MATEMÁTICA FINANCEIRA

Luiz Guilherme Aboim

Escola de Finanças Aboim

https://xn--escoladefinanasaboim-g1b.com/

MATEMÁTICA FINANCEIRA BÁSICA

Valor do Dinheiro no tempo.

Se você pudesse escolher entre receber R$ 10.000,00 hoje ou R$ 10.000 daqui a um ano, qual opção você escolheria?

Valor do Dinheiro no tempo.

O dinheiro perde valor ao longo do tempo devido a **inflação**, **risco**, **custo de oportunidade** e **preferência por liquidez**.

R$ 10 mil hoje pode ser investido e render juros, tornando-se mais valioso no futuro.

Isso leva ao conceito de **valor presente (VP) e valor futuro (VF)**, essenciais para a Matemática Financeira.

Valor do Dinheiro no tempo.

Se você depositar R$ 1.000 hoje em uma aplicação que rende 10% ao ano, em um ano terá **R$ 1.100**. Esse é o **valor futuro** do dinheiro.

Da mesma forma, se precisar de R$ 1.100 daqui a um ano e souber que a taxa de juros é de 10%, então hoje você precisaria ter **R$ 1.000 para fazer essa aplicação**. Esse é o **valor presente**.

Valor do Dinheiro no tempo.

O conceito de **Valor do Dinheiro no Tempo** é a base para **juros simples e compostos**, **fluxos de caixa**, **avaliação de investimentos** e muito mais.

"Vocês já pararam para pensar no impacto dos juros na vida das pessoas, empresas e dos governos?"

Regime de Juros Compostos (RJC)

No regime de juros compostos, os juros são calculados sobre o valor do principal mais os juros acumulados até o momento. Ou seja, os juros são reinvestidos a cada período.

A fórmula para calcular juros compostos é:

Montante = $P \cdot (1 + i)^n$,

onde

P é o valor principal,
i é a taxa de juros e
n é o número de períodos de tempo em que os juros serão compostos.

Regime de Juros Compostos (RJC)

A fórmula básica que relaciona dois valores monetários posicionados em pontos distintos no tempo será dada por:

$M_n = M_{n-1} + J$

$M_n = M_{n-1} + (M_{n-1\,.}\ i)$

$M_n = M_{n-1} \,.\, (1 + i)$

$M_n = P \,.\, (1 + i)^{n-1} \,.\, (1 + i)$

$M_n = P\ \ (1 + i)^n$

$M_1 = P + J$

$M_1 = P + (P \,.\, i)$

$M_1 = P \,.\, (1 + i)$

$M_2 = M_1 + J$

$M_2 = M_1 + (M_1 \,.\, i)$

$M_2 = M_1 \,.\, (1 + i)$

$M_2 = P \,.\, (1 + i) \,.\, (1 + i)$

$M_2 = P \,.\, (1 + i)^2$

$M_3 = M_2 + J$

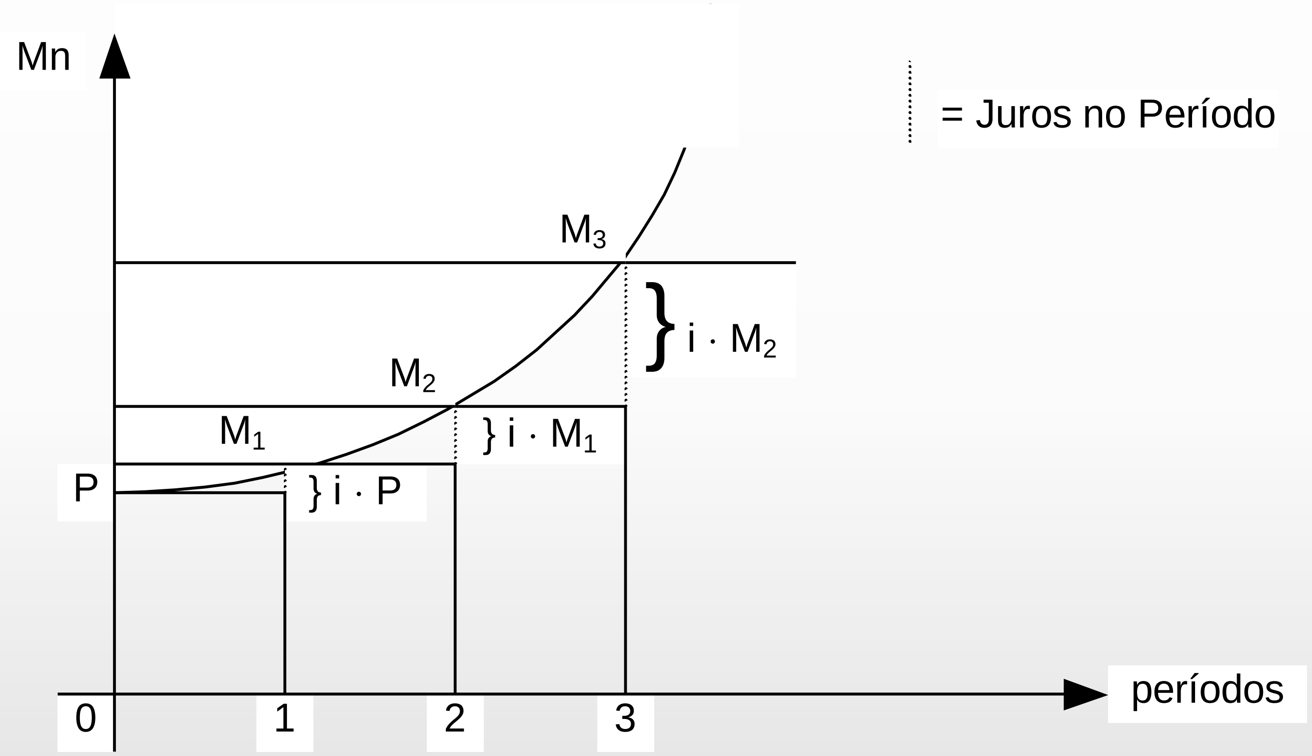
$M_3 = M_2 + (M_2 \,.\, i)$

$M_3 = M_2 \,.\, (1 + i)$

$M_3 = P \,.\, (1 + i)^2 \,.\, (1 + i)$

$M_3 = P \,.\, (1 + i)^3$

Regime de Juros Compostos (RJC)



Evolução do Capital no caso do Regime de Juros Composto

Cálculo do Valor Presente (VP)

Sabendo-se que

$M_n = P \ (1 + i)^n$

Podemos chegar a P

$$P = \left[\frac{Mn}{(1+i)^n} \right]$$

ou

$$VP = \left[\frac{VF}{(1+i)^n} \right]$$

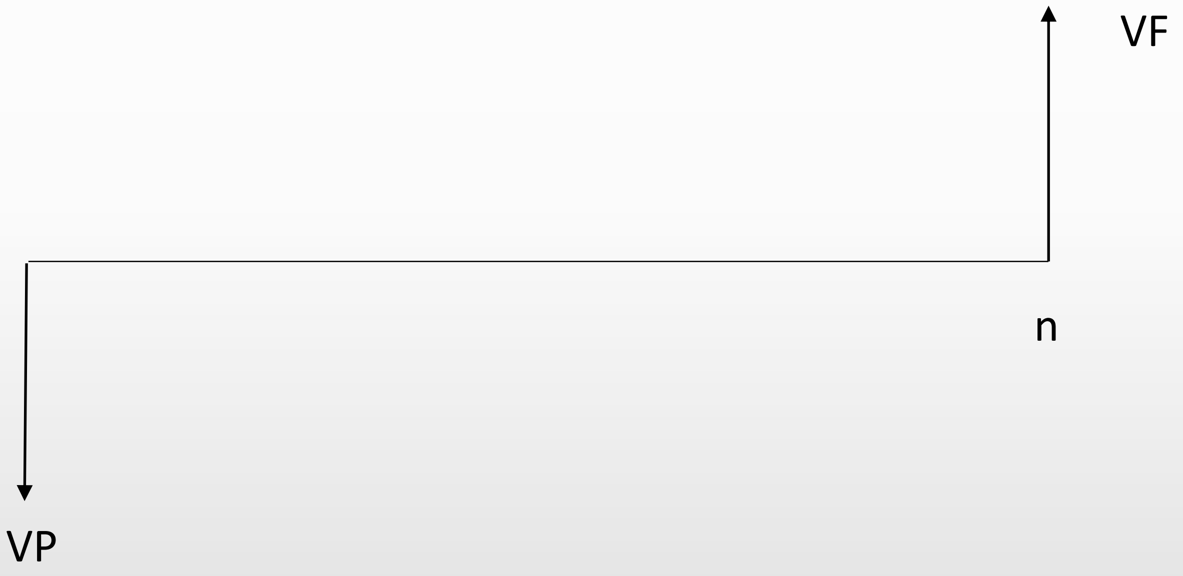
Exemplo 1

Suponha que você tenha R$ 12.000,00 para investir por um período de 15 meses, com uma taxa de juros compostos de 1,2% ao mês. Qual é o valor futuro desse investimento?

Exemplo 1

Suponha que você tenha R$ 12.000,00 para investir por um período de 15 meses, com uma taxa de juros compostos de 1,2% ao mês. Qual é o valor futuro desse investimento?

Solução:



$M_n = P \cdot (1 + i)^n$

ou

$VF = VP \cdot (1 + i)^n$

$VF = 12.000 \cdot (1 + 0{,}012)^{15}$

$VF = 14.351{,}22$

Pelo Excel

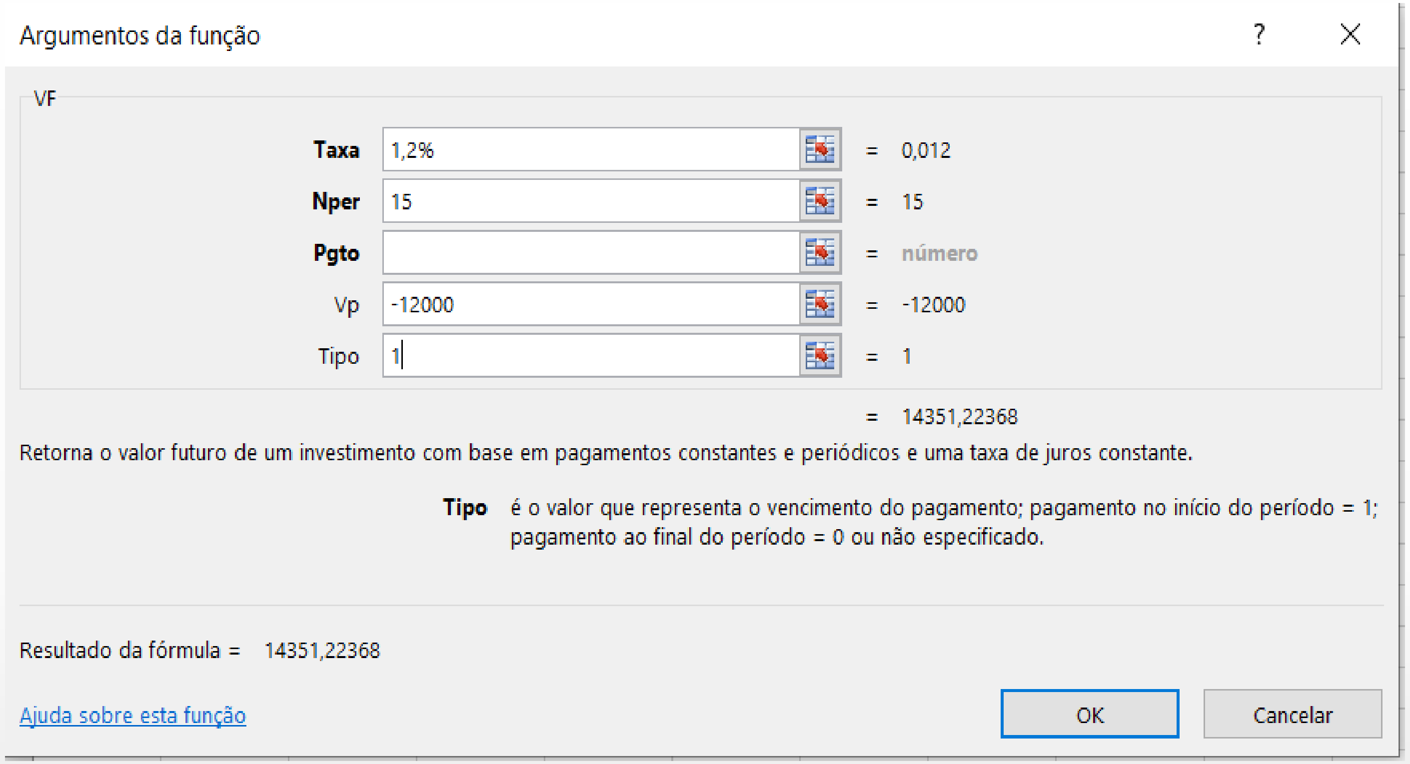
Função do Valor Futuro: =VF(TAXA ; NPER ; PGTO ; VP ; TIPO)

A função VF calculará diretamente o Valor Futuro (Montante) uma vez que tenham sido fornecidos os valores (ou os endereços) dos parâmetros.

Parâmetros utilizados:

TAXA – taxa de juros
NPER – número de períodos
PGTO – valor de uma prestação
VP – Valor Presente
TIPO – 0 ou omitido para séries “postecipadas”; 1 para séries antecipadas.

Obs: deve ser respeitado a convenção do fluxo de caixa, em que VP e VF devem ter sinais opostos.



=VF(TAXA ; NPER ; PGTO ; VP ; TIPO)

=VF(1,2%;15;0;-12000;1)

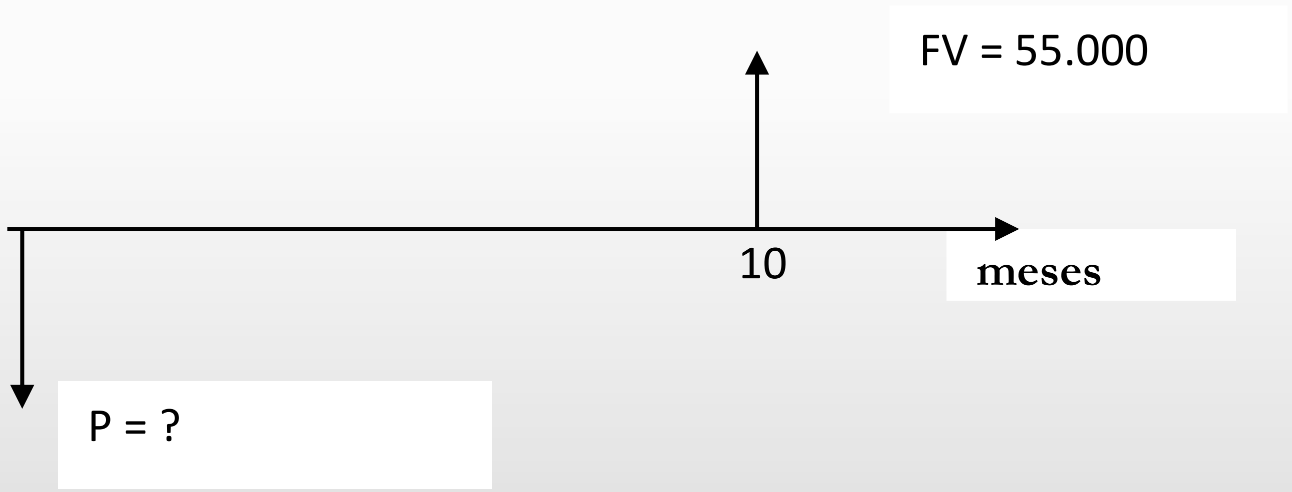
$VF = VP \cdot (1 + i)^{n}$

$VF = 12.000 \cdot (1 + 0{,}012)^{15}$

$VF = 14.351{,}22$

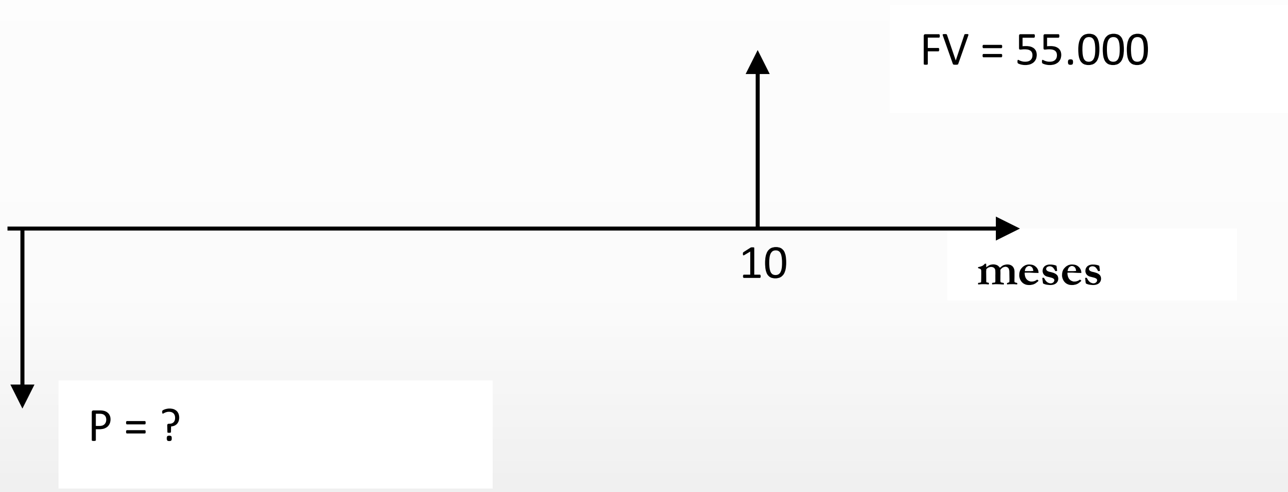
Exemplo 2

Quanto um investidor deverá aplicar hoje a fim de resgatar R$ 55.000 daqui a 10 meses, supondo uma taxa de 1,5% ao mês, pelo regime de juros compostos?



Exemplo 2

Quanto um investidor deverá aplicar hoje a fim de resgatar R$ 55.000 daqui a 10 meses, supondo uma taxa de 1,5% ao mês, pelo regime de juros compostos?



$$P = \left[\frac{Mn}{(1+i)^n} \right]$$

$$P = \left[\frac{55.000}{(1+0{,}015)^{10}} \right] = 47.391{,}70$$

Pelo Excel

Fórmulas / Inserir Função / Categoria Financeira / VP

Função do Valor Presente (Principal) : =VP(TAXA ; NPER ; PGTO ; VF ; TIPO)

A função VP calculará diretamente o Valor Presente uma vez que tenham sido fornecidos os valores (ou os endereços) dos parâmetros.

Parâmetros utilizados:

TAXA – taxa de juros

NPER – número de períodos

VF – Valor Futuro

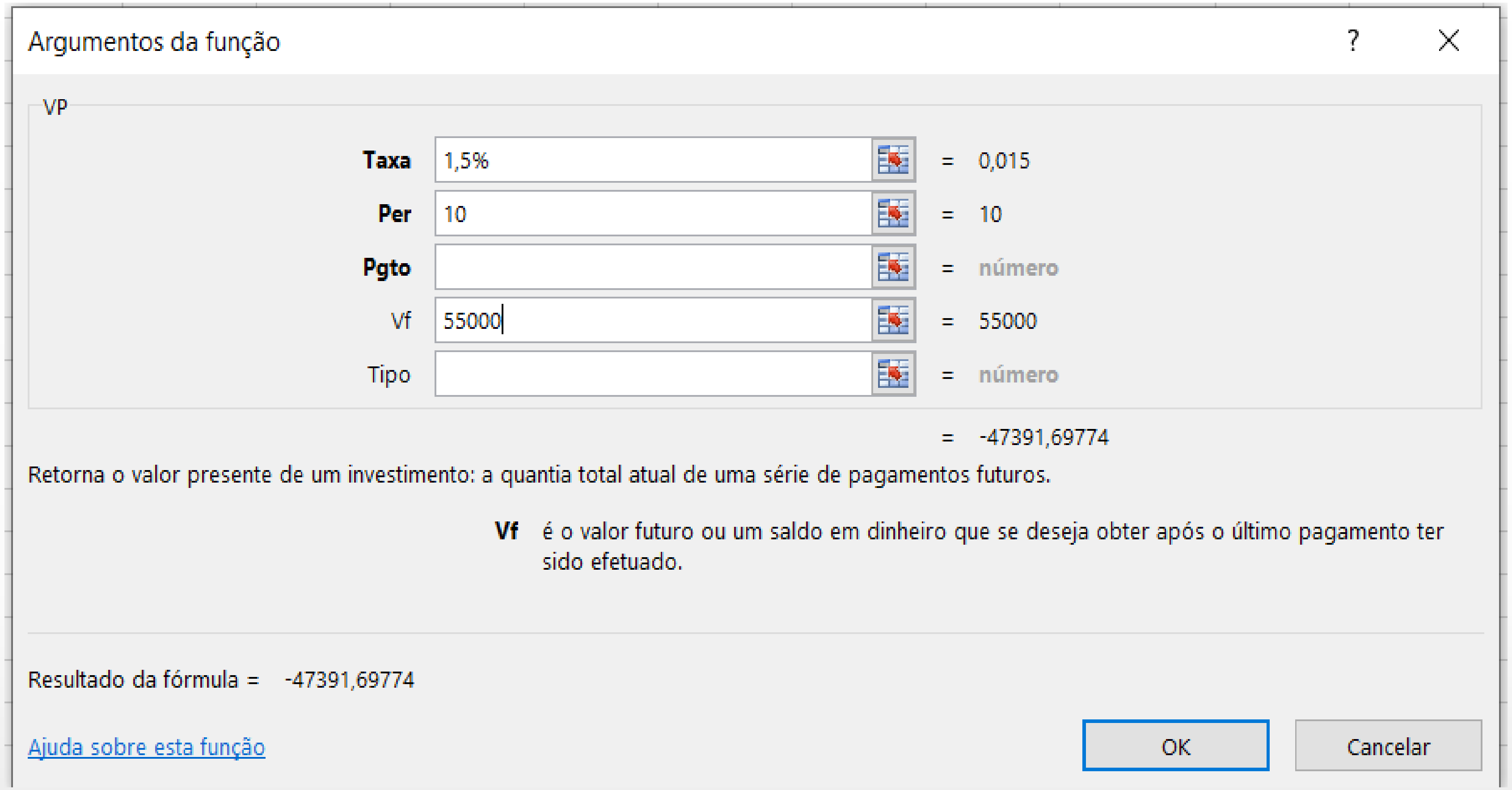
PGTO – valor de uma prestação

TIPO – 0 ou omitido para séries "postecipadas" ou 1 para séries antecipadas.

Obs: deve ser respeitado a convenção do fluxo de caixa, em que VP e VF devem ter sinais opostos.

=VP(TAXA ; NPER ; PGTO ; VF ; TIPO)

=VP(1,5%;10;0;55000;0)



$$P = \left[\frac{Mn}{(1+i)^n}\right]$$

$$P = \left[\frac{55.000}{(1+0{,}015)^{10}}\right] = 47.391{,}70$$

Exemplo 3

Qual é o valor do principal de uma aplicação que rendeu R$ 4.111,50 de juros em 180 dias a uma taxa de juros de 18% ao ano com capitalização mensal?

Exemplo 3

Qual é o valor do principal de uma aplicação que rendeu R$ 4.111,50 de juros em 180 dias a uma taxa de juros de 18% ao ano com capitalização mensal?

Solução

$M_n = P \cdot (1 + i)^n$

$P + J = P \cdot (1 + i)^n$

$J = P \cdot (1 + i)^n - P$

$J = P \cdot ((1 + i)^n - 1)$

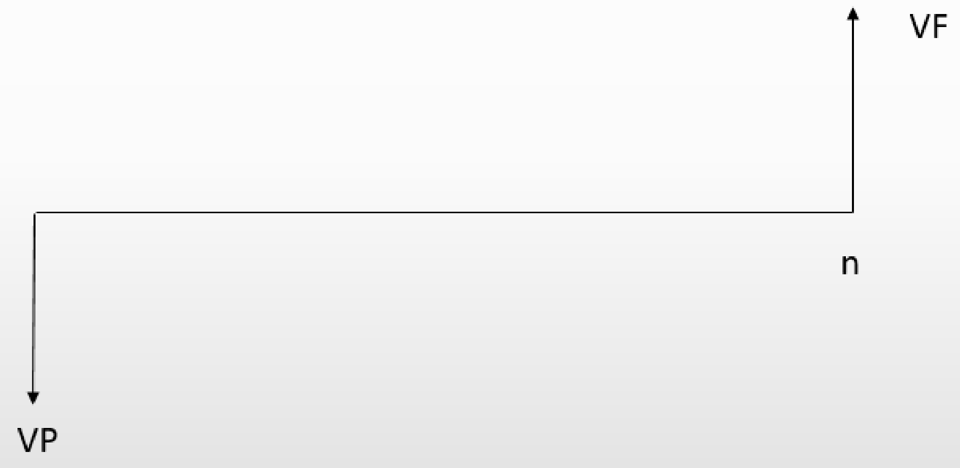
$$P = \left[\frac{J}{(1+i)^n - 1} \right]$$

$$P = \left[\frac{4.111{,}50}{(1+0{,}015)^6 - 1} \right]$$

P = R$ 44.000,00

Exemplo 4

Um investidor aplicou R$10.000,00 à taxa composta de 1,5% ao mês, recebendo após algum tempo o montante de R$35.500,00. Calcule o tempo em que o principal ficou aplicado?



Exemplo 4

Um investidor aplicou R$10.000,00 à taxa composta de 1,5% ao mês, recebendo após algum tempo o montante de R$35.500,00. Calcule o tempo em que o principal ficou aplicado?

Solução:

Dado que $VF = VP \cdot (1 + i)^n$, temos:

$VF/VP = (1 + i)^n$

Devemos usar agora o logaritmo para determinarmos o número de períodos de capitalização, ou seja,

$\ln (VF/VP) = \ln [(1 + i)^n]$

Uma das propriedades do logaritmo diz que o logaritmo de uma potência é igual ao expoente multiplicado pelo logaritmo da base da potência, ou seja,

$\ln (VF/VP) = n \cdot \ln (1 + i)$

$n = \ln (VF/VP) / \ln (1 + i)$

$n = \ln (35.500/10.000)/ \ln(1{,}015)$

$n = \ln (3{,}55)/ \ln (1{,}015)$

$n = 85{,}095$ meses = 85 meses e 2 dias

Pelo Excel

Fórmulas / Inserir Função / Categoria Financeira / NPER

Função do Prazo : =NPER(TAXA; PGTO ; VP; VF ; TIPO)

A função NPER calculará diretamente o prazo uma vez que tenham sido fornecidos os valores (ou os endereços) dos parâmetros.

Parâmetros utilizados:

VF – Valor Futuro

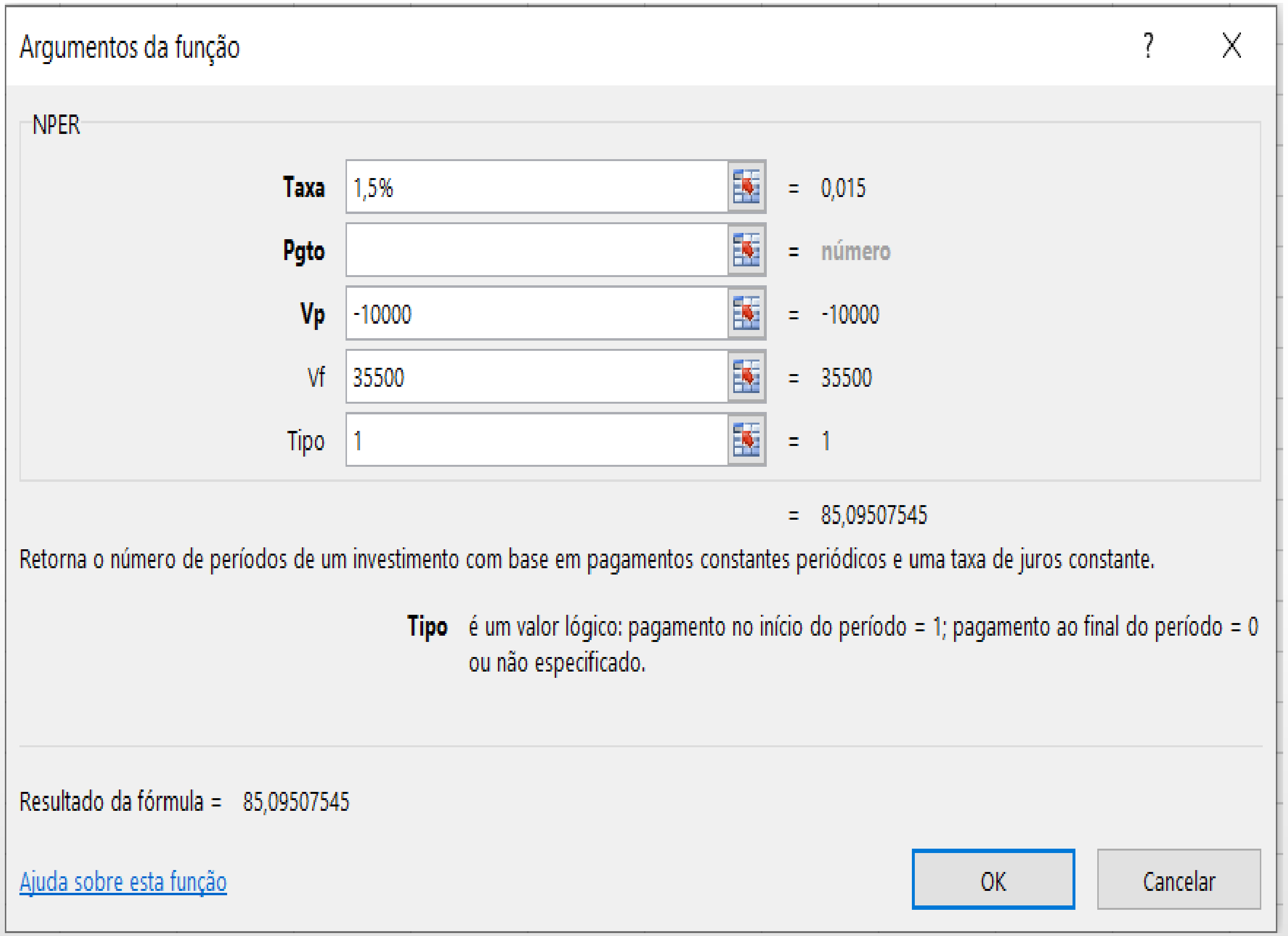
PGTO – valor de uma prestação

TAXA – taxa de juros

VP – Valor Presente

TIPO – 0 ou omitido para séries “postecipadas” ou 1 para séries antecipadas.

Obs: deve ser respeitado a convenção do fluxo de caixa, em que VP e VF devem ter sinais opostos.



=NPER(TAXA; PGTO ; VP; VF ; TIPO)

=NPER(1,5%;0;-10000;35500;1)

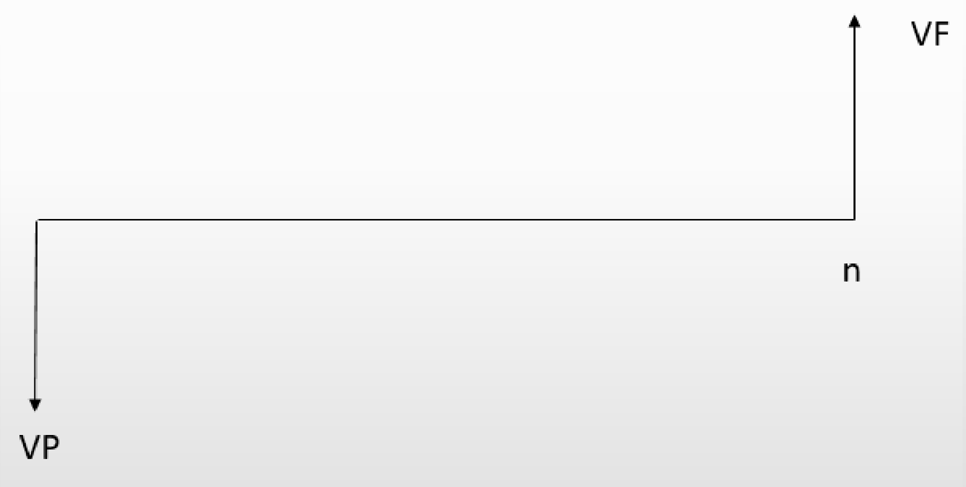
n = ln (35.500/10.000)/ ln(1,015)

n = ln (3,55)/ ln (1,015)

n = 85,095 meses = 85 meses e 2 dias

Exemplo 5

Suponha que você queira investir R$ 10.000,00 em um fundo de investimento que irá pagar um valor futuro de R$ 15.000,00 após 3 anos. Calcule a taxa de juros composta que irá gerar esse valor futuro.



Exemplo 5

Suponha que você queira investir R$ 10.000,00 em um fundo de investimento que irá pagar um valor futuro de R$ 15.000,00 após 3 anos. Calcule a taxa de juros composta que irá gerar esse valor futuro.

Solução

Dado que $VF = VP \cdot (1 + i)^n$
temos:
$VF/VP = (1 + i)^n$

$(VF/VP)^{(1/n)} = (1 + i)$

$i = (VF/VP)^{(1/n)} - 1$

como 3 anos equivale a 36 meses, podemos calcular a taxa mensal

$i = (15.000/10.000)^{(1/36)} - 1$
$i = 1{,}1327\%$ ao mês

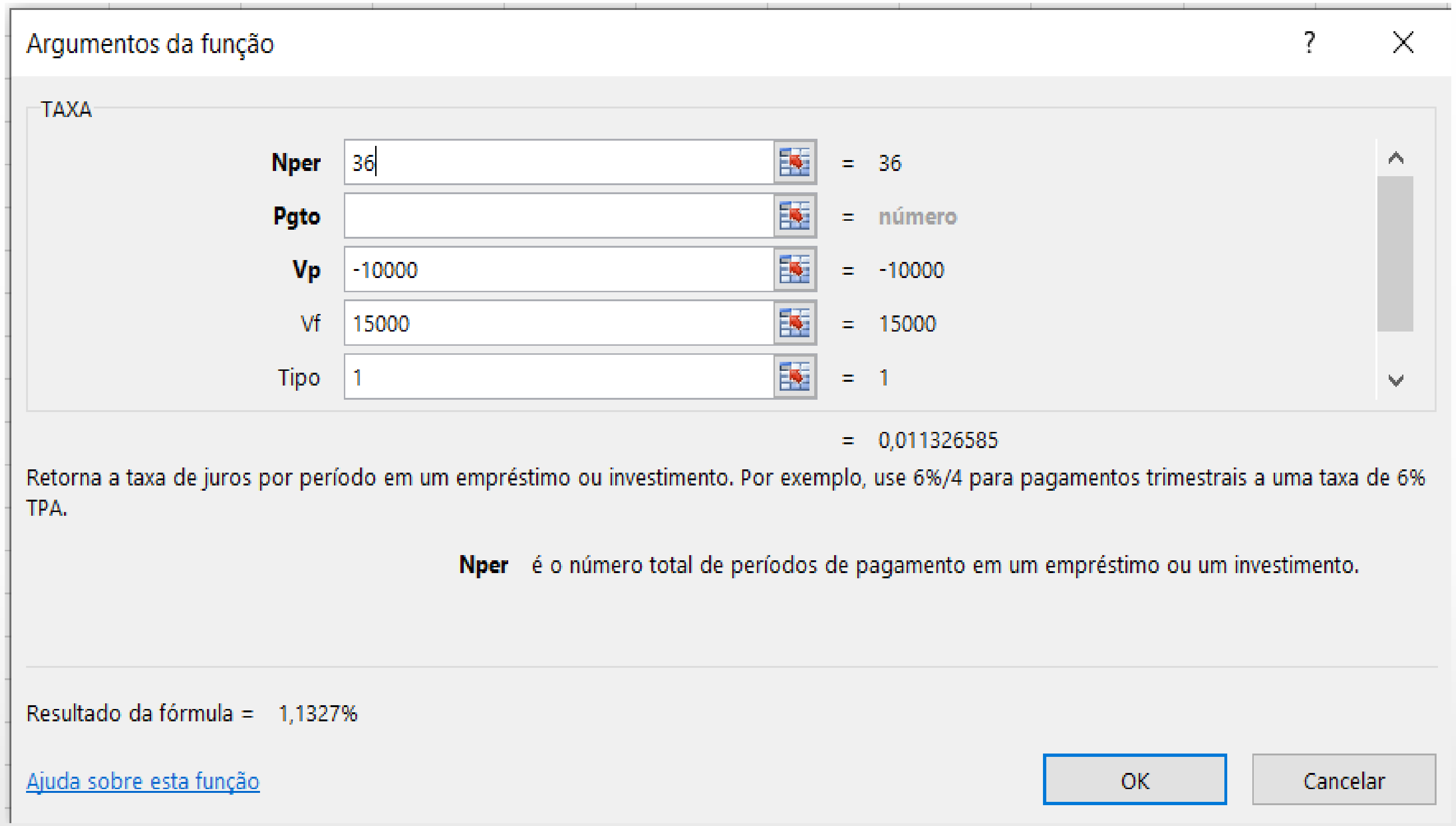
Pelo Excel

Fórmulas / Inserir Função / Categoria Financeira / TAXA

Função da Taxa de Juros: =TAXA (NPER ; PGTO ; VP; VF ; TIPO)

A função TAXA calculará diretamente a taxa de juros uma vez que tenham sido fornecidos os valores (ou os endereços) dos parâmetros.
Parâmetros utilizados:
NPER – número de períodos
VF – Valor Futuro
PGTO – valor de uma prestação
VP – Valor Presente
TIPO – 0 ou omitido para séries “postecipadas” ou 1 para séries antecipadas.

Obs: deve ser respeitado a convenção do fluxo de caixa, em que VP e VF devem ter sinais opostos.



$i = (15.000/10.000)^{(1/36)} – 1$

$i = 1,1327\%$ ao mês

=TAXA (NPER ; PGTO ; VP; VF ; TIPO)

=TAXA (36 ;0 ;-10000;15000;1)

Taxas de Juros Equivalentes

Taxas de juros equivalentes são as taxas de juros que geram o mesmo valor futuro para um investimento ou empréstimo. Em outras palavras, são taxas de juros que ao serem aplicadas sobre um mesmo principal P, no mesmo prazo n, expresso na unidade de tempo da taxa, produzem o mesmo montante.

Isso é importante porque, quando se compara diferentes opções de investimento ou empréstimo, as taxas de juros podem ser expressas de diferentes maneiras, como taxa anual, trimestral ou taxa mensal.

A taxa de juros equivalente é calculada usando a fórmula do valor futuro em regime de juros compostos, que relaciona o valor futuro, o valor presente, a taxa de juros e o número de períodos. Com a taxa de juros conhecida, podemos encontrar o valor futuro do investimento ou empréstimo em questão.

Em seguida, podemos calcular a taxa de juros equivalente que geraria o mesmo valor futuro para um investimento ou empréstimo diferente.

No regime de juros composto taxas (efetivas) equivalentes não são proporcionais.

A formulação abaixo permite o cálculo das taxas equivalentes diárias, mensais, trimestrais, semestrais e anuais:

$$(1+ i_d)^{360} = (1+i_m)^{12} = (1+i_t)^4 = (1+i_s)^2 = (1+i_a)$$

1 - Determinar a taxa anual equivalente a 1,4% a.m.?

2 - Determinar a taxa mensal equivalente a 12% a.a.?

3 – Uma instituição financeira oferece a um investidor uma taxa de 22% a.a. para uma aplicação de 52 dias. Qual é a taxa bruta do período?

4 - Qual a taxa anual equivalente à taxa de 1,6% ao mês?

5 - Determine a taxa mensal equivalente composta a taxa de 3,5% aos 50 dias?

1 - Determinar a taxa anual equivalente a 1,4% a.m.?

$$(1+i_m)^{12} = (1+i_a)$$

2 - Determinar a taxa mensal equivalente a 12% a.a.?

3 – Uma instituição financeira oferece a um investidor uma taxa de 22% a.a. para uma aplicação de 52 dias. Qual é a taxa bruta do período?

4 - Qual a taxa anual equivalente à taxa de 1,6% ao mês?

5 - Determine a taxa mensal equivalente composta a taxa de 3,5% aos 50 dias?

1 - Determinar a taxa anual equivalente a 1,4% a.m.?

$(1+i_m)^{12} = (1+i_a)$ $i_a = (1+0,014)^{12} - 1 = 18,56\%$ ao ano

2 - Determinar a taxa mensal equivalente a 12% a.a.?

3 – Uma instituição financeira oferece a um investidor uma taxa de 22% a.a. para uma aplicação de 52 dias. Qual é a taxa bruta do período?

4 - Qual a taxa anual equivalente à taxa de 1,6% ao mês?

5 - Determine a taxa mensal equivalente composta a taxa de 3,5% aos 50 dias?

1 - Determinar a taxa anual equivalente a 1,4% a.m.?

$(1+i_m)^{12} = (1+i_a)$ $\quad$ $i_a = (1+0{,}014)^{12} - 1 = 18{,}56\%$ ao ano

2 - Determinar a taxa mensal equivalente a 12% a.a.?

$(1+i_m)^{12} = (1+i_a)$

3 – Uma instituição financeira oferece a um investidor uma taxa de 22% a.a. para uma aplicação de 52 dias. Qual é a taxa bruta do período?

4 - Qual a taxa anual equivalente à taxa de 1,6% ao mês?

5 - Determine a taxa mensal equivalente composta a taxa de 3,5% aos 50 dias?

1 - Determinar a taxa anual equivalente a 1,4% a.m.?

$(1+i_m)^{12} = (1+i_a)$ $\quad$ $i_{a\,=}(1+0{,}014)^{12} – 1 = 18{,}56\%$ ao ano

2 - Determinar a taxa mensal equivalente a 12% a.a.?

$(1+i_m)^{12} = (1+i_a)$ $\quad$ $(1+i_m)^{12} = (1+0{,}12)$ $\quad$ $i_m = 0{,}9489\%$ ao mês

3 – Uma instituição financeira oferece a um investidor uma taxa de 22% a.a. para uma aplicação de 52 dias. Qual é a taxa bruta do período?

4 - Qual a taxa anual equivalente à taxa de 1,6% ao mês?

5 - Determine a taxa mensal equivalente composta a taxa de 3,5% aos 50 dias?

1 - Determinar a taxa anual equivalente a 1,4% a.m.?

$(1+i_m)^{12} = (1+i_a)$ $\quad$ $i_{a\,=}\,(1+0{,}014)^{12} - 1 = 18{,}56\%$ ao ano

2 - Determinar a taxa mensal equivalente a 12% a.a.?

$(1+i_m)^{12} = (1+i_a)$ $\quad$ $(1+i_m)^{12} = (1+0{,}12)$ $\quad$ $i_m = 0{,}9489\%$ ao mês

3 – Uma instituição financeira oferece a um investidor uma taxa de 22% a.a. para uma aplicação de 52 dias. Qual é a taxa bruta do período?

$(1 + 0{,}22)^1 = (1 + i_{52})^{(360/52)}$

4 - Qual a taxa anual equivalente à taxa de 1,6% ao mês?

5 - Determine a taxa mensal equivalente composta a taxa de 3,5% aos 50 dias?

1 - Determinar a taxa anual equivalente a 1,4% a.m.?

$(1+i_m)^{12} = (1+i_a)$ $i_{a\,=}\,(1+0{,}014)^{12} - 1 = 18{,}56\%$ ao ano

2 - Determinar a taxa mensal equivalente a 12% a.a.?

$(1+i_m)^{12} = (1+i_a)$ $(1+i_m)^{12} = (1+0{,}12)$ $i_m = 0{,}9489\%$ ao mês

3 – Uma instituição financeira oferece a um investidor uma taxa de 22% a.a. para uma aplicação de 52 dias. Qual é a taxa bruta do período?

$(1 + 0{,}22)^1 = (1 + i_{52})^{(360/52)}$ $i_{52} = (1 + 0{,}22)^{(52/360)} - 1$ $i_{52} = 2{,}91\%$ no período.

4 - Qual a taxa anual equivalente à taxa de 1,6% ao mês?

5 - Determine a taxa mensal equivalente composta a taxa de 3,5% aos 50 dias?

1 - Determinar a taxa anual equivalente a 1,4% a.m.?

$(1+i_m)^{12} = (1+i_a)$ $\quad$ $i_{a\,=}(1+0{,}014)^{12} - 1 = 18{,}56\%$ ao ano

2 - Determinar a taxa mensal equivalente a 12% a.a.?

$(1+i_m)^{12} = (1+i_a)$ $\quad$ $(1+i_m)^{12} = (1+0{,}12)$ $\quad$ $i_m = 0{,}9489\%$ ao mês

3 – Uma instituição financeira oferece a um investidor uma taxa de 22% a.a. para uma aplicação de 52 dias. Qual é a taxa bruta do período?

$(1 + 0{,}22)^1 = (1 + i_{52})^{(360/52)}$ $\quad$ $i_{52} = (1 + 0{,}22)^{(52/360)} - 1$ $\quad$ $i_{52} = 2{,}91\%$ no período.

4 - Qual a taxa anual equivalente à taxa de 1,6% ao mês?

$i_a = [(1 + 0{,}016)^{12} - 1]\ .\ 100$

5 - Determine a taxa mensal equivalente composta a taxa de 3,5% aos 50 dias?

1 - Determinar a taxa anual equivalente a 1,4% a.m.?

$(1+i_m)^{12} = (1+i_a)$ $i_{a\,=}\,(1+0{,}014)^{12} - 1 = 18{,}56\%$ ao ano

2 - Determinar a taxa mensal equivalente a 12% a.a.?

$(1+i_m)^{12} = (1+i_a)$ $(1+i_m)^{12} = (1+0{,}12)$ $i_m = 0{,}9489\%$ ao mês

3 – Uma instituição financeira oferece a um investidor uma taxa de 22% a.a. para uma aplicação de 52 dias. Qual é a taxa bruta do período?

$(1 + 0{,}22)^1 = (1 + i_{52})^{(360/52)}$ $i_{52} = (1 + 0{,}22)^{(52/360)} - 1$ $i_{52} = 2{,}91\%$ no período.

4 - Qual a taxa anual equivalente à taxa de 1,6% ao mês?

$i_a = [(1 + 0{,}016)^{12} - 1] \,.\, 100$ ia = 20,983%a.a.

5 - Determine a taxa mensal equivalente composta a taxa de 3,5% aos 50 dias?

1 - Determinar a taxa anual equivalente a 1,4% a.m.?

$(1+i_m)^{12} = (1+i_a)$ $i_{a\,=}\,(1+0{,}014)^{12} - 1 = 18{,}56\%$ ao ano

2 - Determinar a taxa mensal equivalente a 12% a.a.?

$(1+i_m)^{12} = (1+i_a)$ $(1+i_m)^{12} = (1+0{,}12)$ $i_m = 0{,}9489\%$ ao mês

3 – Uma instituição financeira oferece a um investidor uma taxa de 22% a.a. para uma aplicação de 52 dias. Qual é a taxa bruta do período?

$(1 + 0{,}22)^1 = (1 + i_{52})^{(360/52)}$ $i_{52} = (1 + 0{,}22)^{(52/360)} - 1$ $i_{52} = 2{,}91\%$ no período.

4 - Qual a taxa anual equivalente à taxa de 1,6% ao mês?

$i_a = [(1 + 0{,}016)^{12} - 1] \,.\, 100$ ia = 20,983%a.a.

5 - Determine a taxa mensal equivalente composta a taxa de 3,5% aos 50 dias?

$i_m = [(1+0{,}035)^{30/50} - 1] \,.\, 100$

1 - Determinar a taxa anual equivalente a 1,4% a.m.?

$(1+i_m)^{12} = (1+i_a)$ $i_{a\,=}\,(1+0{,}014)^{12} - 1 = 18{,}56\%$ ao ano

2 - Determinar a taxa mensal equivalente a 12% a.a.?

$(1+i_m)^{12} = (1+i_a)$ $(1+i_m)^{12} = (1+0{,}12)$ $i_m = 0{,}9489\%$ ao mês

3 – Uma instituição financeira oferece a um investidor uma taxa de 22% a.a. para uma aplicação de 52 dias. Qual é a taxa bruta do período?

$(1 + 0{,}22)^1 = (1 + i_{52})^{(360/52)}$ $i_{52} = (1 + 0{,}22)^{(52/360)} - 1$ $i_{52} = 2{,}91\%$ no período.

4 - Qual a taxa anual equivalente à taxa de 1,6% ao mês?

$i_a = [(1 + 0{,}016)^{12} - 1] \,.\, 100$ ia = 20,983%a.a.

5 - Determine a taxa mensal equivalente composta a taxa de 3,5% aos 50 dias?

$i_m = [(1+0{,}035)^{30/50} - 1] \,.\, 100$ $i_m = 2{,}0855$ %a.m.

Tratamento da Inflação

Em ambientes inflacionários é fundamental que seja ressaltado nas variadas taxas de juros nominais praticadas na economia, o componente devido à inflação e aquele declarado como real.

Pela evolução dos índices de preços (IPCA, INCC, IGP-M, etc..) pode ser constatado como os preços gerais da economia variaram no período. Para tanto, relaciona-se o índice do fim do período que se deseja estudar com do início.

Taxa de Inflação

A taxa de inflação ∏, obtida a partir de índices de preços, é definida como a variação percentual do índice de preço entre um período n e um período anterior n-t.

$$\prod = (P_n - P_{n-t})/P_{n-t} = P_n/P_{n-t} - 1$$

Taxa de Inflação Acumulada

A taxa de inflação acumulada ao longo de um período (três meses por exemplo) é igual a variação percentual do índice de preços entre a data final e a data inicial.

$\prod_{ac} = P_3/P_0 - 1$ $\prod_{ac} = [(P_1/P_0) . (P_2/P_1) . (P_3/P_2)] - 1 =$

$\prod_{ac} = [(1 + \prod_1) . (1 + \prod_2) . (1 + \prod_3)] - 1 =$

Taxa de Inflação Acumulada

A taxa de inflação acumulada ao longo de um período (três meses por exemplo) é igual a variação percentual do índice de preços entre a data final e a data inicial.

$$\prod_{ac} = P_3/P_0 - 1$$

$$\prod_{ac} = [(1 + \prod_1) . (1 + \prod_2) . (1 + \prod_3)] - 1 =$$

Exemplo 1

Com base na tabela do IGPM, calculado pela Fundação Getúlio Vargas, calcule a taxa de inflação acumulada no ano de 2022 e também a taxa de inflação em janeiro de 2023.

Período	Índice
Dez/2021	1.100,99
Jan/2022	1.121,00
Fev/2022	1.141,55
Mar/2022	1.161,42
Abr/2022	1.177,81
Mai/2022	1.183,95
Jun/2022	1.190,88
Jul/2022	1.193,34
Ago/2022	1.185,00
Set/2022	1.173,79
Out/2022	1.162,39
Nov/2022	1.155,83
Dez/2022	1.161,01
Jan/2023	1.163,47

Taxa de Inflação Acumulada

A taxa de inflação acumulada ao longo de um período (três meses por exemplo) é igual a variação percentual do índice de preços entre a data final e a data inicial.

$$\prod_{ac} = P_3/P_0 - 1$$

$$\prod_{ac} = [(1 + \prod_1) . (1 + \prod_2) . (1 + \prod_3)] - 1 =$$

Exemplo 1

Com base na tabela do IGPM, calculado pela Fundação Getúlio Vargas, calcule a taxa de inflação acumulada no ano de 2022 e também a taxa de inflação em janeiro de 2023.

Período	Índice
Dez/2021	1.100,99
Jan/2022	1.121,00
Fev/2022	1.141,55
Mar/2022	1.161,42
Abr/2022	1.177,81
Mai/2022	1.183,95
Jun/2022	1.190,88
Jul/2022	1.193,34
Ago/2022	1.185,00
Set/2022	1.173,79
Out/2022	1.162,39
Nov/2022	1.155,83
Dez/2022	1.161,01
Jan/2023	1.163,47

Solução:

A taxa de inflação no ano de 2022 foi igual a

$$\prod_{2022} = [(1.161,01/1,100,99) - 1] . 100 = 5,45\%$$

Taxa de Inflação Acumulada

A taxa de inflação acumulada ao longo de um período (três meses por exemplo) é igual a variação percentual do índice de preços entre a data final e a data inicial.

$$\prod_{ac} = P_3/P_0 - 1$$

$$\prod_{ac} = [(1 + \prod_1) . (1 + \prod_2) . (1 + \prod_3)] - 1 =$$

Exemplo 1

Com base na tabela do IGPM, calculado pela Fundação Getúlio Vargas, calcule a taxa de inflação acumulada no ano de 2022 e também a taxa de inflação em janeiro de 2023.

Período	Índice
Dez/2021	1.100,99
Jan/2022	1.121,00
Fev/2022	1.141,55
Mar/2022	1.161,42
Abr/2022	1.177,81
Mai/2022	1.183,95
Jun/2022	1.190,88
Jul/2022	1.193,34
Ago/2022	1.185,00
Set/2022	1.173,79
Out/2022	1.162,39
Nov/2022	1.155,83
Dez/2022	1.161,01
Jan/2023	1.163,47

<u>Solução:</u>

A taxa de inflação no ano de 2022 foi igual a

$$\prod_{2022} = [(1.161{,}01/1{,}100{,}99) - 1] . 100 = 5{,}45\%$$

A taxa de inflação em janeiro de 2023 foi igual a

$$\prod_{jan23} = [(1.163{,}47/1{,}161{,}01) - 1] . 100 = 0{,}21\%$$

Exemplo 2

Com base na taxa de inflação mensal, medida pelo IGPM, em 2022, calcule a inflação acumulada no 1º, 2º, 3º e 4º trimestres de 2022. Em seguida calcule a taxa de inflação acumulada do 1º semestre, do 2º semestre e finalmente a taxa anual.

Período	Taxa de Inflação
Jan/2022	0,48%
Fev/2022	-0,04%
Mar/2022	1,24%
Abr/2022	0,80%
Mai/2022	0,28%
Jun/2022	1,56%
Jul/2022	2,23%
Ago/2022	2,74%
Set/2022	4,34%
Out/2022	3,23%
Nov/2022	3,28%
Dez/2022	0,96%

Exemplo 2

Com base na taxa de inflação mensal, medida pelo IGPM, em 2022, calcule a inflação acumulada no 1º, 2º, 3º e 4º trimestres de 2022. Em seguida calcule a taxa de inflação acumulada do 1º semestre, do 2º semestre e finalmente a taxa anual.

Período	Taxa de Inflação
Jan/2022	0,48%
Fev/2022	-0,04%
Mar/2022	1,24%
Abr/2022	0,80%
Mai/2022	0,28%
Jun/2022	1,56%
Jul/2022	2,23%
Ago/2022	2,74%
Set/2022	4,34%
Out/2022	3,23%
Nov/2022	3,28%
Dez/2022	0,96%

$$\prod_{1o\ tri\ 20} = [(1 + 0{,}0048) \,.\, (1 - 0{,}0004) \,.\, (1 + 0{,}0124)] - 1 = 1{,}69\%$$

$$\prod_{2o\ tri\ 20} = [(1 + 0{,}008) \,.\, (1 + 0{,}0028) \,.\, (1 + 0{,}0156)] - 1 = 2{,}66\%$$

$$\prod_{3o\ tri\ 20} = [(1 + 0{,}0223) \,.\, (1 + 0{,}0274) \,.\, (1 + 0{,}0434)] - 1 = 9{,}59\%$$

$$\prod_{4o\ tri\ 20} = [(1 + 0{,}0323) \,.\, (1 + 0{,}0328) \,.\, (1 + 0{,}0096)] - 1 = 7{,}64\%$$

Exemplo 2

Com base na taxa de inflação mensal, medida pelo IGPM, em 2022, calcule a inflação acumulada no 1º, 2º, 3º e 4º trimestres de 2022. Em seguida calcule a taxa de inflação acumulada do 1º semestre, do 2º semestre e finalmente a taxa anual.

Período	Taxa de Inflação
Jan/2022	0,48%
Fev/2022	-0,04%
Mar/2022	1,24%
Abr/2022	0,80%
Mai/2022	0,28%
Jun/2022	1,56%
Jul/2022	2,23%
Ago/2022	2,74%
Set/2022	4,34%
Out/2022	3,23%
Nov/2022	3,28%
Dez/2022	0,96%

$$\prod_{1o\ tri\ 20} = [(1 + 0{,}0048) \cdot (1 - 0{,}0004) \cdot (1 + 0{,}0124)] - 1 = 1{,}69\%$$

$$\prod_{2o\ tri\ 20} = [(1 + 0{,}008) \cdot (1 + 0{,}0028) \cdot (1 + 0{,}0156)] - 1 = 2{,}66\%$$

$$\prod_{3o\ tri\ 20} = [(1 + 0{,}0223) \cdot (1 + 0{,}0274) \cdot (1 + 0{,}0434)] - 1 = 9{,}59\%$$

$$\prod_{4o\ tri\ 20} = [(1 + 0{,}0323) \cdot (1 + 0{,}0328) \cdot (1 + 0{,}0096)] - 1 = 7{,}64\%$$

$$\prod_{1o\ sem\ 20} = [(1 + 0{,}0169) \cdot (1 + 0{,}0266)] - 1 = 4{,}3892\%\ (1^o\ \text{semestre})$$

$$\prod_{2o\ sem\ 20} = [(1 + 0{,}0959) \cdot (1 + 0{,}0764)] - 1 = 17{,}96\%\ (2^o\ \text{semestre})$$

Exemplo 2

Com base na taxa de inflação mensal, medida pelo IGPM, em 2022, calcule a inflação acumulada no 1º, 2º, 3º e 4º trimestres de 2022. Em seguida calcule a taxa de inflação acumulada do 1º semestre, do 2º semestre e finalmente a taxa anual.

Período	Taxa de Inflação
Jan/2022	0,48%
Fev/2022	-0,04%
Mar/2022	1,24%
Abr/2022	0,80%
Mai/2022	0,28%
Jun/2022	1,56%
Jul/2022	2,23%
Ago/2022	2,74%
Set/2022	4,34%
Out/2022	3,23%
Nov/2022	3,28%
Dez/2022	0,96%

$$\prod_{1o\ tri\ 2022} = [(1 + 0{,}0048) \cdot (1 - 0{,}0004) \cdot (1 + 0{,}0124)] - 1 = 1{,}69\%$$

$$\prod_{2o\ tri\ 2022} = [(1 + 0{,}008) \cdot (1 + 0{,}0028) \cdot (1 + 0{,}0156)] - 1 = 2{,}66\%$$

$$\prod_{3o\ tri\ 2022} = [(1 + 0{,}0223) \cdot (1 + 0{,}0274) \cdot (1 + 0{,}0434)] - 1 = 9{,}59\%$$

$$\prod_{4o\ tri\ 2022} = [(1 + 0{,}0323) \cdot (1 + 0{,}0328) \cdot (1 + 0{,}0096)] - 1 = 7{,}64\%$$

$$\prod_{1o\ sem\ 2022} = [(1 + 0{,}0169) \cdot (1 + 0{,}0266)] - 1 = 4{,}3892\%\ (1^{o}\ \text{semestre})$$

$$\prod_{2o\ sem\ 2022} = [(1 + 0{,}0959) \cdot (1 + 0{,}0764)] - 1 = 17{,}96\%\ (2^{o}\ \text{semestre})$$

$$\prod_{2022} = [(1 + 0{,}043892) \cdot (1 + 0{,}1796)] - 1 = 23{,}14\%\ (\text{ano de }2022)$$

Pelo Excel, podemos usar a função VFPLANO, conforme exemplo abaixo:

	A	B	C	D	E
1					
2			taxa mensal		
3		jan/20	0,48%		
4		fev/20	-0,04%		
5		mar/20	1,24%		
6		abr/20	0,80%		
7		mai/20	0,28%		
8		jun/20	1,56%		
9		jul/20	2,23%		
10		ago/20	2,74%		
11		set/20	4,34%		
12		out/20	3,23%		
13		nov/20	3,28%		
14		dez/20	0,96%		
15					
16		taxa acumulada	23,14%	=VFPLANO(1;C3:C14)-1	
17					

Taxa de Desvalorização Monetária

A taxa de desvalorização monetária refere-se à taxa em que uma moeda perde valor ao longo do tempo, geralmente devido à inflação. A desvalorização pode ser medida em termos percentuais, com base na diferença entre o poder de compra de uma unidade monetária em um determinado período e o seu poder de compra em um período anterior.

Se no início do ano para se comprar uma cesta de produtos forem necessários R$1.200,00 e se a taxa de inflação neste ano (baseada num índice relacionada a essa cesta de produtos) for de 100%, isto vai implicar em que no final do ano sejam necessários R$ 2.400,00 (o dobro do valor inicial) para comprar a mesma cesta.

Assim, com R$ 1.200,00 só será possível adquirir a metade da cesta básica. Nesse caso, podemos verificar que houve uma perda do poder aquisitivo da moeda (dado pela taxa de desvalorização da moeda) de 50%.

Taxa de Desvalorização Monetária

A seguir temos a fórmula da taxa de desvalorização monetária (TDM) pode ser calculada pela seguinte fórmula:

$$TDM = \frac{\prod}{1 + \prod}$$

Onde

$\prod$ = taxa de inflação do período

Dessa forma, se a taxa de inflação acumulada no período é de 100%, a taxa de desvalorização monetária será:

$TDM = \frac{1}{1+1}$ = ½ = 50%

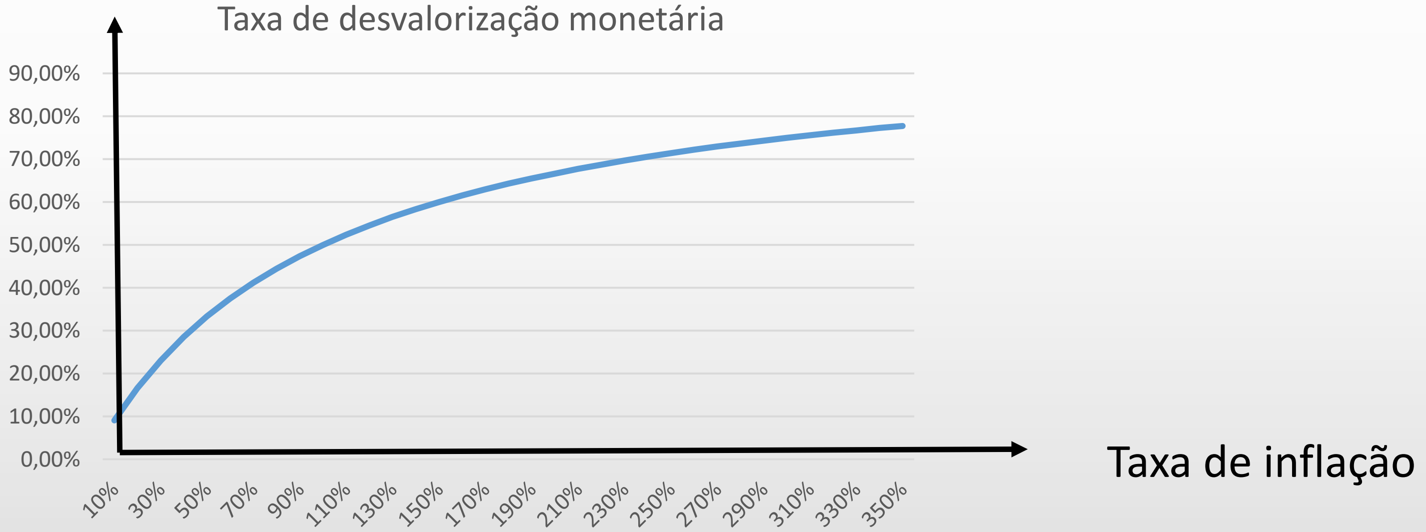
Assim, com o mesmo valor, só seria possível adquirir 50% da cesta básica (1 – 0,5).

Se a taxa de inflação acumulada no período fosse de 200%, a taxa de desvalorização monetária será:

$$TDM = \frac{2}{1+2} = 66,7\%$$

Assim, com o mesmo valor, só seria possível adquirir 33,3% (1/3) da casta básica (1 – 0,667).

Quanto maior é a taxa de inflação, maior é a taxa de desvalorização da moeda.



Taxa Real e Taxa Nominal

É fundamental que seja feita uma análise do relacionamento das taxas de juros com as taxas de inflação. O resultado de uma aplicação financeira poderá ser ilusório caso o aplicador não considere a inflação do período correspondente.

Por exemplo, se for feita uma aplicação por um ano à taxa de 10% a.a., e a inflação no mesmo período for de 15%, o ganho dessa aplicação nem sequer conseguirá repor o poder aquisitivo do dinheiro aplicado.

Define-se taxa real de juros r ao ganho real expresso como percentagem do capital corrigido. É a remuneração que se aufere ou se paga, acima da taxa de correção monetária.

Mesmo numa conjuntura econômica com reduzidas taxas de inflação, torna-se importante se conhecer o juro real.

Fórmula de Fisher – fórmula da taxa de juros real

$$1 + r = \frac{(1 + i)}{(1 + j)}$$

onde

i é a taxa nominal de juros do período e j é a taxa de inflação do período.

Se $i = j$ então $r = 0$ (taxa real nula)

Se $i > j$ então $r > 0$ (taxa real positiva)

Se $i < j$ então $r < 0$ (taxa real negativa)

Exemplo 1

Suponha que você esteja investindo em um título de renda fixa que oferece uma taxa nominal de 8% ao ano, e a taxa de inflação esperada para o mesmo período seja de 3% ao ano. Calcule a taxa real esperada.

Taxa Real = (1 + Taxa Nominal) / (1 + Taxa de Inflação) – 1

Taxa Real = (1 + 0,08) / (1 + 0,03) - 1

Taxa Real = 1,08 / 1,03 - 1 Taxa Real = 0,0485 ou 4,85%

Exemplo 2

Uma pessoa comprou um imóvel em fev/2022 por R$ 820 mil e vendeu de dez/2022 por R$ 850 mil (valor líquido de taxas, impostos e comissões). Qual foi a rentabilidade real obtida na venda considerando que o IGP-M como a taxa de inflação (medida pelo IGP-M)?

Período	Índice
Dez/2021	1.100,99
Jan/2022	1.121,00
Fev/2022	1.141,55
Mar/2022	1.161,42
Abr/2022	1.177,81
Mai/2022	1.183,95
Jun/2022	1.190,88
Jul/2022	1.193,34
Ago/2022	1.185,00
Set/2022	1.173,79
Out/2022	1.162,39
Nov/2022	1.155,83
Dez/2022	1.161,01
Jan/2023	1.163,47

$$1 + r = \frac{(1+i)}{(1+j)}$$

i = (850.000/820.000) – 1 = 3,66%

j = (1.161,01/1.141,55) – 1 = 1,71%

r = (1,0366/1,0171) – 1 = 1,92%

Na Matemática Financeira, **sistemas de amortização** referem-se às diferentes formas de quitar uma dívida ao longo do tempo, dividindo-a em prestações. Os dois sistemas de amortização mais usados são o **Sistema de Amortização Constante (SAC)** e a **Tabela Price**.

Sistema de Amortização Constante (SAC)

No **SAC**, o valor da **amortização é constante** ao longo das prestações. Assim, a parcela destinada a reduzir o principal (o montante emprestado) permanece a mesma, mas os juros diminuem ao longo do tempo, pois são calculados sobre o saldo devedor remanescente. Isso faz com que as prestações sejam mais altas no início e diminuam gradualmente. É um sistema mais conservador, já que reduz o saldo devedor mais rapidamente.

Sistema Price (ou Tabela Price)

A **Tabela Price** utiliza prestações fixas ao longo do prazo do empréstimo. Cada parcela inclui uma parte de amortização e outra de juros, mas o valor total da prestação permanece constante. No início, a parcela dos juros é maior, e a amortização é menor, invertendo-se progressivamente até que, no final, a maior parte da parcela corresponde à amortização. Este sistema é bastante utilizado em financiamentos de longo prazo, como imobiliários.

Exercício 1

Um cliente contrata um financiamento de R$ 10.000,00 para ser pago em 5 parcelas mensais, com uma taxa de juros de 2% ao mês no sistema de amortização constante (SAC).

a) Calcule o valor da amortização mensal.
b) Calcule o valor da primeira prestação.
c) Calcule o valor da última prestação.

Dados:
Valor financiado: PV=R$10.000
Número de parcelas: n=5
Taxa de juros: i=2% ao mês

Cálculo da amortização mensal:
No SAC, a amortização é constante e pode ser calculada dividindo o valor total financiado pelo número de parcelas:
$A = PV/n = 10.000/5 = 2.000$

Cálculo do valor da primeira prestação:
A prestação no SAC é composta de juros sobre o saldo devedor inicial mais a amortização. O saldo devedor no primeiro mês é o valor total do empréstimo, então os juros da primeira prestação são:
$Juros1 = PV \times i = 10.000 \times 0{,}02 = 200$
$PMT1 = AMORT + Juros1 = 2.000 + 200 = 2.200$

Cálculo do valor da última prestação:
Na última prestação, o saldo devedor é apenas a última amortização, então os juros serão:
$Juros5 = 2.000 \times 0{,}02 = 40$
$PMT5 = A + J = 2.000 + 40 = 2.040$

Mês	Saldo Devedor	Juros	Amortização	Prestação
1	10.000	200	2.000	2.200
2	8.000	160	2.000	2.160
3	6.000	120	2.000	2.120
4	4.000	80	2.000	2.080
5	2.000	40	2.000	2.040

Exercício 2

Uma empresa realiza um empréstimo de R$ 15.000,00 em 4 parcelas trimestrais pelo sistema de amortização constante (SAC), a uma taxa de juros de 1,5% ao trimestre.

a) Qual é o valor da amortização em cada período?
b) Qual é o valor dos juros no primeiro e no segundo trimestre?
c) Determine o valor total das prestações pagas ao longo dos quatro trimestres.

Mês	Saldo Devedor	Juros	Amortização	Prestação
1	15.000	225	3.750	3.975
2	11.250	169	3.750	3.919
3	7.500	113	3.750	3.863
4	3.750	56	3.750	3.806

AMORT = 15.000 / 4 = 3.750
J1 = 1,5% x 15.000 = 225
J2 = 1,5% x 11.250 = 169

PMT 1 = 3.975
PMT 2 = 3.919
PMT 3 = 3.863
PMT 4 = 3.806

Exercício 3

Uma empresa contrai um empréstimo de R$ 100.000,00 a ser pago em 12 parcelas mensais pelo sistema de amortização constante (SAC), com uma taxa de juros de 1,5% ao mês.

O contrato inclui uma carência de 4 meses para o pagamento das parcelas, período no qual serão cobrados apenas os juros sobre o saldo devedor.

A partir do quinto mês, a empresa começa a pagar as parcelas compostas por juros e amortização.

a) Determine o valor da amortização e das parcelas.
b) Calcule o saldo devedor ao final de cada mês.

Mês	Saldo Devedor	Juros	Amortização	Prestação
1	100.000	1.500	-	1.500
2	100.000	1.500	-	1.500
3	100.000	1.500	-	1.500
4	100.000	1.500	-	1.500
5	100.000	1.500	8.333	9.833
6	91.667	1.375	8.333	9.708
7	83.333	1.250	8.333	9.583
8	75.000	1.125	8.333	9.458
9	66.667	1.000	8.333	9.333
10	58.333	875	8.333	9.208
11	50.000	750	8.333	9.083
12	41.667	625	8.333	8.958
13	33.333	500	8.333	8.833
14	25.000	375	8.333	8.708
15	16.667	250	8.333	8.583
16	8.333	125	8.333	8.458

Exercício 4

Uma pessoa financiou R$ 12.000,00 em 6 parcelas mensais pela Tabela Price, com uma taxa de juros de 3% ao mês.

a) Calcule o valor da prestação mensal.

b) Determine o valor da primeira até a última parcela em termos de amortização e juros.

c) Calcule o saldo devedor ao longo dos meses.

A Tabela Price é caracterizada por prestações fixas, onde o valor da prestação (PMT) é calculado com a fórmula:

$$PMT = PV \times \frac{i \times (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

onde:

- PMT: valor da prestação
- PV: valor presente (ou principal do empréstimo)
- i: taxa de juros por período
- n: número de parcelas

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3						
4		Mês	Saldo Devedor	Juros	Amortização	Prestação
5		1	12.000	360	1.855	2.215
6		2	10.145	304	1.911	2.215
7		3	8.234	247	1.968	2.215
8		4	6.266	188	2.027	2.215
9		5	4.239	127	2.088	2.215
10		6	2.151	65	2.151	2.215
11						
12						
13		Taxa de juros		3%		
14		número de meses		6		
15		PV		12.000		
16						
17						
18		=PGTO(D13;D14;D15)		-R$ 2.215,17		