ es la que aplica a α en el menor $\xi \leq \alpha$ tal que ξ es cofinal en α .

Por ejemplo, $\xi + 1$ tiene cofinalidad 1, $cf(\xi + 1) = 1$, porque al definir $f : 1 \rightarrow \xi + 1$ como $cf(0) = \xi$ si tomamos cualquier ordinal $\zeta < \xi + 1$, satisface $\zeta \leq \xi$. Por definición $cf(\alpha) \leq \alpha$.

Ordinales y Cardinales

La idea tras la cofinalidad es que con α podemos *agotar* a β .

Definición

La función $cf : Or \rightarrow Car$ es la que aplica a α en el menor $\xi \leq \alpha$ tal que ξ es cofinal en α .

Por ejemplo, $\xi + 1$ tiene cofinalidad 1, $cf(\xi + 1) = 1$, porque al definir $f : 1 \rightarrow \xi + 1$ como $cf(0) = \xi$ si tomamos cualquier ordinal $\zeta < \xi + 1$, satisface $\zeta \leq \xi$. Por definición $cf(\alpha) \leq \alpha$.

Un cardinal será regular cuando $cf(\kappa) = \kappa$.

Ordinales y Cardinales

La idea tras la cofinalidad es que con α podemos *agotar* a β .

Definición

La función $cf : Or \rightarrow Car$ es la que aplica a α en el menor $\xi \leq \alpha$ tal que ξ es cofinal en α .

Por ejemplo, $\xi + 1$ tiene cofinalidad 1, $cf(\xi + 1) = 1$, porque al definir $f : 1 \rightarrow \xi + 1$ como $cf(0) = \xi$ si tomamos cualquier ordinal $\zeta < \xi + 1$, satisface $\zeta \leq \xi$. Por definición $cf(\alpha) \leq \alpha$.

Un cardinal será regular cuando $cf(\kappa) = \kappa$.

Singular en otro caso: $cf(\kappa) < \kappa$.

Ordinales y Cardinales

La idea tras la cofinalidad es que con α podemos *agotar* a β .

Definición

La función $cf : Or \rightarrow Car$ es la que aplica a α en el menor $\xi \leq \alpha$ tal que ξ es cofinal en α .

Por ejemplo, $\xi + 1$ tiene cofinalidad 1, $cf(\xi + 1) = 1$, porque al definir $f : 1 \rightarrow \xi + 1$ como $cf(0) = \xi$ si tomamos cualquier ordinal $\zeta < \xi + 1$, satisface $\zeta \leq \xi$. Por definición $cf(\alpha) \leq \alpha$.

Un cardinal será regular cuando $cf(\kappa) = \kappa$.

Singular en otro caso: $cf(\kappa) < \kappa$.

Bajo el axioma de elección cualquier cardinal sucesor es regular,

Ordinales y Cardinales

La idea tras la cofinalidad es que con α podemos *agotar* a β .

Definición

La función $cf : Or \rightarrow Car$ es la que aplica a α en el menor $\xi \leq \alpha$ tal que ξ es cofinal en α .

Por ejemplo, $\xi + 1$ tiene cofinalidad 1, $cf(\xi + 1) = 1$, porque al definir $f : 1 \rightarrow \xi + 1$ como $cf(0) = \xi$ si tomamos cualquier ordinal $\zeta < \xi + 1$, satisface $\zeta \leq \xi$. Por definición $cf(\alpha) \leq \alpha$.

Un cardinal será regular cuando $cf(\kappa) = \kappa$.

Singular en otro caso: $cf(\kappa) < \kappa$.

Bajo el axioma de elección cualquier cardinal sucesor es regular, por ejemplo $cf(\omega_1) = \omega_1$.

Ordinales y Cardinales

La idea tras la cofinalidad es que con α podemos *agotar* a β .

Definición

La función $cf : Or \rightarrow Car$ es la que aplica a α en el menor $\xi \leq \alpha$ tal que ξ es cofinal en α .

Por ejemplo, $\xi + 1$ tiene cofinalidad 1, $cf(\xi + 1) = 1$, porque al definir $f : 1 \rightarrow \xi + 1$ como $cf(0) = \xi$ si tomamos cualquier ordinal $\zeta < \xi + 1$, satisface $\zeta \leq \xi$. Por definición $cf(\alpha) \leq \alpha$.

Un cardinal será regular cuando $cf(\kappa) = \kappa$.

Singular en otro caso: $cf(\kappa) < \kappa$.

Bajo el axioma de elección cualquier cardinal sucesor es regular, por ejemplo $cf(\omega_1) = \omega_1$. Y los cardinales singulares siempre son límites:

Ordinales y Cardinales

La idea tras la cofinalidad es que con α podemos *agotar* a β .

Definición

La función $cf : Or \rightarrow Car$ es la que aplica a α en el menor $\xi \leq \alpha$ tal que ξ es cofinal en α .

Por ejemplo, $\xi + 1$ tiene cofinalidad 1, $cf(\xi + 1) = 1$, porque al definir $f : 1 \rightarrow \xi + 1$ como $cf(0) = \xi$ si tomamos cualquier ordinal $\zeta < \xi + 1$, satisface $\zeta \leq \xi$. Por definición $cf(\alpha) \leq \alpha$.

Un cardinal será regular cuando $cf(\kappa) = \kappa$.

Singular en otro caso: $cf(\kappa) < \kappa$.

Bajo el axioma de elección cualquier cardinal sucesor es regular, por ejemplo $cf(\omega_1) = \omega_1$. Y los cardinales singulares siempre son límites: $cf(\omega_\omega) = \omega$ porque podemos definir:

$$f(i) = \omega_i < \bigcup_{n < \omega} \omega_n = \omega_\omega.$$

Ordinales y Cardinales

La cofinalidad da otra pauta para definir un gran cardinal. Si κ es regular, entonces ningún $\alpha < \kappa$ «cubre» todo κ .

Ordinales y Cardinales

La cofinalidad da otra pauta para definir un gran cardinal. Si κ es regular, entonces ningún $\alpha < \kappa$ «cubre» todo κ . Pero ya vimos que los cardinales regular sí existen al suponer ZFE, cualquier sucesor κ^+ es regular.

Ordinales y Cardinales

La cofinalidad da otra pauta para definir un gran cardinal. Si κ es regular, entonces ningún $\alpha < \kappa$ «cubre» todo κ . Pero ya vimos que los cardinales regular sí existen al suponer ZFE, cualquier sucesor κ^+ es regular.

No obstante, al combinar la noción de límite fuerte + regular, es otra cosa. Tal cardinal κ se le denomina *inaccesible fuerte*.

Ordinales y Cardinales

No obstante, al combinar la noción de límite fuerte + regular, es otra cosa. Tal cardinal κ se le denomina *inaccesible fuerte*.

Ordinales y Cardinales

No obstante, al combinar la noción de límite fuerte + regular, es otra cosa. Tal cardinal κ se le denomina *inaccesible fuerte*.

Fue Hausdorff en su libro *Grundzüge der Mengenlehre* [Fundamentos de la teoría de conjuntos] quien por primera vez toca el tema de los grandes cardinales y descarta su relevancia porque serían tan *exorbitanten Größe* [exorbitantemente grandes] que difícilmente tendría relevancia en la teoría de conjuntos.

singulär, da sie als Limes einer Folge mit ω konfinal ist. Wenn es also reguläre Anfangszahlen mit Limesindex gibt (und es ist bisher nicht gelungen, in dieser Annahme einen Widerspruch zu entdecken), so ist die kleinste unter ihnen von einer so exorbitanten Größe, daß sie für die üblichen Zwecke der Mengenlehre kaum jemals in Betracht kommen wird.

Ordinales y Cardinales

Un cardinal inaccesible fuerte es tan grande que se cumple $\aleph_\kappa = \kappa$.

Ordinales y Cardinales

Un cardinal inaccesible fuerte es tan grande que se cumple $\aleph_\kappa = \kappa$.
Simplemente recordemos que entre el primer alef $\aleph_0 = \omega$ y el ω -ésimo alef $\aleph_\omega = \bigcup_{n < \omega} \aleph_n$ hay ω cardinales, pero \aleph_ω es, por mucho, más grande que cualquier \aleph_n $n < \omega$.

Encajes Elementales

La motivación de los encajes elementales tiene origen en teoría de la medida con el trabajo de Ulam.

La motivación de los encajes elementales tiene origen en teoría de la medida con el trabajo de Ulam.

Ulam define un *cardinal medible* κ como aquel que posee una medida $\mu : \kappa \rightarrow \{0, 1\}$ que sea κ -completa: para todo $\delta < \kappa$

$$\mu\left(\bigcap_{i < \delta} X_i\right) = 1 \iff \mu(X_i) = 1, \forall i \delta \mu(\{\alpha\}) = 0 \quad \forall \alpha < \kappa.$$

La motivación de los encajes elementales tiene origen en teoría de la medida con el trabajo de Ulam.

Ulam define un *cardinal medible* κ como aquel que posee una medida $\mu : \kappa \rightarrow \{0, 1\}$ que sea κ -completa: para todo $\delta < \kappa$

$$\mu\left(\bigcap_{i < \delta} X_i\right) = 1 \iff \mu(X_i) = 1, \forall i \delta \mu(\{\alpha\}) = 0 \quad \forall \alpha < \kappa.$$

resulta que si κ es medible, entonces es límite fuerte y es regular,

La motivación de los encajes elementales tiene origen en teoría de la medida con el trabajo de Ulam.

Ulam define un *cardinal medible* κ como aquel que posee una medida $\mu : \kappa \rightarrow \{0, 1\}$ que sea κ -completa: para todo $\delta < \kappa$

$$\mu\left(\bigcap_{i < \delta} X_i\right) = 1 \iff \mu(X_i) = 1, \quad \forall i < \delta \quad \mu(\{\alpha\}) = 0 \quad \forall \alpha < \kappa.$$

resulta que si κ es medible, entonces es límite fuerte y es regular, es decir, es inaccesible.

La motivación de los encajes elementales tiene origen en teoría de la medida con el trabajo de Ulam.

Ulam define un *cardinal medible* κ como aquel que posee una medida $\mu : \kappa \rightarrow \{0, 1\}$ que sea κ -completa: para todo $\delta < \kappa$

$$\mu\left(\bigcap_{i < \delta} X_i\right) = 1 \iff \mu(X_i) = 1, \forall i \text{ y } \mu(\{\alpha\}) = 0 \quad \forall \alpha < \kappa.$$

resulta que si κ es medible, entonces es límite fuerte y es regular, es decir, es inaccesible.

La existencia de la medida μ se puede plantear en términos de *ultrafiltros*: $\mathcal{U} = \{X \subset \kappa : \mu(X) = 1\}$ es un ultrafiltro.

La motivación de los encajes elementales tiene origen en teoría de la medida con el trabajo de Ulam.

Ulam define un *cardinal medible* κ como aquel que posee una medida $\mu : \kappa \rightarrow \{0, 1\}$ que sea κ -completa: para todo $\delta < \kappa$

$$\mu\left(\bigcap_{i < \delta} X_i\right) = 1 \iff \mu(X_i) = 1, \forall i \text{ y } \mu(\{\alpha\}) = 0 \quad \forall \alpha < \kappa.$$

resulta que si κ es medible, entonces es límite fuerte y es regular, es decir, es inaccesible.

La existencia de la medida μ se puede plantear en términos de *ultrafiltros*: $\mathcal{U} = \{X \subset \kappa : \mu(X) = 1\}$ es un ultrafiltro. Y esto a su vez, se puede caracterizar con encajes elementales, principalmente por medio de *ultraproductos del universo* V .

La discusión previa da una pauta para entender de qué va la teoría de grandes cardinales, pero existen muchas nociones de grandes cardinales, las más fuertes siendo aquellas que se puede caracterizar en términos de encajes elementales.

La discusión previa da una pauta para entender de qué va la teoría de grandes cardinales, pero existen muchas nociones de grandes cardinales, las más fuertes siendo aquellas que se puede caracterizar en términos de encajes elementales.

Primero, un *modelo interno* M es una clase transitiva propia tal que $Or \subset M$ y $M \models \text{ZFE}$.

La discusión previa da una pauta para entender de qué va la teoría de grandes cardinales, pero existen muchas nociones de grandes cardinales, las más fuertes siendo aquellas que se puede caracterizar en términos de encajes elementales.

Primero, un *modelo interno* M es una clase transitiva propia tal que $Or \subset M$ y $M \models \text{ZFE}$.

Un *encaje elemental* $j : M \rightarrow N$ entre dos clases M, N es una función tal que

$$M \models \varphi(a) \iff N \models \varphi(j(a)),$$

es decir, cualquier cosa que M conozca, también N la conoce con respecto a j .

Ahora, un cardinal medible se puede caracterizar de la siguiente manera

Ahora, un cardinal medible se puede caracterizar de la siguiente manera

κ es medible si y solo si existe un modelo interno M y un encaje elemental no trivial ($id \neq j$) $j : V \rightarrow M$ tal que κ es el menor ordinal α que cumple $j(\alpha) > \alpha$.

Ahora, un cardinal medible se puede caracterizar de la siguiente manera

κ es medible si y solo si existe un modelo interno M y un encaje elemental no trivial ($id \neq j$) $j : V \rightarrow M$ tal que κ es el menor ordinal α que cumple $j(\alpha) > \alpha$.

Aquí es crucial que $M \neq V$:

Decimos que κ es un cardinal *Reinhardt* si existe un encaje elemental $j : V \rightarrow V$ tal que

$$crit(j) = \min \{ \alpha \in Or : j(\alpha) > \alpha \} = \kappa$$

Ahora, un cardinal medible se puede caracterizar de la siguiente manera

κ es medible si y solo si existe un modelo interno M y un encaje elemental no trivial ($id \neq j$) $j : V \rightarrow M$ tal que κ es el menor ordinal α que cumple $j(\alpha) > \alpha$.

Aquí es crucial que $M \neq V$:

Decimos que κ es un cardinal *Reinhardt* si existe un encaje elemental $j : V \rightarrow V$ tal que

$$crit(j) = \min \{ \alpha \in Or : j(\alpha) > \alpha \} = \kappa$$

El teorema de inconsistencia de Kunen dice precisamente que dicho encaje $j : V \rightarrow V$ no trivial no existe.

Ahora, un cardinal medible se puede caracterizar de la siguiente manera

κ es medible si y solo si existe un modelo interno M y un encaje elemental no trivial ($id \neq j$) $j : V \rightarrow M$ tal que κ es el menor ordinal α que cumple $j(\alpha) > \alpha$.

Aquí es crucial que $M \neq V$:

Decimos que κ es un cardinal *Reinhardt* si existe un encaje elemental $j : V \rightarrow V$ tal que

$$crit(j) = \min \{ \alpha \in Or : j(\alpha) > \alpha \} = \kappa$$

El teorema de inconsistencia de Kunen dice precisamente que dicho encaje $j : V \rightarrow V$ no trivial no existe. Aunque todas las demostraciones de este teorema utilizan el axioma de elección como argumento central.

Sin embargo, esto marca una pauta para obtener nociones de grandes cardinales que aproximen cada vez más al universo V .

Sin embargo, esto marca una pauta para obtener nociones de grandes cardinales que aproximen cada vez más al universo V . Si un cardinal inaccesible κ aproximaba a V en el sentido de que $V_\kappa \models \text{ZFE}$,

Sin embargo, esto marca una pauta para obtener nociones de grandes cardinales que aproximen cada vez más al universo V . Si un cardinal inaccesible κ aproximaba a V en el sentido de que $V_\kappa \models \text{ZFE}$, un cardinal medible aproxima a V en el sentido de que M es un modelo de ZFE que «se parece» a V , como lo atestigua el encaje $j : V \rightarrow M$.

Sin embargo, esto marca una pauta para obtener nociones de grandes cardinales que aproximen cada vez más al universo V . Si un cardinal inaccesible κ aproximaba a V en el sentido de que $V_\kappa \models \text{ZFE}$, un cardinal medible aproxima a V en el sentido de que M es un modelo de ZFE que «se parece» a V , como lo atestigua el encaje $j : V \rightarrow M$. Fortalecer la noción de encaje elemental al agregar hipótesis cada vez más fuertes nos da toda una jerarquía de grandes cardinales.

κ es un cardinal *compacto fuerte* si para cada $\lambda \geq \kappa$ existen un modelo interno M_λ y un encaje elemental $j_\lambda : V \rightarrow M_\lambda$ tal que $\text{crit}(j) = \kappa$, $j(\kappa) > \lambda$ y existe $s \in M$ tal que $j_\lambda[\lambda] \subset s$.

κ es un cardinal *compacto fuerte* si para cada $\lambda \geq \kappa$ existen un modelo interno M_λ y un encaje elemental $j_\lambda : V \rightarrow M_\lambda$ tal que $\text{crit}(j) = \kappa$, $j(\kappa) > \lambda$ y existe $s \in M$ tal que $j_\lambda[\lambda] \subset s$.

κ es un cardinal *fuerte* si para cada λ existen un modelo interno M y un encaje elemental $j_\lambda : V \rightarrow M$ tal que $\text{crit}(j) = \kappa$, $j(\kappa) > \lambda$ y $V_{\kappa+\lambda} \subset M$.

κ es un cardinal *compacto fuerte* si para cada $\lambda \geq \kappa$ existen un modelo interno M_λ y un encaje elemental $j_\lambda : V \rightarrow M_\lambda$ tal que $\text{crit}(j) = \kappa$, $j(\kappa) > \lambda$ y existe $s \in M$ tal que $j_\lambda[\lambda] \subset s$.

κ es un cardinal *fuerte* si para cada λ existen un modelo interno M y un encaje elemental $j_\lambda : V \rightarrow M$ tal que $\text{crit}(j) = \kappa$, $j(\kappa) > \lambda$ y $V_{\kappa+\lambda} \subset M$.

κ es un cardinal *supercompacto* si para cada $\lambda \geq \kappa$ existen un modelo interno M y un encaje elemental $j : V \rightarrow M$ tal que $\text{crit}(j) = \kappa$, $j(\kappa) > \lambda$ y $M^\lambda \subset M$.

κ es un cardinal *compacto fuerte* si para cada $\lambda \geq \kappa$ existen un modelo interno M_λ y un encaje elemental $j_\lambda : V \rightarrow M_\lambda$ tal que $\text{crit}(j) = \kappa$, $j(\kappa) > \lambda$ y existe $s \in M$ tal que $j_\lambda[\lambda] \subset s$.

κ es un cardinal *fuerte* si para cada λ existen un modelo interno M y un encaje elemental $j_\lambda : V \rightarrow M$ tal que $\text{crit}(j) = \kappa$, $j(\kappa) > \lambda$ y $V_{\kappa+\lambda} \subset M$.

κ es un cardinal *supercompacto* si para cada $\lambda \geq \kappa$ existen un modelo interno M y un encaje elemental $j : V \rightarrow M$ tal que $\text{crit}(j) = \kappa$, $j(\kappa) > \lambda$ y $M^\lambda \subset M$.

κ es un cardinal *n -enorme* si existen un modelo interno M y un encaje elemental $j : V \rightarrow M$ tal que $\text{crit}(j) = \kappa$, $j(\kappa) > \lambda$ y $M^{j^n(\kappa)} \subset M$.

Grandes Cardinales Sin Elección

Como hemos remarcado, la demostración del teorema de inconsistencia de Kunen, que no existen cardinales Reinhardt, utiliza fuertemente el axioma de elección.

Como hemos remarcado, la demostración del teorema de inconsistencia de Kunen, que no existen cardinales Reinhardt, utiliza fuertemente el axioma de elección. Parte de la labor contemporánea de la teoría de grandes cardinales es indagar qué pasa cuando negamos el axioma de elección.

Como hemos remarcado, la demostración del teorema de inconsistencia de Kunen, que no existen cardinales Reinhardt, utiliza fuertemente el axioma de elección. Parte de la labor contemporánea de la teoría de grandes cardinales es indagar qué pasa cuando negamos el axioma de elección.

Un cardinal κ se dice *Berkeley* si para cualquier conjunto transitivo M con $\kappa \in M$ y cualquier $\eta < \kappa$ existe $j : M \rightarrow M$ con $\eta < \text{crit}(j) < \kappa$.

Como hemos remarcado, la demostración del teorema de inconsistencia de Kunen, que no existen cardinales Reinhardt, utiliza fuertemente el axioma de elección. Parte de la labor contemporánea de la teoría de grandes cardinales es indagar qué pasa cuando negamos el axioma de elección.

Un cardinal κ se dice *Berkeley* si para cualquier conjunto transitivo M con $\kappa \in M$ y cualquier $\eta < \kappa$ existe $j : M \rightarrow M$ con $\eta < \text{crit}(j) < \kappa$. Esta teoría está en pleno desarrollo y resolverla satisfactoriamente sería encontrar un ambiente en el cual los cardinales Reinhardt puede existir.

Aplicaciones: Módulos

Considerando que estamos hablando de conjuntos infinitos tan insondables, podríamos pensar que la teoría de grandes cardinales solo tiene injerencia en los fundamentos más abstractos de la teoría de conjuntos.

Considerando que estamos hablando de conjuntos infinitos tan insondables, podríamos pensar que la teoría de grandes cardinales solo tiene injerencia en los fundamentos más abstractos de la teoría de conjuntos. Aunque el caso de los cardinales medibles por parte de Ulam ya nos dice que no es necesariamente el caso.

Considerando que estamos hablando de conjuntos infinitos tan insondables, podríamos pensar que la teoría de grandes cardinales solo tiene injerencia en los fundamentos más abstractos de la teoría de conjuntos. Aunque el caso de los cardinales medibles por parte de Ulam ya nos dice que no es necesariamente el caso. De hecho, en teoría de la medida tenemos

Teorema (Woodin, Shelah)

La existencia de ciertos grandes cardinales ([supercompactos/Woodin](#)) implica que todo subconjunto de los reales, definible de manera razonable, es Lebesgue medible.

Considerando que estamos hablando de conjuntos infinitos tan insondables, podríamos pensar que la teoría de grandes cardinales solo tiene injerencia en los fundamentos más abstractos de la teoría de conjuntos. Aunque el caso de los cardinales medibles por parte de Ulam ya nos dice que no es necesariamente el caso. De hecho, en teoría de la medida tenemos

Teorema (Woodin, Shelah)

La existencia de ciertos grandes cardinales ([supercompactos/Woodin](#)) implica que todo subconjunto de los reales, definible de manera razonable, es Lebesgue medible.

Otros ejemplos viene de teoría de módulos.

Fijemos un anillo R , decimos que un R -módulo M es libre si existe un conjunto I tal que

$$M \cong \bigoplus_{i \in I} R$$

Fijemos un anillo R , decimos que un R -módulo M es libre si existe un conjunto I tal que

$$M \cong \bigoplus_{i \in I} R$$

Fijemos un anillo R , decimos que un R -módulo M es libre si existe un conjunto I tal que

$$M \cong \bigoplus_{i \in I} R$$

Dado un cardinal κ , decimos que M es κ -libre si existe una familia \mathcal{D} de submódulos de M , todos de tamaño $< \kappa$ tal que

- Todo $N \in \mathcal{D}$ es libre.

Fijemos un anillo R , decimos que un R -módulo M es libre si existe un conjunto I tal que

$$M \cong \bigoplus_{i \in I} R$$

Dado un cardinal κ , decimos que M es κ -libre si existe una familia \mathcal{D} de submódulos de M , todos de tamaño $< \kappa$ tal que

- Todo $N \in \mathcal{D}$ es libre.
- Para todo $N_0 \leq M$ de cardinalidad $< \kappa$ existe un $N \in \mathcal{D}$ tal que $N_0 \leq N$.

Fijemos un anillo R , decimos que un R -módulo M es libre si existe un conjunto I tal que

$$M \cong \bigoplus_{i \in I} R$$

Dado un cardinal κ , decimos que M es κ -libre si existe una familia \mathcal{D} de submódulos de M , todos de tamaño $< \kappa$ tal que

- Todo $N \in \mathcal{D}$ es libre.
- Para todo $N_0 \leq M$ de cardinalidad $< \kappa$ existe un $N \in \mathcal{D}$ tal que $N_0 \leq N$.
- \mathcal{D} es cerrado respecto a uniones crecientes de longitud $< \kappa$.

Fijemos un anillo R , decimos que un R -módulo M es libre si existe un conjunto I tal que

$$M \cong \bigoplus_{i \in I} R$$

Dado un cardinal κ , decimos que M es κ -libre si existe una familia \mathcal{D} de submódulos de M , todos de tamaño $< \kappa$ tal que

- Todo $N \in \mathcal{D}$ es libre.
- Para todo $N_0 \leq M$ de cardinalidad $< \kappa$ existe un $N \in \mathcal{D}$ tal que $N_0 \leq N$.
- \mathcal{D} es cerrado respecto a uniones crecientes de longitud $< \kappa$.

Teorema (Shelah/Eklof-Mekler)

Si κ es un cardinal singular, entonces κ -libre implica libre.

Fijemos un anillo R , decimos que un R -módulo M es libre si existe un conjunto I tal que

$$M \cong \bigoplus_{i \in I} R$$

Dado un cardinal κ , decimos que M es κ -libre si existe una familia \mathcal{D} de submódulos de M , todos de tamaño $< \kappa$ tal que

- Todo $N \in \mathcal{D}$ es libre.
- Para todo $N_0 \leq M$ de cardinalidad $< \kappa$ existe un $N \in \mathcal{D}$ tal que $N_0 \leq N$.
- \mathcal{D} es cerrado respecto a uniones crecientes de longitud $< \kappa$.

Teorema (Shelah/Eklof-Mekler)

Si κ es un cardinal singular, entonces κ -libre implica libre. Si κ es compacto fuerte, entonces κ -libre implica libre.

Esta tarea se puede generalizar y definir κ -«libre» cambiando la noción de libre por

- proyectivo

Esta tarea se puede generalizar y definir κ -«libre» cambiando la noción de libre por

- proyectivo
- de Baer

Esta tarea se puede generalizar y definir κ -«libre» cambiando la noción de libre por

- proyectivo
- de Baer
- sin torsión (torsionless)

Esta tarea se puede generalizar y definir κ -«libre» cambiando la noción de libre por

- proyectivo
- de Baer
- sin torsión (torsionless)
- localmente proyectivo.

Esta tarea se puede generalizar y definir κ -«libre» cambiando la noción de libre por

- proyectivo
- de Baer
- sin torsión (torsionless)
- localmente proyectivo.
- esbelto.

Esta tarea se puede generalizar y definir κ -«libre» cambiando la noción de libre por

- proyectivo
- de Baer
- sin torsión (torsionless)
- localmente proyectivo.
- esbelto.

Teorema (Gallardo-Nido-Salazar-Valenzuela-Villegas)

Si κ es compacto fuerte, entonces κ -«libre» implica «libre»

¡Gracias!

 *cantors.paradise*