

La droite d'Euler et le cercle à 9 points

Dans le triangle ABC ci-dessous, réalise successivement ces constructions avec le maximum de précision possible.

a. Trace en bleu les trois hauteurs du triangle ABC. Nomme H leur point d'intersection. Il s'appelle

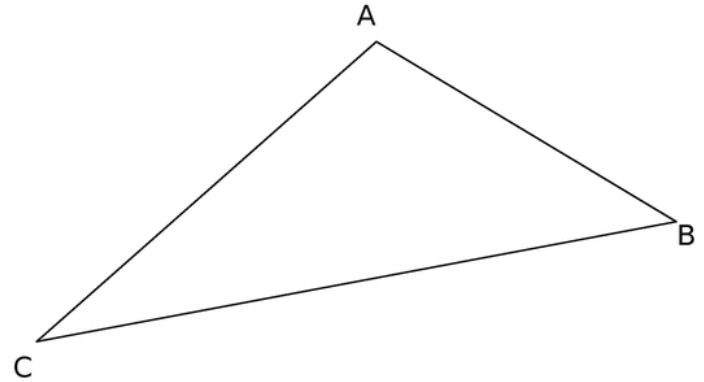
b. Nomme I, J et K les pieds des trois hauteurs.

c. Trace en rouge les trois médiatrices des côtés du triangle ABC. Nomme O le centre du cercle circonscrit.

d. Nomme ensuite R, S et T les milieux des côtés du triangle ABC.

e. Trace en vert les trois médianes du triangle ABC. Nomme G leur point d'intersection. Il s'appelle

f. Que semble-t-il se passer pour les points O, G et H ?



La droite (OG) est appelée droite d'Euler, du nom du mathématicien suisse Leonhard Euler. C'est le mathématicien Robert Simson qui a découvert cette propriété mais c'est Euler qui, quelques années plus tard, en a fourni une démonstration dans l'ouvrage *Solutions faciles de problèmes difficiles en géométrie*, publié en latin en 1765. Elle est valable pour tous les triangles non équilatéraux.

g. Peux-tu expliquer pourquoi elle n'est pas vraie dans un triangle équilatéral ?

h. Place le point P le milieu de [OH]. Trace le cercle de centre P et passant par le point I.

i. Celui-ci passe par 6 points déjà placés sur la figure. Lesquels ?

j. Place enfin les milieux des segments [HA], [HB] et [HC]. Ces points semblent-ils appartenir au cercle précédent ?

Le cercle ainsi obtenu est appelé cercle des 9 points, ou cercle d'Euler, ou encore cercle de Feuerbach. En réalité, cette propriété avait échappé à Euler et c'est bien Feuerbach qui l'a démontrée en 1822.

k. Approfondissement : ouvre un logiciel de géométrie (par exemple Mathgraph32). Trace un triangle quelconque, ses médiatrices, ses hauteurs et ses médianes. Suis les instructions précédentes pour construire le cercle à neuf points de ce triangle. Déplace les sommets du triangle pour constater que ce cercle se construit sauf si le triangle est équilatéral.

Indication : on utilisera les commandes « milieu » et « médiatrice ».