PROBLEME 2 : La circonférence de la Terre ★ ★

79 La circonférence de la Terre

Chercher, Représenter, Raisonner, Communiquer, Calculer

Au solstice d'été, Ératosthène, qui habitait la ville de Syène, savait que le Soleil était à la verticale de sa position à 12 h car il n'y avait aucune ombre dans son puits. De plus, il avait noté qu'à Alexandrie, à la même date et à la même heure, les rayons du Soleil avaient une inclinaison d'environ 7,2° par rapport à la verticale.

Il supposa que les rayons du Soleil étaient parallèles et que les deux villes étaient situées sur le même méridien.

Un méridien est un demi-cercle imaginaire de la surface terrestre qui joint les deux pôles.

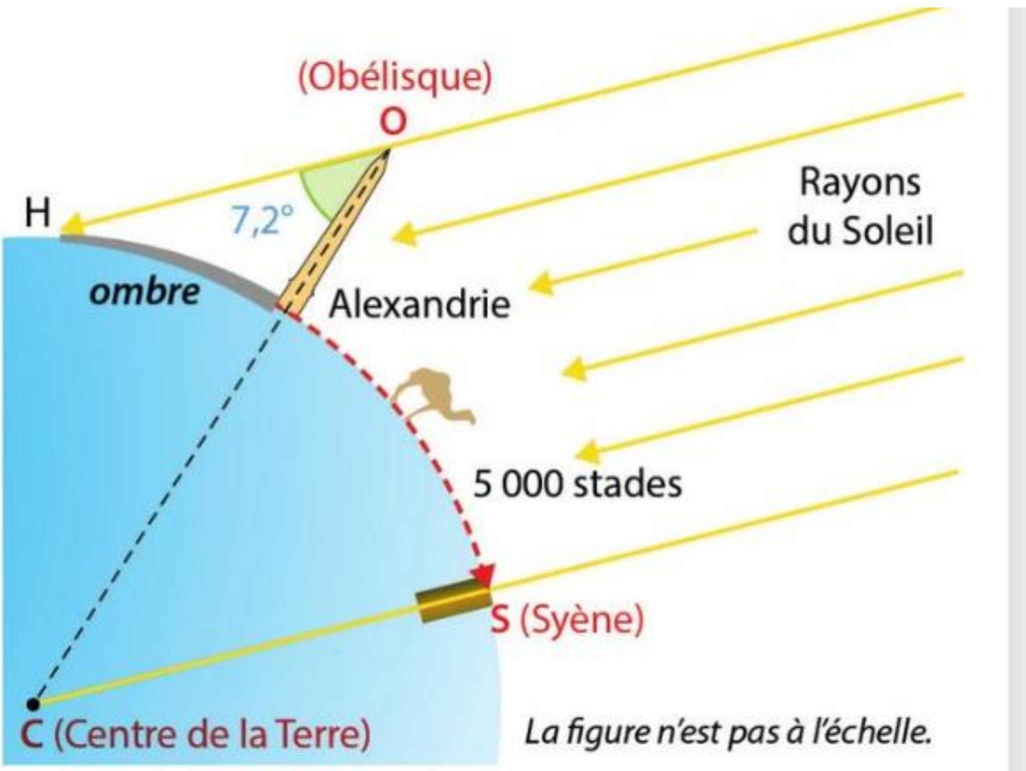
Il ne restait plus alors qu'à calculer la distance entre les villes de Syène et d'Alexandrie.

Pour cela, Ératosthène requit l'aide d'un arpenteur de l'Égypte antique qui comptait le nombre de pas d'un chameau lors du voyage entre les deux villes, car le chameau était réputé pour avoir une marche très régulière. L'arpenteur lui fournit une mesure de 5 000 stades (50 jours de marche, 1 jour comptant une distance de 100 stades) entre Alexandrie et Syène.

1. Comment Ératosthène détermina-t-il l'angle au centre de la Terre $\widehat{OCS}$?

2. Pour déterminer la circonférence de la Terre, Ératosthène utilisa la règle suivante : « La distance entre les villes est proportionnelle à la mesure de l'angle dont le sommet est au centre de la Terre. » Sachant qu'un stade égyptien correspond à 157,50 m, quelle est la circonférence de la Terre trouvée par Ératosthène ?

3. Comparer cette valeur à une estimation actuelle de la circonférence de la Terre.



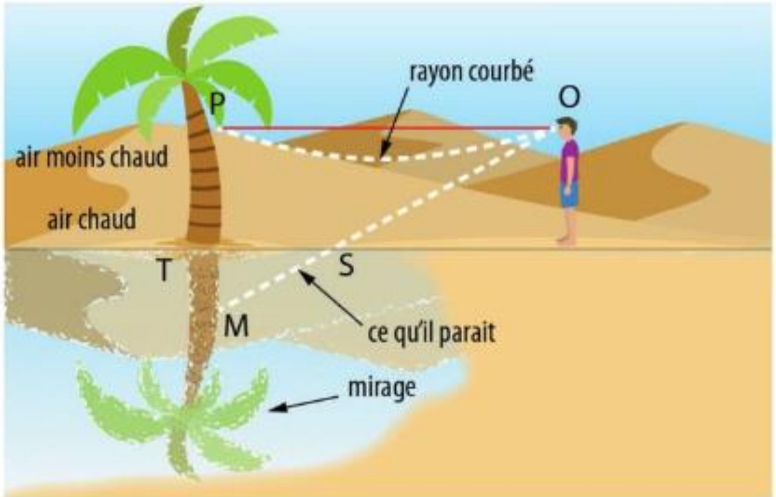
La figure n'est pas à l'échelle.

PROBLEME 1 :Mirage

73 Mirage

Raisonner, Calculer, Communiquer

Les mirages s'expliquent par la déviation des rayons lumineux. Cette déviation donne l'impression que l'objet que l'on regarde est à un endroit autre que son emplacement réel.



Sachant que $\widehat{POS} = 28°$ et que les droites (PO) et (TS) sont parallèles, déterminer :

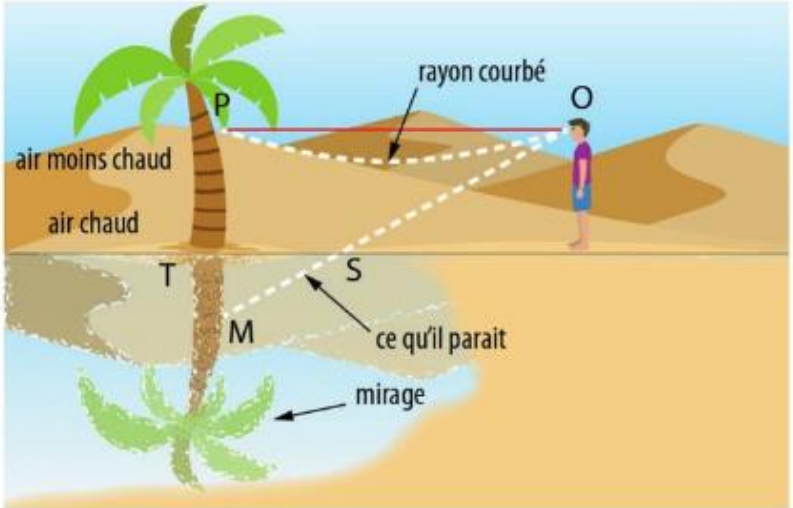
a. la mesure de l'angle $\widehat{TSM}$

b. la mesure de l'angle $\widehat{TSO}$

73 Mirage

Raisonner, Calculer, Communiquer

Les mirages s'expliquent par la déviation des rayons lumineux. Cette déviation donne l'impression que l'objet que l'on regarde est à un endroit autre que son emplacement réel.



Sachant que $\widehat{POS} = 28°$ et que les droites (PO) et (TS) sont parallèles, déterminer :

a. la mesure de l'angle $\widehat{TSM}$

b. la mesure de l'angle $\widehat{TSO}$

PROBLEME 3 : Le Billard

84 Le billard

Chercher, Représenter, Calculer

Pour gagner sa partie, Alix doit rentrer la boule bleue. Elle ne réussit que si l'angle rouge mesure 37°.

Lorsqu'une boule rebondit sur une bande (un bord), l'angle que forme sa trajectoire avec la bande reste le même.

1. Quel doit être l'angle d'attaque sur la bande (en jaune sur l'image ci-dessus) pour qu'Alix gagne cette partie ? Justifier.

2. Quel que soit l'angle d'attaque sur la bande, que peut-on dire des droites blanches ? Justifier.

84 Le billard

Chercher, Représenter, Calculer

Pour gagner sa partie, Alix doit rentrer la boule bleue. Elle ne réussit que si l'angle rouge mesure 37°.

Lorsqu'une boule rebondit sur une bande (un bord), l'angle que forme sa trajectoire avec la bande reste le même.

1. Quel doit être l'angle d'attaque sur la bande (en jaune sur l'image ci-dessus) pour qu'Alix gagne cette partie ? Justifier.

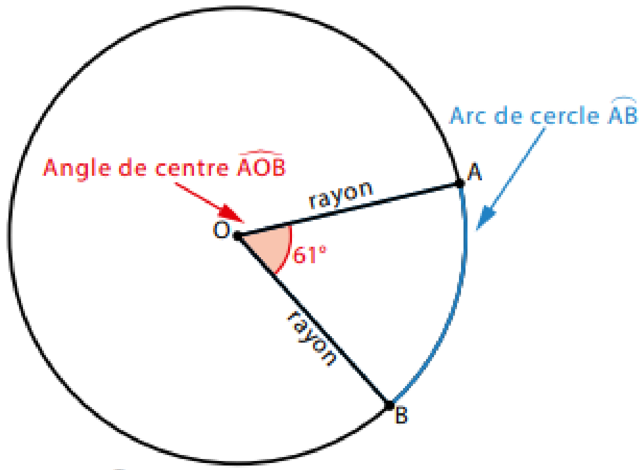
2. Quel que soit l'angle d'attaque sur la bande, que peut-on dire des droites blanches ? Justifier.

CORRECTION PROBLEMES

79 La circonférence de la Terre

1. On note A le point représentant l'emplacement d'Alexandrie.
Comme les rayons du Soleil sont supposés parallèles, les angles alternes-internes qu'ils forment sont de même mesure. Donc l'angle au centre de la Terre $\widehat{OCS}$ et l'angle $\widehat{HOA}$ formé par l'obélisque sont de même mesure ; ce qui a permis à Eratosthène de déterminer que l'angle $\widehat{OCS}$ mesurait 7,2°.

2. L'arpenteur a trouvé une distance de 5 000 stades pour un angle de 7,2°.



L'arc de cercle $\widehat{AB}$ représente une portion du cercle au même titre que la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$ est une portion de 360°. Donc la longueur de l'arc $\widehat{AB}$ est proportionnelle à la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$.

Mesure de l'angle (en °)	360°	7,2°
Longueur de l'arc de cercle (en stades)	?	5 000

$$\frac{360 \times 5000}{7,2} = 250\ 000 \text{ stades}$$

1 stade = 157,5 m, donc on convertit en mètres :
250 000 × 157,5 m = 39 375 000 m = 39 375 km
La circonférence de la Terre trouvée par Eratosthène est d'environ 39 375 km.

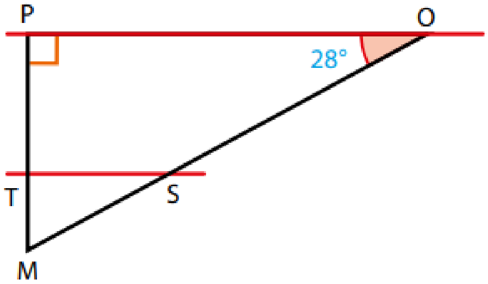
3. De nos jours, la circonférence de la Terre est évaluée à 40 075 km.
40 075 – 39 375 = 700

$$\frac{700}{40\ 075} \approx 0,017 \approx 1,7\ \%$$

L'estimation d'Eratosthène est donc très proche de l'estimation actuelle, avec une différence de moins de 2 %. Pour l'époque, c'est d'une précision extraordinaire, étant donné qu'ils n'avaient pas les outils technologiques actuels.

73 Mirage

a. Modéliser : On représente la situation réelle par la figure mathématique suivante :



En considérant que le regard de l'homme et le sol peuvent être horizontaux, on peut les modéliser par des droites (PO) et (ST) parallèles.

Les droites (PO) et (ST) forment avec la droite (OS) deux angles correspondants $\widehat{POS}$ et $\widehat{TSM}$.

(PO) // (ST) donc $\widehat{TSM} = \widehat{POS} = 28°$.

b. M, S et O sont alignés, donc $\widehat{MSO}$ est un angle plat.

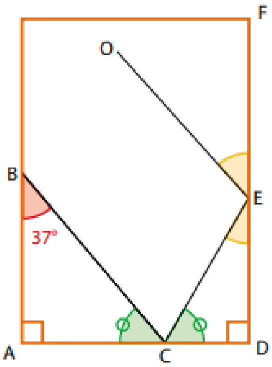
Ainsi $\widehat{TSO} = 180° - \widehat{TSM}$.

$\widehat{TSO} = 180° - 28°$

$\widehat{TSO} = 152°$

84 Le billard

1. Chercher, représenter :



Un billard vu du dessus peut être représenté par un rectangle.

D'après l'énoncé, les angles verts sont de même mesure.

Calculer :

La somme des mesures des angles du triangle BAC est égale à 180° donc :

$37° + 90° + \widehat{BAC} = 180°$

Donc $\widehat{BAC} = 180° - (37° + 90°) = 180° - 127° = 53°$.

$\widehat{BAC} = \widehat{ECD}$ donc $\widehat{ECD} = 53°$.

La somme des mesures des angles du triangle CDE est égale à 180° donc :

$53° + 90° + \widehat{CED} = 180°$

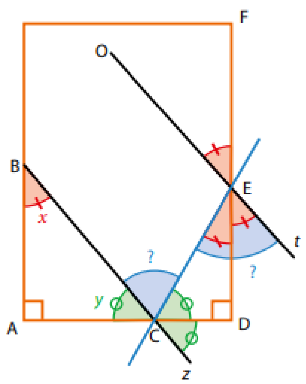
Donc $\widehat{CED} = 180° - (53° + 90°) = 180° - 143° = 37°$.

$\widehat{CED} = \widehat{OEF}$ donc $\widehat{OEF} = 37°$.

Pour qu'Alix gagne, il faut que l'angle d'attaque sur la bande soit de 37°.

2.

Vue de dessus :



Les droites (BC) et (OE) forment avec la droite (CE) deux angles alternes-internes : $\widehat{BCE}$ et $\widehat{CEt}$.

Les droites (BC) et (OE) sont parallèles si les angles $\widehat{BCE}$ et $\widehat{CEt}$ sont de même mesure.

On note : $x = \widehat{ABC}$ et $y = \widehat{ACB}$

Les trois angles des triangles BAC et EDC ont pour mesures x, 90° et y, avec la relation :

$x + y + 90° = 180°$

Donc $x + y = 90°$

Les angles $\widehat{OEF}$ et $\widehat{DEt}$ sont opposés par le sommet, donc de même mesure.

Les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{zCD}$ sont opposés par le sommet, donc de même mesure.

Donc les angles rouges ont tous pour mesure x et les angles verts ont tous pour mesure y.

$\widehat{ACD}$ est un angle plat, donc : $y + \widehat{BCE} + y = 180°$ donc $\widehat{BCE} + 2y = 180°$

$\widehat{CEt} = 2x$

Les angles $\widehat{CEt}$ et $\widehat{BCE}$ sont de même mesure si on a la relation $2x + 2y = 180°$

Or $x + y = 90°$

Donc : $2x + 2y = 2 \times 90° = 180°$.

On a donc bien $\widehat{BCE} = \widehat{CEt}$ donc les droites (BC) et (OE) sont parallèles.

Quel que soit l'angle d'attaque, les droites blanches sont parallèles.